Единый экзамен по математике, 2008. Рецензия и рекомендации

2 мая 2008

Аннотация

Весной 2008 года была проведена репетиция ЕГЭ по математике, который впервые будет проведён для всех московских школьников в 2008 году. В этой заметке обсуждаются задачи из этого репетиционного экзамена и даются рекомендации по улучшению проведения подобных экзаменов.

1. Общее описание варианта

Тренировочный вариант, предложенный весной 2008 года, состоит из инструкции и задач. Инструкция объясняет типы задач и необходимые действия: выбор ответа из четырёх вариантов (10 задач A1–A10), запись числового ответа (11 задач B1–B11) и запись решения (5 задачи C1–C5). Объясняется также, что отмеченные звёздочкой задачи B9 (текстовая), B10, B11, C4 (геометрия) не учитываются при выставлении школьной отметки по алгебре, но влияют на тестовый балл. Говорится, что «тестовый балл выставляется по 100-балльной шкале на основе первичных баллов, полученных за выполнение всех заданий работы» (без дальнейших подробностей). Работа рассчитана на 4 часа (240 минут). Задания занимают шесть страниц; на каждой странице указан копирайт «Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской федерации» и рядом с ним слова «Копирование не допускается».

2. Принципы оценки

Для школ и школьников ЕГЭ играет двойную роль. Во-первых, многими ВУЗами он учитывается как вступительный. Во-вторых, он является ориентиром для преподавания математики, которое в значительной степени всегда является подготовкой к экзамену. Эти две роли выдвигают разные требования к экзамену. Мы не будем обсуждать его качество как способа отбора студентов (поскольку это требует сравнения с традиционными вариантами вступительных экзаменов, а это отдельная большая тема), а ограничимся вторым аспектом.

С этой точки зрения необходимо, чтобы стремление подготовиться и хорошо сдать ЕГЭ побуждало школьников и учителей к разумным действиям по изучению математики (а не к изучению приёмов и трюков, специально связанных с формой экзамена). У них должна быть уверенность, что экзамен проводится добросовестно, квалифицированно и в доброжелательной спокойной обстановке.

Насколько соответствует этим требованиям нынешняя схема проведения экзамена и его задачи? Мы отвечаем на эти вопросы, исходя из материалов проведённой репетиции экзамена.

3. Рекомендации по проведению

Чтобы обеспечить уверенность школьников и учителей в качественном проведении экзамена, необходимо:

- включить в материалы экзамена распределение баллов по задачам, чтобы школьники могли сознательно распределять свои силы. (При этом после суммирования баллов может производиться нормировка с учётом статистики результатов и эти таблицы в момент экзамена не известны, но первичные баллы должны быть написаны.)

- в течение одного-двух дней после окончания экзамена тексты экзаменационных вариантов с решениями должны быть опубликованы в интернете, чтобы школьники и учителя могли сравнить свои ответы и решения с правильными; с заданий следует убрать анекдотическую запись «копирование не допускается» (задачи прошлых экзаменов можно и нужно использовать при подготовке);

- при сдаче школьником работы (листов с ответами и решениями) ему должна выдаывать ксерокопия этих листов, чтобы он мог сам или с помощью учителя проанализировать свои ошибки; другой вариант, не исключающий первого — возможность просмотреть отсканированный текст своей работы в интернете по индивидуальному коду, сообщаемому каждому школьнику в момент экзамена;

- по окончанию проверки работ критерии оценок и таблицы пересчёта баллов (если они применялись) должны быть опубликованы для всеобщего сведения;

- должна быть установлена ясная и несложная процедура исправления (неизбежных во всяком массовом мероприятии) технических и других ошибок, а также возможность пересдачи экзамена в случаях, когда работа школьника утрачена или повреждена не по его вине.

- наконец (last but not least!), все решения, связанные с порядком проведения экзамена *и учёта его результатов, в том числе и ВУЗами*, должны приниматься *до начала предыдущего учебного года.*

Перечисленное не требует больших расходов и, на наш взгляд, является не только важным элементом «пиара» (чтобы у школьников и учителей была уверенность в разумности экзамена и правильности проверки), но и почти единственным способом иметь обратную связь, без которой поддержание минимальных стандартов качества проведения экзамена невозможно.

