$S_X$, причем $\mathrm{rg} S_X \geq 6$. Это подтверждает гипотезу, высказанную авторами ([6]), что такой изоморфизм всегда имеет место.

В заключение автор благодарит Э.Б. Винберга и И.Р. Шафаревича за полезные обсуждения.

Замечание. Как сообщил автору Э.Б. Винберг, ему удалось описать множество решеток из $\mathscr{F}^4$. Оно также оказалось конечным. Таким образом, остается открытым только описание $\mathscr{F}^3$, так как описание $\mathscr{F}^1$, $\mathscr{F}^2$ просто и хорошо известно (см. ([6])).

Специализированная школа-интернат № 18
при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова

Поступило
7 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. Бурбаки*, Группы и алгебры Ли, гл. IV–VI, М., "Мир", 1972. [2] *Э.Б. Винберг*, Матем. сб., т. 72, 471 (1967). [3] *Э.Б. Винберг*, Функц. анализ и его прилож., т. 6, 2, 25 (1972). [4] *В.В. Никулин*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 43, 111 (1979). [5] *А.Н. Рудаков, И.Р. Шафаревич*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 42, 4, 848 (1978). [6] *И.И. Пятецкий-Шапиро, И.Р. Шафаревич*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 35, 3, 530 (1971).

УДК 517.11

МАТЕМАТИКА

А.Х. ШЕНЬ

# МЕТОД ПРИОРИТЕТА И ПРОБЛЕМЫ ОТДЕЛЕНИЯ

*(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 13 III 1979)*

В теории рекурсивных функций известен метод приоритета (см., например, раздел "Метод приоритета" в ([1])). С его помощью можно построить много объектов указанной теории. Попытка общей формулировки метода приоритета была предпринята А. Лахланом ([2]). В настоящей статье на основе анализа имеющихся применений метода приоритета и подхода Лахлана ([2]) формулируется понятие приоритетно-замкнутого класса требований; при этом конкретные применения метода приоритета оказывается возможным свести к проверке того, что все требования, предъявляемые к искомому объекту, принадлежат приоритетно-замкнутому классу, определяемому с помощью некоторой игры. Тем самым подход Лахлана получает новую (игровую) интерпретацию; появляется возможность сравнительно просто изложить полученные автором результаты о рекурсивно-неотделимых множествах.

1. Четверку $S = \langle M, U, R, T\rangle$ назовем ситуацией, если $M$, $U$ – некоторые множества, $R \subseteq M \times M$, $T \subseteq M \times U$ и $T \neq \phi$. Элементы множества $M$ назовем индивидами, элементы $U$ – указаниями. Будем читать $R(m_1, m_2)$ как "$m_1$ может следовать за $m_2$", $T(m, u)$ – как "$m$ согласован с $u$". Пусть $N$ – натуральный ряд. Под конечными множествами будем подразумевать конечные подмножества $N$.

Приведем два примера ситуаций. 1). Пусть индивиды суть конечные множества, указания – пары непересекающихся конечных множеств,

$$R(A, B) \Leftrightarrow (B \subseteq A), \qquad T(A, \langle A^+, A^-\rangle) \Leftrightarrow (A^+ \subseteq A \subseteq N \setminus A^-).$$

Эту ситуацию обозначим $S_{+-}$.

2) Пусть $a(n)$ — вычислимый пересчет без повторений перечислимого неразрешимого множества $A$. Пусть индивиды суть конечные последовательности 0 и 1. При этом $R(m, n) \Leftrightarrow$ "$n$ — собственное начало $m$". Каждому индивиду $m = m(0)\ldots m(k)$ сопоставим множества $A^0(m)$ и $A^1(m)$ так: $A^i(m) = \{a(s) \mid m(s) = i\}$. Указаниями будем считать пары $\langle C^0, C^1 \rangle$ непересекающихся конечных множеств; при этом

$$T(m, \langle C^0, C^1 \rangle) \Leftrightarrow (A^0(m) \cap C^0 = A^1(m) \cap C^1 = \phi).$$

Эту ситуацию обозначим $S^A_{01}$.

