А. Шень

Логарифм и экспонента

Москва
Издательство МЦНМО
2005

ББК 22.1
Ш47

Шень А.

Ш47 Логарифм и экспонента. — М.: МЦНМО, 2005. — 24 с.: ил.

ISBN 5-94057-187-5

Начиная с рассуждения Галилея о том, что скорость падения тела не может быть пропорциональна пройденному пути, мы приходим к определению логарифма как площади под гиперболой и экспоненты как обратной (к логарифму) функции. Брошюра написана по материалам лекции для школьников 10–11 классов, прочитанной автором по приглашению А. В. Спивака.

ББК 22.1

Оригинал-макет предоставлен автором. Рисунки изготовлены автором в системе MetaPost. Электронная версия книги является свободно распространяемой и доступна по адресу

`ftp://ftp.mccme.ru/users/shen/logarithms.zip`

Александр Шень

Логарифм и экспонента

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 20.12.2004 г.
Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 1,5.
Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

ISBN 5-94057-187-5

1. Закон падения

Выпущенный из рук камень начинает падать. При этом он ускоряется — его скорость растёт по мере падения. Это легко заметить «на глаз». Однако сразу не ясно, по какому закону растёт скорость.

Сейчас мы знаем, что скорость пропорциональна времени падения. Такое движение называют *равноускоренным*, а коэффициент пропорциональности — *ускорением свободного падения*. Оно обозначается буквой g и примерно равно 9,8 метров в секунду за секунду. Это странное выражение означает, что за секунду скорость падающего предмета увеличивается на 9,8 метров в секунду.

Но в эпоху Галилея (до Ньютона с его законами механики) это было вовсе не очевидно, и можно было предполагать самые разные законы движения. Один из законов, которые рассмотрел Галилей, был таким: скорость падающего камня пропорциональна пройденному им пути (в двух метрах от начала падения скорость вдвое больше, чем в одном метре и т.п.).

Однако Галилей обнаружил, что закон этот неправильный. При этом ему даже не потребовалось ставить опыты. Выяснилось, что такой закон не может действовать не только в реальном мире, но и в воображаемом. Нельзя, скажем, сделать компьютерную игру, в которой предметы будут падать по такому закону. А именно, в этой игре падение не сможет начаться за конечное время.

Что это значит и почему так происходит, мы вскоре объясним.

Но раз уж мы заговорили про Галилея, то надо ещё сказать, что именно он открыл — и подтвердил опытами — правильный закон падения (скорость пропорциональна времени падения) и изучил его следствия. В частности, он выяснил, что брошенный под углом камень движется по параболе и что пройденные за равные времена пути (при падении вниз) образуют арифметическую прогрессию.

2. Оценка времени движения

Сейчас мы приведём рассуждение Галилея. Предположим, что скорость пропорциональна пройденному пути. Для удобства будем считать, что она численно равна ему (этого всегда можно добиться, выбирая подходящие единицы измерения времени). Чтобы рисовать было удобнее, будем считать движение горизонтальным.

Итак, пусть предмет движется по прямой слева направо, начиная от точки O, и его скорость равна пройденному пути. Например, в точке 1 (на расстоянии 1 м от точки O) его скорость равна 1 м/с, в точке 2 его скорость равна 2 м/с, и так далее (рис. 1). Мы говорим «метр» и «секунда», потому что надо же как-то называть единицы длины и времени, но, конечно, это не принципиально.

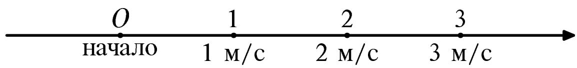

Рис. 1. Скорость численно равна пути.

Зададим себе такой вопрос: сколько времени понадобится, чтобы пройти от точки 1 до точки 2? Для этого надо вспомнить, что скорость есть расстояние, проходимое за единицу времени:

$$\text{скорость} = \frac{\text{путь}}{\text{время}},$$

и потому время получается делением пути на скорость:

$$\text{время} = \frac{\text{путь}}{\text{скорость}}.$$

Если, скажем, вы едете на машине со скоростью 60 км/час, то расстояние в 90 км вы проедете за полтора часа, так как $90/60 = 1{,}5$. При этом мы предполагаем, что движение было равномерным (скорость не менялась).

При неравномерном движении надо различать *среднюю* скорость и *мгновенную* скорость. Если за какой-то час мы проехали 60 км, то средняя скорость движения за этот час была 60 км/ч. При этом движение могло не быть равномерным. Например, пусть за первые полчаса мы проехали 40 км, а за вторые полчаса — оставшиеся 20 км. Тогда на первом участке средняя скорость была 80 км/ч (делим 40 км на 1/2 часа), а на втором — лишь 40 км/ч. Так что, строго говоря, нам следовало бы написать

$$\text{средняя скорость} = \frac{\text{путь}}{\text{время}},$$

а потом добавить, что мгновенная скорость — это средняя скорость за малый промежуток времени. Насколько малый? Настолько, чтобы можно было пренебречь изменениями скорости и считать движение равномерным.

Пример. Пусть на участке шоссе длиной в 90 км минимальная разрешённая скорость равна 60 км/ч, а максимальная — 120 км/час. За какое время можно проехать этот участок, не нарушая правил?

Ответить на этот вопрос легко. Если бы машина всё время ехала с минимальной скоростью (60 км/ч), то ей потребовалось бы $90/60 = 1{,}5$ часа. При максимальной скорости (120 км/ч) она бы проехала эти же 90 км вдвое быстрее, за $90/120 = 3/4$ часа, то есть за 45 минут. Поскольку скорость машины может меняться между минимальной и максимальной скоростями, время движения находится где-то между тремя четвертями часа и полутора часами.