4. Комментарии по задачам

По технологическим причинам неизбежно проведение значительной части экзамена в тестовой форме (с выбором ответа из вариантов или с записью числового значения ответа). Желательно, однако, чтобы это не побуждало школьников к математически бессмысленным действиям типа угадывания ответа по внешнему виду или его случайного выбора. Что касается случайного выбора ответов, то необходимо предусматривать вариант отказа от решения задачи и статистически обоснованный штраф за неверный ответ. Кроме того, такую форму можно применять только для простых задач, где естественный путь решения (а потом выбор ответа) требует меньше времени, чем различные уловки по подбору правдоподобного ответа.

Перейдём к отдельным задачам. (В скобках указан процент московских работ, в которых эта задача была засчитана как решённая по статистике с сайта mioo.ru; в задачах части C указаны проценты получивших разное число баллов.)

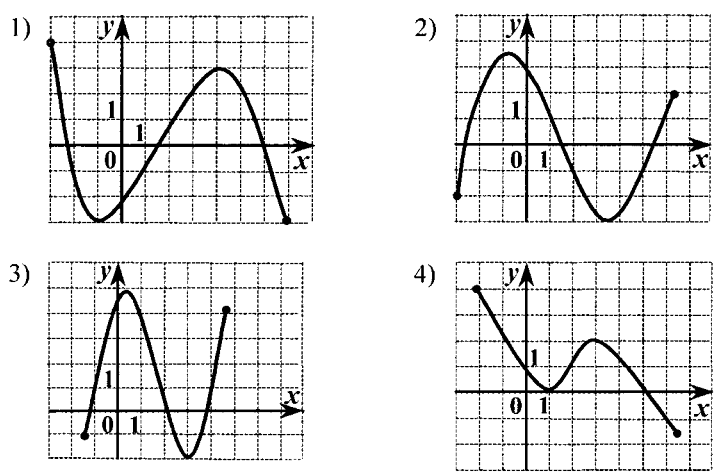
A1 [88%]. *Упростите выражение* $7^{1,8}/7^{0,2}$ [1,6 // 9 // 7^9 // $7^{1,6}$].

A2 [82%]. *Найдите значение выражения* $-4\log_{11}(11^3)$ [-64 // 3^{-4} // -12 // -1].

A3 [74%]. *Вычислите* $\sqrt[4]{0{,}0625\cdot 81}$ [1,5 // 3,5 // 0,45 // 0,15].

Нормальные простые задачи, проверяющие базовые навыки на примерах, которые можно решить в уме.

A4 [81%]. *На каком из следующих рисунков изображён график функции, возрастающей на промежутке* $[0,2]$?



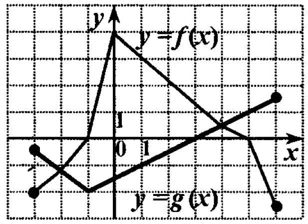
Это менее традиционная для школы формулировка (и возможна путаница, если школьники будут искать промежутки возрастания и убывания и сравнивать их с $[0,2]$), но в целом появление таких задач может быть полезным.

A5 [80%]. *Найдите множество значений функции* $y = 4\cos x$. [$[-1;1]$ // $[-4;4]$ // $(-\infty,+\infty)$ // $[0;4]$].

A6 [69%]. *Найдите область определения функции* $f(x) = 7/(\sqrt[6]{x}-2)$ [$[0;+\infty)$ // $[0;2)\cup(2,+\infty)$ // $(-\infty;32)\cup(32;+\infty)$ // $[0,64)\cup(64,+\infty)$].

Задачи на область определения и область значений функций остались как рудимент попыток обучить школьников общему понятию функции (отображения), но уже стали традиционными и безвредны, если просты (как в данном случае).

A7 [79%]. *На рисунке изображены графики функций* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$, *заданных на промежутке* $[-3, 6]$. *Укажите те значения* x, *для которых выполняется неравенство* $f(x) \geq g(x)$. $[[-1; 5]$ // $[-3; 2] \cup [4; 6]$ // $[-3; -1] \cup [5; 6]$ // $[-2; 4]]$.



Задача не требует ничего, кроме (действительно базового) навыка чтения графиков.

A8 [79%]. *Найдите производную функции* $y = 12x^3 - e^x$. $[y' = 15x^2 - xe^{x-1}$ // $y' = 3x^2 - e^x/(x+1)$ // $y' = 36x^2 - xe^{x-1}$ // $y' = 36x^2 - e^x]$.