2. Пусть задана некоторая ситуация $S$. Будем говорить, что указание $u$ не слабее указания $v$ в ситуации $S$, если всякий согласованный с $u$ индивид этой ситуации согласован с $v$. Последовательность $m_0 m_1 \ldots$ индивидов ситуации $S$ назовем правильной, если верно $\forall i \; R(m_{i+1}, m_i)$. Множество правильных последовательностей назовем условием, если оно замкнуто относительно добавления начального куска, не нарушающего правильности. Вместо "$x$ принадлежит $\alpha$" будем говорить "$x$ удовлетворяет условию $\alpha$". Всякую пару вида $\langle S, \alpha \rangle$, где $S$ — ситуация, а $\alpha$ — условие в ситуации $S$, будем называть требованием. Требование $\langle S, \alpha \rangle$ будем называть ослаблением требования $\langle S, \beta \rangle$, если $\beta \subseteq \alpha$. Конъюнкцией требований $\langle S, \alpha \rangle$ и $\langle S, \beta \rangle$ будем называть требование $\langle S, \alpha \cap \beta \rangle$.

Пусть $S_1$ и $S_2$ — ситуации. Определим ситуацию $S_1 \times S_2$. Ее индивидами (указаниями) будут пары индивидов (соответственно указаний) ситуаций $S_1$ и $S_2$; отношения $R$ и $T$ определим покомпонентно. Пусть $\alpha$ — условие в $S_1$. Определим условие $\alpha \times S_2$ в ситуации $S_1 \times S_2$. А именно, будем говорить, что последовательность индивидов ситуации $S_1 \times S_2$ удовлетворяет условию $\alpha \times S_2$, если последовательность их первых компонент удовлетворяет $\alpha$. Полученное требование $\langle S_1 \times S_2, \alpha \times S_2 \rangle$ будем называть произведением требования $\langle S_1, \alpha \rangle$ и ситуации $S_2$. Аналогично определим произведение ситуации $S_1$ и требования $\langle S_2, \alpha \rangle$.

Класс требований $K$ назовем приоритетно-замкнутым, если выполнены условия:

1) ослабление всякого требования из $K$ принадлежит $K$;

2) конъюнкция любых двух требований из $K$ принадлежит $K$;

3) если $\langle S_1, \alpha \rangle \in K$, а $S_2$ — ситуация, то $\langle S_1, \alpha \rangle \times S_2$ и $S_2 \times \langle S_1, \alpha \rangle$ принадлежат $K$;

4) если $\langle S, \alpha \rangle$ — требование из $K$, то $\alpha \neq \phi$.

3. Каждому требованию $\langle S, \alpha \rangle$ сопоставим следующую игру между Белыми (*Б*) и Черными (*Ч*). Начиная игру, *Б* выбирают некоторое указание $u_0$ ситуации $S$ и индивид $m_0$ ситуации $S$, согласованный с $u_0$ (т.е. верно $T(m_0, u_0)$). Ответным ходом *Ч* выбирают некоторое указание $u_1$, которое должно быть не слабее $u_0$. На это *Б* отвечают индивидом $m_1$, который может следовать за $m_0$ (т.е. верно $R(m_1, m_0)$) и согласован с $u_1$. Далее *Ч* дают указание $u_2$, которое должно быть не слабее $u_0$ (но не обязано быть не слабее $u_1$), *Б* отвечают индивидом $m_2$, который согласован с $u_2$ и может следовать за $m_1$. И так далее (игра продолжается неограниченно). В данной партии выигрывают *Ч*, если выполнены условия:

1) у *Б* не происходит пата (всегда есть возможность хода с соблюдением правил);

2) возникающая в ходе партии правильная последовательность удовлетворяет условию $\alpha$;

3) начиная с некоторого места, указания не меняются.