После этого примера вернёмся к нашему вопросу: сколько времени потребуется, чтобы пройти метровый отрезок от точки 1 до точки 2? Скорость при этом возрастает вместе с пройденным расстоянием. В точке 1 она минимальна и равна 1 м/с, а в точке 2 максимальна и равна 2 м/с. Поэтому время заключено где-то между 1 секундой (что соответствует минимальной скорости) и $1/2$ секунды (что соответствует максимальной скорости).

Мы потом увидим, что это время можно найти и точнее, но пока что нам достаточно и этой грубой оценки:

$$\frac{1}{2} \leqslant T(1,2) \leqslant 1.$$

Здесь через $T(1,2)$ мы обозначили время движения от точки 1 до точки 2.

А сколько понадобится времени, чтобы пройти отрезок от точки 2 до точки 4? Длина этого отрезка равна 2, минимальная скорость равна 2 (на левом конце), а максимальная — 4 (на правом). Получаем, что

$$\frac{2}{4} \leqslant T(2,4) \leqslant \frac{2}{2},$$

то есть

$$\frac{1}{2} \leqslant T(2,4) \leqslant 1.$$

На отрезке от 4 до 8 минимальная скорость равна 4, а максимальная — 8, так что снова

$$\frac{1}{2} \leqslant T(4,8) \leqslant 1.$$

Вообще на отрезке от a до $2a$ при произвольном $a > 0$ минимальная скорость равна a, а максимальная равна $2a$. Длина отрезка равна a, поэтому

$$\frac{1}{2} \leqslant T(a,2a) \leqslant 1.$$

При этом число a не обязано быть целым. Например, при $a = 1/2$ мы получаем, что время движения по участку от $1/2$ до 1 не меньше полсекунды и не больше секунды. Это и неудивительно, так как длина участка — полметра, а скорость меняется от $1/2$ метра в секунду до 1 метра в секунду.

После этой подготовки изложим рассуждение Галилея. Разобьём полупрямую с началом в точке O на отрезки точками

$$\ldots,\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ldots$$

(бесконечная в обе стороны геометрическая прогрессия, составленная из степеней двойки).

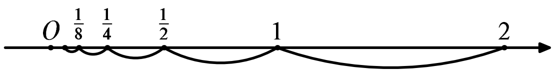

Рис. 2. Каждый отрезок требует полсекунды.

Для каждого из отрезков ($\ldots$, $[1/32,1/16]$, $[1/16,1/8]$, $\ldots$, $[1/2,1]$, $[1,2]$, $[2,4]$, $\ldots$) координата правого конца вдвое больше координаты левого, и при движении по нашему закону (путь численно равен скорости) на каждый отрезок уходит от полсекунды до секунды. Значит, с момента начала движения должно пройти бесконечно много времени, так как на участке от 0 до 1 укладывается бесконечно много отрезков.

Другими словами: от точки 2^{-100} (например) до точки 1 укладывается 100 отрезков, каждый из которых требует по меньшей мере полсекунды. Значит, движение должно начаться по крайней мере за 50 секунд до прохождения точки 1. Но поскольку вместо 100 можно взять любое, сколь угодно большое, число, то получается, что от начала движения должно пройти сколь угодно большое время. То есть движение по такому закону не может начинаться с нуля (из состояния покоя).

3. Более точная оценка

Мы выяснили, что движение не может начаться из состояния покоя, если путь пропорционален времени. Но всё-таки можно ли узнать, сколько при таком законе движения потребуется времени, чтобы пройти путь от точки 1 до точки 2? или от точки 2 до точки 4? Мы знаем, что от полсекунды до секунды, но можно ли сказать точнее?

Оказывается, что можно. Вот как это делается. Рассмотрим движение от 2 до 4 по частям: сначала от 2 до 3, а потом от 3 до 4. Обе половины отрезка имеют длину по метру. В первой половине скорость менялась от 2 до 3 метров в секунду, поэтому время прохождения находится где-то между $1/2$ и $1/3$ секунды. Во второй половине скорость менялась от 3 до 4 метров в секунду, поэтому время прохождения находится между $1/3$ и $1/4$. Таким образом, суммарное время заключено между $1/3+1/4$ и $1/2+1/3$. Сказанное можно записать так:

$$\frac{1}{3} \leqslant T(2,3) \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \leqslant T(3,4) \leqslant \frac{1}{3},$$

и поскольку $T(2,4) = T(2,3) + T(3,4)$, то

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \leqslant T(2,4) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Таким образом, мы уточнили нашу оценку. Раньше мы знали, что $T(2,4)$ находится в интервале от 0,5 до 1, а теперь получили меньший интервал от $1/4 + 1/3 = 0{,}58333\ldots$ до $1/3 + 1/2 = 0{,}83333\ldots$ (длина интервала равна $(1/3 + 1/2) - (1/3 + 1/4) = 1/2 - 1/4 = 1/4$ и уменьшилась вдвое по сравнению с прежней оценкой).

Ровно такую же оценку можно получить и для промежутка от 1 до 2. А именно, мы разбиваем его на две половины: от 1 до $3/2 = 1{,}5$ и от $3/2$ до 2. Обе они имеют длину полметра. В левой половине скорость меняется от 1 до 1,5 метров в секунду, в правой — от 1,5 до 2 метров в секунду. Поэтому время прохождения левой половины заключено между $1/2$ и $(1/2)/(3/2) = 1/3$ секунды, а время прохождения правой — между $(1/2)/(3/2) = 1/3$ и $(1/2)/2 = 1/4$ секунды.