Простое упражнение на вычисление производных (другой рудимент математического анализа в школьном курсе) — большого смысла в этих вычислениях нет, но раз они почему-то остались в учебниках, то логично это иметь и в экзаменационном варианте.

A9 [70%]. *Решите уравнение* $\operatorname{tg} 5x = -\sqrt{3}$. $[-\pi/15 + (\pi/5)n, n \in \mathbb{Z}$ // $-5\pi/3 + 5\pi n, n \in \mathbb{Z}$ // $-\pi/15 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ // $-\pi/3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}]$.

Простое (устное) тригонометрическое уравнение.

A10 [40%]. Решите неравенство $\log_{3/4}(2x - 5) > \log_{3/4} x$. $[(2{,}5; 5)$ // $(2{,}5; +\infty)$ // $(5; +\infty)$ // $(= \infty; 5)]$.

В этой задаче вместо стандартного решения (несложного) неравенства можно попробовать угадать ответ, подставив точки, различающие разные варианты ответа, но, может, это даже и к лучшему.

В следующих задачах вариантов ответа не предлагается, а надо записать числовой ответ в виде десятичной дроби.

B1 [68%]. *Решите уравнение* $3^{x+2} = 5 \cdot 3^x = 324$.

Простейшее показательное уравнение без какого-либо подвоха.

B2 [61%]. *Решите уравнение* $3 \cdot 10^{\lg x} = 5x - 11$.

Устная задача, надо только не забыть, что $10^{\lg x} = x$ лишь при $x > 0$.

B3 [39%]. *Найдите значение выражения* $5 \sin(\pi + \alpha) + \cos(\pi/2 + \alpha)$, если $\sin \alpha = 0{,}5$.

Стандартное упражнение на формулы приведения, важно только не начать решать уравнение $\sin \alpha = 0{,}5$ (от чего тоже большой беды не будет, если потом подставить корни в данное выражение).

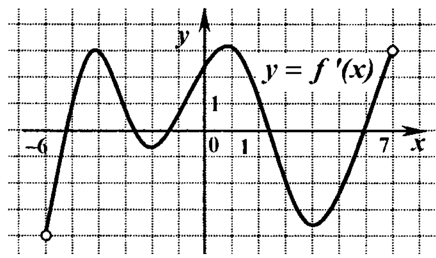
Далее в варианте указано, что начинается «Часть 2». (Для чего нужно разделение на части, которое перемешивается с делением по виду записи ответа, неясно.)

B4 [39%]. Вычислите значение выражения

$$\log_{1/4}\left(\frac{\sqrt{8} - 27}{\sqrt{2} - 3} - 3 \cdot \sqrt{2} + 5\right).$$

Ничего сложного, но требуется некоторая аккуратность с корнями при приведении к общему знаменателю — в уме, видимо, это уже сделать трудно.

B5 [31%]. *Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 7)$. На рисунке изображён график производной этой функции. К графику функции провели все касательные, параллельные прямой $y = 3 - x$ (или совпадающие с ней). Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.*



По существу требуется найти количество точек, в которых производная функции f равна -1, то есть число пересечений графика производной с прямой $y = -1$ (из рисунка видно, что их три).

С какого бодуна в сравнительно нормальном (до сих пор) варианте вдруг попалось это уродство, понять сложно. Математического содержания нет. (Помимо прочего, слова «график функции» в третьем предложении можно отнести и к f, и к f'.)

B6 [25%]. *Найдите количество целочисленных решений неравенства $3-2x-x^2 \geq 0$, удовлетворяющих условию $1 + \operatorname{ctg}^2(\pi x/2) > 0$.*

Формулировка этой задачи приспособлена к условиям тестирования (удобство целого ответа). Нужно решить квадратное неравенство, а затем подставить все его целые решения в условие и выбрать те, где условие выполнено (котангенс определён). Ничего сложного, надо только прочесть и понять условие, не испугавшись некоторой его необычности.

B7 [26%]. *Решите уравнение*

$$25x^2 + 60x + 39 = \left(\sqrt{3} - \cos\frac{5\pi x}{4}\right)\left(\sqrt{3} + \cos\frac{5\pi x}{4}\right).$$

Любимый трюк «вступительных математиков» — надо переписать уравнение в виде $(5x+6)^2+\cos^2(5\pi x/4) = 0$ и убедиться, что при подстановке $x = -6/5$ второе слагаемое тоже обращается в нуль. Довольно убого, но раз уж традиционно такие задачи бывали на вступительных экзаменах, некоторая преемственность полезна.

B8 [26%]. *Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 4. На промежутке $(-6; 2]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно 5 различных корней, а на промежутке $(-2; 0]$ оно имеет ровно 3 различных корня. Сколько корней имеет это уравнение на промежутке $(0; 6]$?*

Здесь проверяется понимание того, что на разных промежутках длиной в период число корней одинаково (или, если угодно, что при сдвиге на период любого отрезка число корней в нём не меняется). В общем, даже неплохо, если только не превратить эту задачу в типовую в будущие годы.

***B9** [18%]. *Для выполнения заказа первый рабочий должен сделать 660 деталей, а второй — 620. При этом первый должен делать на 2 детали в день больше второго и закончить работу на один день раньше второго. Сколько деталей в день должен делать второй рабочий, чтобы заказ был выполнен в срок?*

Простая текстовая задача на квадратное уравнение (из двух целых корней надо оставить один, поскольку другой отрицательный), вот только модальности и сослагательные наклонения неуместны. (Что значит «выполнить в срок»? может быть, второй рабочий должен для этого закончить работу одновременно с первым?) Грамотный автор написал бы проще: первый рабочий сделал 640 деталей, а второй 620, при этом первый делал на 2 детали в день больше и работал на день меньше. Сколько деталей делал в день второй рабочий?

***B10** [8%]. *Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм $ABCD$, в котором $AD = 4\sqrt{2}$, $\angle BCD = 135^\circ$.*

Несложная (и вполне приятная) задача на теорему о трёх перпендикулярах; числа подобраны так, что образуется прямоугольный треугольник со сторонами $3, 4, 5$, так что вычисления простые.

***B11** [12%]. *Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её диагональ равна $2\sqrt{13}$, а средняя линия равна 4.*

Решается простым, но красивым наблюдением: надо увидеть, что диагональ трапеции равна диагонали прямоугольника с той же высотой и той же средней линией (основание).

Далее начинаются задачи, у которых надо записывать решения (ответов недостаточно).

C1 [2/1/0 баллов: 7.9/8.5/83.6%] *Найдите точки минимума функции*

$$f(x) = \left(0{,}6^{\sqrt{0{,}5-x}} - 2x\right)\left(0{,}6^{\sqrt{0{,}5-x}} + 2x\right) + 2x^4 - 0{,}36^{\sqrt{0{,}5-x}}.$$

Чувствуется любовь авторов к формуле разности квадратов (как и в B7). При этом получается $0{,}36^{\sqrt{0{,}5-x}}$, что сокращается с последним членом, и остаётся биквадратный трёхчлен; надо только не забыть отбросить точку, в которой $\sqrt{0{,}5-x}$ не определено.

Искуственно накрученные трудности на пустом месте.

C2 [2/1/0 баллов: 7.7/7.2/85.1%]. *Решите уравнение* $2 - 3x + x^2 = 2(x-1)\sqrt{x}$.

Несложно, надо только выделить в левой части множитель $(x-1)$, а не сразу возводить в квадрат; тогда помимо корня $x = 1$ остаётся простое уравнение с корнем.

Далее авторы объявляют, что наступает «Часть 3» (не отличающаяся по способу записи от предыдущих задач).

C3 [4/3/2/1/0 баллов: 1.5/0.6/0.8/2.0/95.1%]. *Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(-5; -2]$ значение выражения $x^2 - 4|x|$* ***не равно*** *знгачению выражения $a|x| + 4$.*

Традиционная для некоторых вступительных экзаменов «задача с параметром», в которой надо не перепутать, что спрашивается, с дополнительными «накрутками» типа модуля отрицательного числа: речь идёт о том, в каком диапазоне наклонов некоторая прямая не пересекает заданный участок параболы.

***C4** [4/3/2/1/0 баллов: 0.8/0.4/0.3/0.7/97.8%]. *Через центр O данной сферы проведено сечение. Точка F выбрана на сфере, а точки A, B, C, D — последовательно на окружности сечения так, что объём пирамиды $FABCD$ наибольший. Найдите синус угла между прямой AM и плоскостью BFD, если M — середина ребра FB.*

Здесь надо заметить, что четырёхугольник максимальной площади, вписанный в данную окружность — квадрат, а максимально удалённая от сечения точка сферы — точка пересечения перпендикуляра к этому сечению со сферой. Остаются несложные вычисления.