То же самое рассуждение можно повторить для отрезка от a до $2a$ при любом a. Середина отрезка находится в точке $1{,}5a$. Левая половина имеет длину $0{,}5a$ и проходится со скоростью, возрастающей от a до $1{,}5a$, то есть за время $T(a, 1{,}5a)$, для которого

$$\frac{1}{3} = \frac{0{,}5a}{1{,}5a} \leqslant T(a, 1{,}5a) \leqslant \frac{0{,}5a}{a} = \frac{1}{2}.$$

Для правой половины

$$\frac{1}{4} = \frac{0{,}5a}{2a} \leqslant T(1{,}5a, 2a) \leqslant \frac{0{,}5a}{1{,}5a} = \frac{1}{3}.$$

В сумме получаем

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \leqslant T(a, 2a) \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

Неудивительно, что оценка получается одинаковой при любом a. Скажем, отрезок от 2 до 4 вдвое длиннее отрезка от 1 до 2, зато и скорости на соответствующих участках вдвое больше, так что возрастание длины компенсируется возрастанием скорости.

4. Ещё более точная оценка

Можно ещё улучшить точность, разделив отрезок на большее число частей. Пусть частей, скажем, n. Для удобства возьмём отрезок от n до $2n$, тогда он разделится на n отрезков длины 1, и концы отрезков будут целыми числами $(n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1, 2n)$.

На первом отрезке (от n до $n+1$) скорость не меньше n и не больше $n+1$, так что

$$\frac{1}{n+1} \leqslant T(n, n+1) \leqslant \frac{1}{n}.$$

На втором отрезке (от $n+1$ до $n+2$) скорость не меньше $n+1$ и не больше $n+2$, так что

$$\frac{1}{n+2} \leqslant T(n+1, n+2) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

И так далее — для последнего отрезка (от $2n-1$ до $2n$) получим

$$\frac{1}{2n} \leqslant T(2n-1, 2n) \leqslant \frac{1}{2n-1}.$$

Складывая все времена, получаем

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \leqslant T(n, 2n) \leqslant \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}.$$

Мы взяли отрезок от n до $2n$ лишь для удобства. Если разделить любой отрезок от a до $2a$ на n равных частей, получатся те же самые оценки. Скажем, если взять отрезок от 1 до 2, то каждая часть имеет длину $1/n$. Левая из них простирается от 1 до $1+(1/n)=(n+1)/n$. Скорость на ней (численно равная координате) меняется от 1 от $(n+1)/n$, поэтому

$$\frac{1}{n+1}=\frac{1/n}{(n+1)/n} \leqslant T\left(1, 1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1/n}{1}=\frac{1}{n}$$

— та же самая оценка, что и раньше. (Что и неудивительно, ведь длина и скорость уменьшились в n раз, и отношение их осталось прежним.) То же самое получится и для всех следующих отрезков, так что в сумме выйдет та же оценка:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \leqslant T(1,2) \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}.$$

Увеличивая n, мы можем получать всё более точные оценки для $T(1,2)$. Насколько точные? Заметим, что справа и слева стоят одни и те же слагаемые, за двумя исключениями: слева стоит $1/2n$, которого нет справа, а справа есть $1/n$, которого нет слева. Значит, разность между правой и левой частью (между верхней и нижней оценкой) равна

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}.$$

Отсюда видно, что мы можем сблизить оценки сверху и снизу настолько близко, насколько захотим. Например, при $n = 500$ разница между ними будет $1/1000$, так что мы можем найти $T(1,2)$ с ошибкой не более $1/1000$, надо только сложить пятьсот слагаемых. Современные компьютеры позволяют сделать это почти что мгновенно, но вручную это дело нелёгкое.

Помимо практического (хотя и не очень практичного — есть гораздо более быстрые) способа вычисления $T(1,2)$, из наших рассуждений можно извлечь и теоретическое следствие. А именно, мы по существу уже доказали, что

$$T(1,2) = T(a,2a)$$

при любом a. В самом деле, сделанные нами оценки годятся для любого a и показывают, что оба этих числа заключены между

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \quad \text{и} \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1},$$

то есть попадают в один и тот же отрезок длины $1/2n$. Значит, разница между $T(1,2)$ и $T(a,2a)$ не превосходит $1/2n$. Взяв $n = 500$, видим, что эта разница не больше одной тысячной. Взяв $n = 500\,000$, видим, что она не больше одной миллионной. Поскольку число n можно взять сколь угодно большим, то этой разницы должно не быть вовсе.

5. Отступление: аксиома Архимеда

Бдительные любители строгости должны в этот момент взволноваться и спросить: а почему? Мы знаем, что наша разница (обозначим её d) меньше одной сотой, одной тысячной, одной миллионной и вообще меньше $1/n$ при любом натуральном n. Но почему отсюда следует, что $d = 0$? Можно ли это строго доказать?

Вопрос этот не такой простой — что значит «строго доказать»? В геометрии доказать — значит вывести из аксиом, но каковы эти аксиомы? Ещё в древней Греции было сформулировано такое утверждение:

> *какой бы ни взять отрезок X и меньший его отрезок x, можно отложить меньший отрезок столько раз, что он станет длиннее большего.*

Это утверждение (рис. 3) теперь принято называть *аксиомой Архимеда* по имени великого древнегреческого математика и механика Архимеда, хотя он не первый, кто эту аксиому применял.

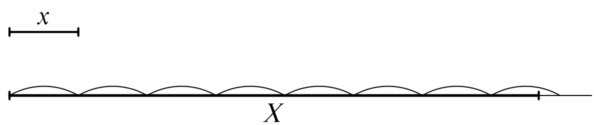

Рис. 3. Аксиома Архимеда.

Другими словами, какое бы положительное число X и какое бы меньшее положительное x ни взять, всегда будет

$$x + x + x + \ldots + x > X,$$

если только взять достаточное число слагаемых: найдётся такое натуральное n, что $nx > X$. Взяв $X = 1$, заключаем, что для любого $x > 0$ найдётся такое натуральное n, что

$$nx > 1, \quad \text{то есть} \quad x > \frac{1}{n}.$$

(Мы опускаем оговорку $x < X$, так как при $x \geqslant 1$ достаточно взять $n = 1$ или $n = 2$.)

Поэтому как бы ни было мало расстояние между $T(1, 2)$ и $T(a, 2a)$ — если только оно не нулевое, — всегда найдётся n, при котором это расстояние больше $1/n$. А поскольку, как мы доказали, такого n не найдётся, это расстояние равно нулю.

Доказательство, конечно, странноватое: по существу мы объявили используемое нами утверждение аксиомой. Бывают другие аксиоматические построения математики, при которых «аксиому Архимеда» можно доказать (то есть вывести из других аксиом). Но вопрос о построении теории действительных чисел (длин отрезков) совсем не прост. Как вы думаете, например, числа 0,19999... (девятка в периоде) и 0,20000... (нуль в периоде) — это одно и то же число или разные? И если разные, то чему равна разность между ними? И чему равно их среднее арифметическое (полусумма)?

6. Площадь под гиперболой

Вернёмся к нашему закону движения. Мы теперь умеем вычислять $T(1,2)$ (время движения от точки 1 до точки 2) с любой заданной точностью при помощи неравенства

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\leqslant T(1,2)\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}.$$

Сейчас мы выясним геометрический смысл величины $T(1,2)$. Оказывается, что она равна площади под графиком гиперболы между вертикалями $x=1$ и $x=2$ (серая область на рис. 4).

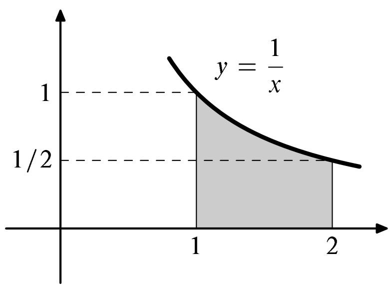

Рис. 4. Площадь серой области равна $T(1,2)$.

Так что можно даже найти $T(1,2)$ с помощью взвешивания: надо нарисовать на однородной фанерке график гиперболы $y=1/x$, затем выпилить участок между $x=1$ и $x=2$, как на рисунке, а потом взвесить (и поделить на вес квадрата 1×1 в том же масштабе).

Будем обозначать площадь под гиперболой между вертикалями $x = a$ и $x = b$ через $S(a, b)$. Оказывается, что

$$\boxed{S(a, b) = T(a, b)}$$

при любых a и b. Как и раньше, для начала мы рассмотрим случай $a = 1$, $b = 2$.

Вспомним, что мы начинали с неравенства

$$\frac{1}{2} \leqslant T(1, 2) \leqslant 1.$$

Как доказать для S аналогичное неравенство

$$\frac{1}{2} \leqslant S(1, 2) \leqslant 1,$$

глядя на наш рисунок? Совсем просто: надо заметить, что интересующая нас область (как говорят, «криволинейная трапеция») целиком помещается в квадрате 1×1 и содержит внутри себя прямоугольник ширины 1 и высоты $1/2$ (рис. 5).

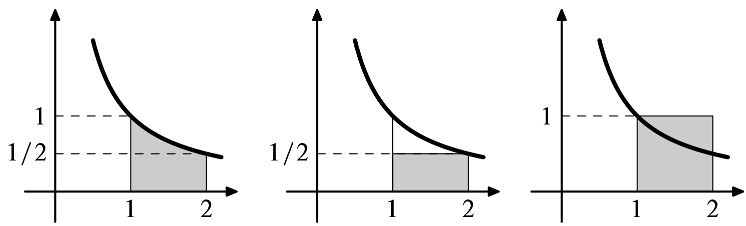

Рис. 5. Нижняя и верхняя оценки площади.

Как мы получали более точные оценки для времени? Делили отрезок на части. Здесь можно поступить точно так же и сравнить криволинейную трапецию с двумя ступенчатыми фигурами (рис. 6).

Надо только найти площади этих фигур. Ширина каждого из прямоугольников, их составляющих, равна $1/2$. Высоты прямоугольников равны 1, $2/3$ и $1/2$ (поскольку при $x = 3/2$ значение $y = 1/x$ равно $2/3$). В итоге получаем нижнюю оценку

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

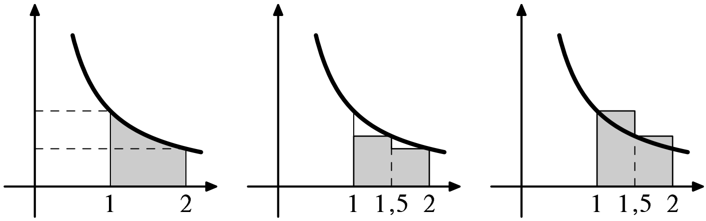

Рис. 6. Более точные оценки.

и верхнюю оценку

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

Ровно такие же оценки были для $T(1,2)$, и это не случайно.