C5 [4/3/2/1/0 баллов: 0.5/0.2/0.3/0.4/98.7%]. *Найдите все корни уравнения* $10x^3 - 63x^2 + 48x - 9 = 0$, *при подстановке каждого из которых в уравнение*

$$(7x - 1{,}1)\sin y + \frac{3}{x} - 9 = (x + 3{,}7)y^2 + \sqrt{\frac{169}{x+1} - 100x^2 + 160x - 169} \cdot \cos 2y,$$

получится уравнение относительно y, *имеющее более одного корня.*

Нет, это не розыгрыш и не пародия на «вступительную математику», а реальный текст задачи. Видимо, комментарии тут излишни.

Оценивая задачи C1–C5, надо иметь в виду их «технологичность» — удобство проверки и возможность установления сколько-нибудь единых критериев выставления баллов. С этой точки зрения задача C2 выглядит наиболее удачно, так как задачи такого вида в школе решают и запись их особенных сложностей не содержит. Задача C1 требует от школьников объяснений про максимум биквадратного трёхчлена (сведение к квадратному) и ограничение на область определения. Ничего особенно сложного тут нет, но при нынешней квалификации школьников и проверяющих, видимо, будет много недоразумений.

Сколько-нибудь единообразно и разумно проверить задачу C3 явно невозможно: вероятность того, что немногие разумные работы школьников попадут к квалифицированным проверяющим, есть бесконечно малая второго порядка. В данном случае проверка только по ответу дала бы более содержательные результаты.

То же самое можно сказать и про задачу C4. Она неудачна тем, что в ней используется достаточно популярный факт (о максимальной площади вписанного четырёхугольника), доказательство которого (особенно без принятия на веру существования максимума) отнюдь не так просто. Поэтому квалифицированный школьник будет тут в недоумении — чего от него ждут. (Остаток рассуждения довольно прост, хотя формы записи таких задач не установлены традицией, и это тоже неудачно.)

5. Заключительные замечания по задачам

- В целом вариант выглядит перегруженным. Было бы желательно, чтобы помимо проверки стандартных навыков у школьников была бы возможность спокойно подумать про решение более сложных задач, а не соревноваться в скорости. Удаление нелепых задач B5, C4, C5 явно улучшило бы вариант во всех отношениях. По оформлению: убрать деление на три части (оставив деление на A,B,C).

- В стандартных задачах желательно большее разнообразие (задачи на дроби и проценты, преобразования выражений, больше текстовых задач и пр.)

- Недостаточно задач по геометрии (которая вообще заслуживает большего места в школьном курсе математики; но даже и нынешнее её место не отражено адекватно).

- Задачи части C не продуманы технологически с точки зрения проверки. Здесь могло бы быть больше геометрических (в первую очередь планиметрических) задач, в том числе на доказательство, так как запись таких задач наиболее проработана и стандартна. С другой стороны, геометрические задачи на «на вычисления» имеет смысл перенести в часть B (проверка по ответу). Задачи по алгебре тут можно давать в том случае, если их решение либо совсем просто, либо традиционно с точки зрения записи. (Пример: можно попросить доказать, что $x^4 + x^2 + x + 1 > 0$ при всех действительных x, или попросить найти $a^3 + 1/a^3$, если $a + 1/a = 5$.)

- Наконец, для отбора среди наиболее продвинутых школьников, можно было бы добавить две-три интересные задачи (типа предлагаемых на олимпиадах и кружках, но не выходящие за рамки школьной программы).

- Можно было бы также использовать простые задачи с нестандартными формулировками и простой проверкой по ответу (скажем, попросить разделить 123 123 123 на 123 или переставить цифры в числе 12491 так, чтобы получившееся число было как можно больше, или ещё что-нибудь в таком роде). Задача B8 вполне может быть отнесена к этому классу; важно только, чтобы эти нестандартные формулировки не стали стандартными, а менялись бы год от года.

Подводя итоги, процедуру проведения экзамена можно оценить на три с минусом (а откровенно говоря — два с плюсом, см. замечания), подбор простых задач на четвёрку с плюсом, задач по геометрии — на твёрдую четвёрку (а задача по планиметрии — отличная); часть C, увы — двойка. В общем, могло быть гораздо хуже, и если организаторы сделают правильные выводы, то есть надежда постепенно сделать этот блин если не вкусным, то хотя бы минимально съедобным.