Вспомним, как мы оценивали время движения от точки u до точки v, большей u. Длина отрезка равна $v-u$. Скорость растёт от u до v. Поэтому

$$\frac{v-u}{v}\leqslant T(u,v)\leqslant\frac{v-u}{u}.$$

Аналогичная оценка для $S(u,v)$ заключает криволинейную трапецию между двумя прямоугольниками (рис. 7):

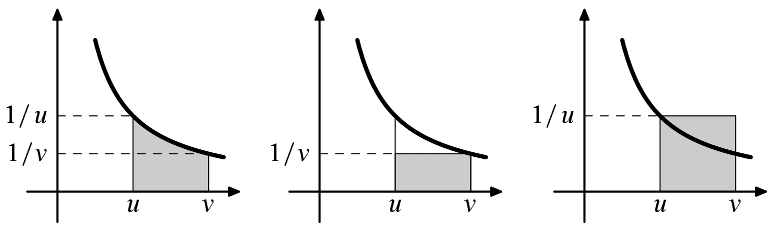

Рис. 7. Нижняя и верхняя оценки для $S(u,v)$.

Ширины этих прямоугольников одинаковы и равны $v-u$, а высоты равны $1/u$ (для большего) и $1/v$ (для меньшего). Поэтому для $S(u,v)$ получаем оценку

$$(v-u)\cdot\frac{1}{v}\leqslant S(u,v)\leqslant(v-u)\cdot\frac{1}{u}$$

— ту же самую, что и для $T(u,v)$.

Поэтому все наши оценки для T годятся и для S. В частности, для $S(1,2)$ получаем оценку

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\leqslant S(1,2)\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1},$$

заключающую число $S(1,2)$ в тот же промежуток длины $1/2n$, что и $T(1,2)$. Поэтому разница между $S(1,2)$ и $T(1,2)$ меньше $1/2n$ при всех n. Вспоминая наши рассуждения про аксиому Архимеда, заключаем отсюда, что $S(1,2)=T(1,2)$.

Аналогичное рассуждение показывает, что $S(a,b)=T(a,b)$ при любых a и b, как мы и обещали.

7. Свойства площади под гиперболой

Докажем два важных свойства площади под гиперболой.

Свойство 1. Если $a<b<c$, то

$$\boxed{S(a,b)+S(b,c)=S(a,c)}$$

В общем, тут и доказывать нечего: на картинке видно, что площадь $S(a,c)$ составлена из двух частей $S(a,b)$ и $S(b,c)$ (рис. 8).

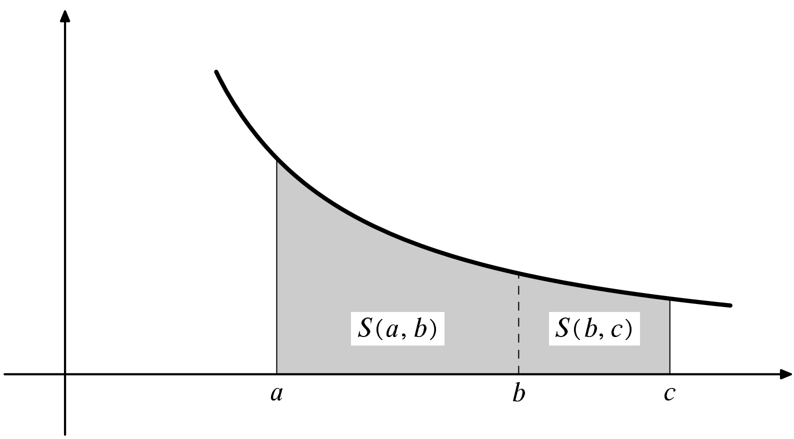

Рис. 8. Сложение площадей.

Свойство 2. Для любого числа $k > 0$ и любых чисел a, b (где $a < b$) выполняется равенство

$$\boxed{S(a, b) = S(ka, kb)}$$

Это свойство нам уже знакомо для T: мы видели, что $T(1, 2)$ равно $T(k, 2k)$. Для площадей его можно объяснить так. Нарисуем наш график на резиновой плёнке и растянем эту плёнку в k раз по горизонтали. Вот что получится, например, при $a = 1$, $b = 2$ и $k = 2$ (рис. 9, который надо сравнить с той же картинкой до растяжения на рис. 4):

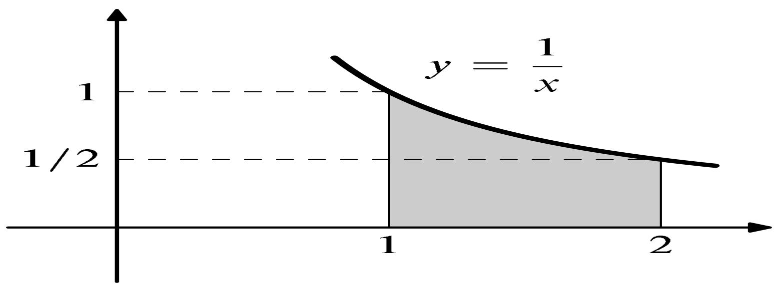

Рис. 9. Растяжение по горизонтали в два раза.

Для дополнительного реализма мы растянули даже и надписи на графике. Конечно, после растяжения эти надписи утратили силу: точка 1 на оси x при растяжении переместилась в точку 2, а точка 2 — в точку 4. При этом ординаты точек графика не изменились, так что он перестал быть графиком $y = 1/x$, а стал графиком

$$y = \frac{1}{\text{старое } x \text{ (до растяжения)}} = \frac{1}{x/2} = \frac{2}{x}.$$

Растянутый график с правильными пометками показан на рис. 10.

При растяжении площадь увеличилась вдвое (поскольку ширины всех прямоугольников удвоились, а высоты остались прежними). Если теперь сжать график по высоте вдвое, как на рис. 11, то площадь уменьшится вдвое, то есть до прежнего значения. При этом пометки вновь испортятся: на оси y надо 1 заменить на $1/2$, а $1/2$ — на $1/4$; все ординаты точек графика уполовинятся, так что мы вернёмся от графика $y = 2/x$ снова к $y = 1/x$.

В итоге мы видим, что $S(2, 4)$ получается из $S(1, 2)$ двукратным растяжением по горизонтали и двукратным сжатием по вертикали. При этом

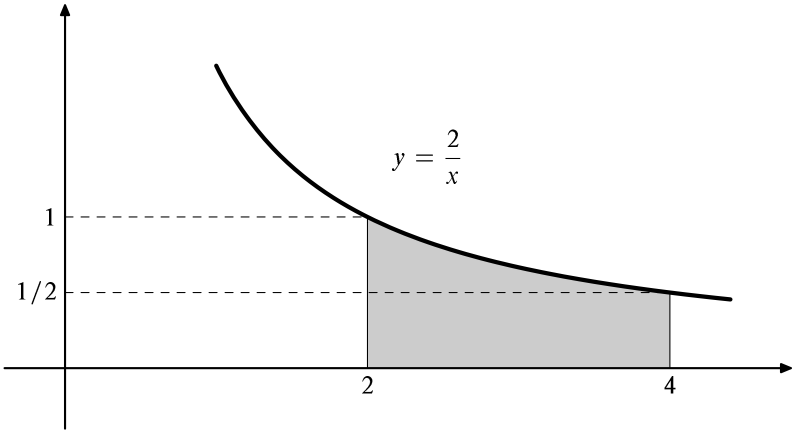

Рис. 10. Пометки исправлены.

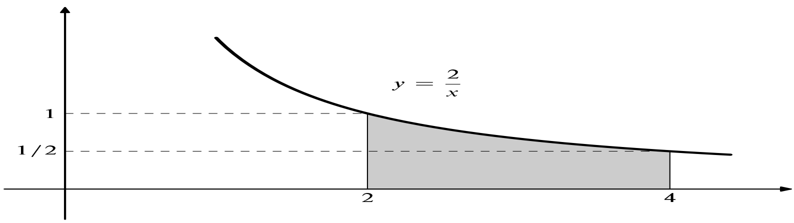

Рис. 11. Сжатие по вертикали.

увеличение площади при растяжении в точности компенсируется её уменьшением при сжатии, так что $S(2,4) = S(1,2)$.

В общем случае, растянув плёнку в k раз по горизонтали и сжав её в k раз по вертикали, мы из $S(a,b)$ получим $S(ka,kb)$. Заметим, что наш график (который можно записать уравнением $xy = 1$) при таком растяжении-сжатии останется неизменным, так как один сомножитель произведения xy увеличится в k раз, а другой во столько же раз уменьшится.

Свойство 2 доказано.

Из этого свойства вытекает, что $S(a,b)$ на самом деле зависит лишь от отношения b/a. В самом деле, положив $k = \frac{1}{a}$, мы получаем, что

$$S(a, b) = S\left(\tfrac{1}{a} \cdot a, \tfrac{1}{a} \cdot b\right) = S\left(1, \tfrac{b}{a}\right).$$

В частности,

$$S(1, k) = S(k, k^2) = S(k^2, k^3) = \ldots$$

при любом $k > 1$. Другими словами, что если мы нашинкуем область под графиком $y = 1/x$ на полоски, проведя разрезы при $x = 1, k, k^2, k^3, \ldots$ (рис. 12), то все полоски будут иметь одинаковую площадь: увеличение ширины (каждая полоска в k раз шире предыдущей) компенсируется уменьшением высоты.

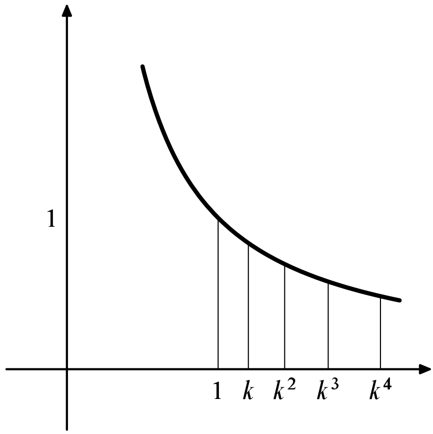

Рис. 12. Полоски равной площади.

8. Натуральный логарифм

Назовём *натуральным логарифмом* числа a величину $S(1, a)$, то есть площадь криволинейной трапеции под графиком гиперболы $y = 1/x$ между прямыми $x = 1$ и $x = a$ (рис. 13). Натуральный логарифм числа a обозначается $\ln a$.

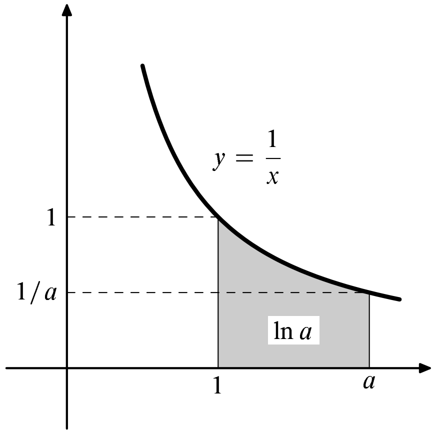

Рис. 13. Натуральный логарифм числа a.

Отступление о логарифмах

Вообще-то в школе определяют логарифм по какому-то основанию. Логарифм по основанию c обозначается $\log_c$ и определяется по формуле

$$\log_c c^x = x.$$

Например, $\log_{10} 100 = 2$, так как $100 = 10^2$. Для тех, кто про это уже слышал, мы объясним (в следующих разделах), что натуральный логарифм есть действительно логарифм по некоторому основанию. Это основание обозначают буквой e и называют — как? Правильно, *основанием натуральных логарифмов.* Оказывается, что оно равно

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

Мнемоническое правило: сначала два и семь, потом дважды год рождения Льва Толстого (1828), а затем углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

Но если вы про логарифмы ничего не знаете, тоже не страшно — считайте сказанное нами определением натурального логарифма и спите спокойно. (Конец отступления.)

Как выразить $S(a, b)$ через логарифмы? Это можно сделать двумя способами. Пусть $1 < a < b$.

Первый способ. По свойству 1

$$S(1, b) = S(1, a) + S(a, b),$$

то есть

$$\ln b = \ln a + S(a, b),$$

откуда

$$S(a, b) = \ln b - \ln a.$$

Второй способ. Из свойства 2, как мы видели, следует, что

$$S(a, b) = S\big(1, \tfrac{b}{a}\big) = \ln\big(\tfrac{b}{a}\big).$$

Эти два способа, естественно, должны давать один и тот же результат, так что

$$\ln\big(\tfrac{b}{a}\big) = \ln b - \ln a$$

при $1 < a < b$. Обозначим отношение b/a через c. Тогда $b = ac$, и получается

$$\ln c = \ln(ac) - \ln a$$

или, что то же самое,

$$\ln(ac) = \ln a + \ln c.$$

Это самое главное свойство логарифмов, так что мы его обведём в рамку:

$$\boxed{\text{логарифм произведения равен сумме логарифмов}}$$

Заметим, что мы доказали его (и вообще определили логарифм) только для чисел, больших единицы — ведь $S(a, b)$ было определено лишь при $a < b$.

Из этого свойства следует, что

$$\ln a^2 = \ln(a \cdot a) = \ln a + \ln a = 2 \ln a,$$

затем

$$\ln a^3 = \ln(a^2 \cdot a) = \ln a^2 + \ln a = 2 \ln a + \ln a = 3 \ln a$$

и вообще

$$\boxed{\ln a^n = n \ln a}$$

при любом $n = 1, 2, 3, \ldots$

Отступление: логарифмы чисел, меньших единицы

Естественно положить $S(a, a)$ равным нулю (криволинейная трапеция вырождается в отрезок). Но как определить $S(a, b)$ при $b < a$?

Формально это определение (как и любое математическое определение) может быть произвольным. Но в математике произвол ограничивается здравым смыслом. В данном случае здравый смысл подсказывает, что свойство

$$S(a, c) = S(a, b) + S(b, c)$$

хорошо бы сохранить для любых a, b, c, независимо от того, в каком порядке они расположены на прямой. В частности, при $a = c$ это свойство превращается в

$$S(a, a) = S(a, b) + S(b, a).$$

Мы уже договорились, что $S(a, a) = 0$, поэтому $S(a, b)$ и $S(b, a)$ должны быть противоположными числами. Так что надо положить

$$S(a, b) = -S(b, a) \quad \text{при } b < a.$$

Несложно проверить, что при таком определении действительно выполняется равенство $S(a, c) = S(a, b) + S(b, c)$, в каком бы порядке ни шли числа a, b, c. (Несложно-то несложно, но довольно хлопотно: есть шесть возможных порядков $a \leqslant b \leqslant c$, $a \leqslant c \leqslant b$, $b \leqslant a \leqslant c$, $b \leqslant c \leqslant a$, $c \leqslant a \leqslant b$ и $c \leqslant b \leqslant a$, и все их надо разобрать.)

В частности, при таком определении $S(a, b)$ получаем, что $\ln 1 = S(1, 1) = 0$. А при $0 < a < 1$ получаем, что

$$\ln a = S(1, a) = -S(a, 1)$$

по нашему соглашению, а

$$S(a, 1) = S\left(1, \tfrac{1}{a}\right)$$

по второму свойству площадей под гиперболой. Таким образом,

$$\ln a = -\ln \tfrac{1}{a}$$

при $0 < a < 1$. При этом, как можно проверить, формула для логарифма произведения сохраняется и для чисел, меньших единицы.

Любопытному читателю самое время спросить: а можно ли как-нибудь разумно определить логарифмы отрицательных чисел? Оказывается, что можно, но для этого нужны так называемые комплексные числа, и об этом мы говорить не будем. (Конец отступления.)

Историческое отступление

Основное свойство логарифмов позволяет быстро перемножать числа с помощью таблицы логарифмов. Вернее, умножение сводится к одному сложению и трём поискам в таблице логарифмов. Сейчас, когда есть калькуляторы, это никому не нужно, но раньше умножали в столбик. Кто умеет это делать, знает, что для многозначных чисел это довольно хлопотно (гораздо сложнее, чем складывать). Поэтому замена умножения на сложение имела вполне практический смысл и ускоряла вычисления в несколько раз.

Объясним, как это делается. Пусть нам нужно перемножить два числа a и b. Найдём в таблице их логарифмы $\ln a$ и $\ln b$. Сложим их; получится некоторое число. Мы знаем, что это число равно логарифму произведения ab. Поэтому, если теперь посмотреть таблицу логарифмов «справа налево» (как поступают с меню небогатые люди в дорогих ресторанах) и найти там число, у которого логарифм равен $\ln a + \ln b$, то это число как раз и будет произведением ab.

Ещё больший выигрыш можно получить для деления (которое соответствует вычитанию логарифмов). Ведь делить уголком сложнее, чем умножать в столбик. (Кстати, умеете ли вы делить уголком? Разделите 123 123 123 на 123 и проверьте результат умножением.)

Наконец, тот же метод можно применить для извлечения квадратных корней, поскольку извлечение квадратного корня соответствует делению логарифма пополам. В самом деле, $a = (\sqrt{a})^2$, поэтому $\ln a = 2\ln\sqrt{a}$ и $\ln\sqrt{a} = (\ln a)/2$. (Аналогичный метод годится для корней любой степени.)

Эти приёмы вычислений изобрёл шотландец Непер в начале XVII века; он же составил первую таблицу натуральных логарифмов (точнее, у него были не совсем логарифмы, а нечто очень близкое). (Конец отступления.)

9. Число e

По определению это число, натуральный логарифм которого равен единице:

$$\ln e = 1.$$

Другими словами, $S(1, e) = 1$ — от графика под гиперболой надо отрезать столько, чтобы площадь получилась единичной (рис. 14).

(Отсюда следует, что $\ln e^n = n\ln e = n$, так что наше определение натурального логарифма согласуется с школьным определением логарифма по основанию e.)

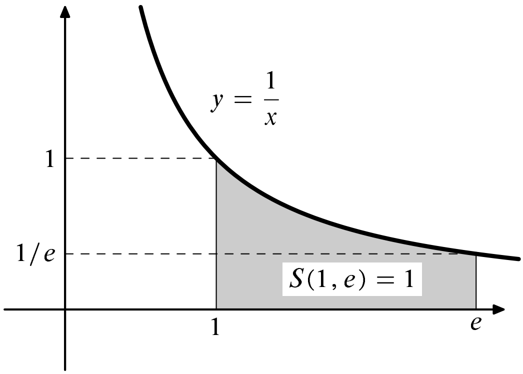

Рис. 14. $\ln e = S(1, e) = 1$.

Чему равно число e? Где надо провести такой разрез? Мы знаем, что $S(1,2) < 1$, так что в точке 2 его проводить рано. С другой стороны, $S(1,2) > 1/2$, так что

$$S(1,4) = S(1,2) + S(2,4) = S(1,2) + S(1,2) > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

так что в точке 4 такой разрез проводить поздно. Отсюда заключаем, что e находится где-то между 2 и 4.

Более точную оценку даёт такая теорема:

$$\boxed{\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

Например, при $n = 10$ получаем, что e находится между $1{,}1^{10}$ и $1{,}1^{11}$, то есть между 2,59... и 2,85... При $n = 100$ получаем более тесные границы: между $1{,}01^{100} = 2{,}701\ldots$ и $1{,}01^{101} = 2{,}738\ldots$ Можно заметить, что правая граница в этой теореме больше левой в $(1 + 1/n)$ раз, поэтому с ростом n разница между ними становится сколь угодно малой.

Докажем сформулированную теорему. Для этого рассмотрим значение $\ln(1+1/n)$, то есть площадь криволинейной трапеции ширины $1/n$ (от $x = 1$ до $x = 1 + 1/n$), показанной на рис. 15.

Эта трапеция заключена между прямоугольниками, ширина которых $1/n$, а высота равна 1 для большего и $n/(n+1)$ для меньшего. Их площади равны $1/n$ (больший) и $1/(n+1)$ (меньший), так что

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$$

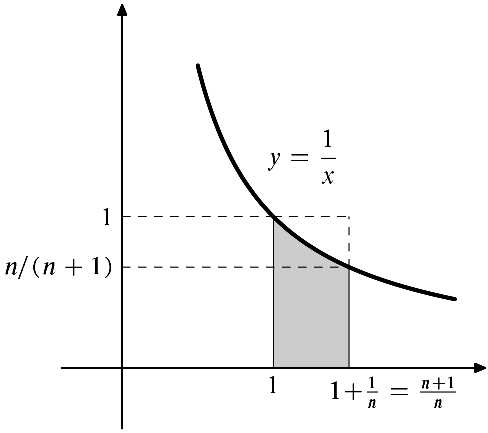

Рис. 15. Оценка для $\ln(1 + 1/n)$.

и

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Умножим первое неравенство на n и получим

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant 1.$$

Но по свойству логарифма степени левую часть можно записать как

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

И это меньше единицы, значит, число

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

не доходит до e (раз площадь до него меньше единицы). Аналогичным образом второе неравенство после умножения на $(n + 1)$ даёт

$$(n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 1,$$

то есть

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant 1,$$

поэтому число

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

не меньше e, что и требовалось доказать.

В заключение приведём ещё несколько формул, которые доказываются в курсах математического анализа:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, а бесконечная сумма понимается так: с ростом количества слагаемых в правой части погрешность формулы становится сколь угодно малой;

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \ldots$$

и вообще

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots;$$

для логарифма есть формула

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

справедливая при $|x| < 1$; при $x = 1$ эта формула тоже верна:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Последнюю формулу несложно доказать, исходя из равенства

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots \frac{1}{2n}.$$

и принятого нами определения логарифма как площади.

(Добавлено при вёрстке.) Ещё любопытно, что натуральный логарифм числа x можно приближённо вычислить, даже если на калькуляторе нет такой кнопки, но есть кнопка извлечения квадратного корня: надо десять раз нажать на эту кнопку, из результата вычесть единицу, а разность умножить на 1024. (Сообщил И. В. Ященко.) Попробуйте объяснить, почему этот способ работает, если число x не слишком большое и не слишком близко к нулю.