Требование $\langle S, \alpha \rangle$ назовем приоритетным, если соответствующая игра имеет выигрышную стратегию для *Ч*. Через $K_п$ обозначем класс всех приоритетных требований. Требование $\langle S, \alpha \rangle$ назовем счетно-приоритетным, если существуют такие приоритетные требования $\langle S, \alpha_0\rangle$, $\langle S, \alpha_1\rangle, \ldots$, что $\alpha = \cap\alpha_i$. Через $K_{\omega\text{п}}$ обозначим класс всех счетно-приоритетных требований. Ситуацию $S = \langle M, U, R, T\rangle$ назовем конструктивной, если $M$ и $U$ суть пространства в смысле ([1]), а отношения $R$ и $T$ разрешимы. Требование $\langle S, \alpha\rangle$ назовем вычислимо-приоритетным, если ситуация $S$ конструктивна, а игра, соответствующая $\langle S, \alpha\rangle$, имеет вычислимую выигрышную стратегию для $Ч$. Требование $\langle S, \alpha\rangle$ назовем слабо-вычислимо-приоритетным, если эта игра имеет вычислимую стратегию для $Ч$, гарантирующую их выигрыш в тех партиях, где последовательность индивидов вычислима. Класс всех вычислимо-приоритетных требований обозначим $K_{\text{вп}}$, класс всех слабо-вычислимо-приоритетных требований – $K_{\text{свп}}$. Требование $\langle S, \alpha\rangle$ назовем счетно-вычислимо-приоритетным, если ситуация $S$ конструктивна и существуют такие вычислимо-приоритетные требования $\langle S, \alpha_0\rangle$, $\langle S, \alpha_1\rangle, \ldots$, что $\alpha = \cap\alpha_i$ и стратегия для $Ч$, выигрывающая $\langle S, \alpha_i\rangle$-игру, может быть эффективно получена по $i$. Заменив в предыдущей фразе вычислимо-приоритетные требования на слабо-вычислимо-приоритетные требования, получим определение счетно-слабо-вычислимо-приоритетного требования. Классы всех счетно-вычислимо-приоритетных требований и всех счетно-слабо-вычислимо-приоритетных требований обозначим соответственно $K_{\omega\text{вп}}$ и $K_{\omega\text{свп}}$. Имеют место очевидные включения

$$K_{\text{п}} \subseteq K_{\omega\text{п}}, \quad K_{\text{вп}} \subseteq K_{\omega\text{вп}}, \quad K_{\text{свп}} \subseteq K_{\omega\text{свп}}, \quad K_{\text{вп}} \subseteq K_{\text{п}}, \quad K_{\omega\text{вп}} \subseteq K_{\omega\text{п}},$$
$$K_{\text{вп}} \subseteq K_{\text{свп}}, \quad K_{\omega\text{вп}} \subseteq K_{\omega\text{свп}}.$$

Теорема 1. *Классы $K_{\text{п}}$, $K_{\omega\text{п}}$, $K_{\omega\text{свп}}$ являются приоритетно-замкнутыми. Если $\langle S, \alpha\rangle \in K_{\omega\text{свп}}$, то существует вычислимая последовательность, удовлетворяющая $\alpha$.*

Доказательство этой и следующих теорем опущены из-за ограниченности объема.

Замечание. Теорема остается верной, если вместо $K_{\omega\text{свп}}$ рассматривать $K_{\text{вп}}$, $K_{\omega\text{вп}}$ или $K_{\text{свп}}$.

4. Доказательства некоторых известных результатов с помощью введенных понятий проходят по следующей схеме. Выбираем некоторые требования и устанавливаем, что они принадлежат одному из введенных классов. Далее рассматриваем некоторую комбинацию этих требований, которая в силу приоритетной замкнутости также принадлежит этому классу. После этого применяем теорему 1 и получаем вычислимую правильную последовательность, которая и задает искомый объект. В простых случаях удается установить принадлежность выбранных требований классу $K_{\omega\text{вп}}$, в более сложных приходится использовать более широкий класс $K_{\omega\text{свп}}$.

Каждой правильной последовательности $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots$ индивидов описанной в п. 1 ситуации $S_{+-}$ сопоставим множество $A_\infty = \cup A_i$. Можно установить, что если $\alpha$ – одно из следующих условий: (1) дополнение к $A_\infty$ гипериммунно; (2) дополнение к $A_\infty$ не гипергипериммунно, то требование $\langle S_{+-}, \alpha\rangle$ принадлежит $K_{\omega\text{вп}}$. Если же $C$ – любое неразрешимое множество такое, что $C \leqslant_T 0'$, а $\alpha$ – условие $(3_C)$ $C$ не сводится к $A_\infty$ (здесь и далее под сводимостью множеств понимаем сводимость по Тьюрингу), то $\langle S_{+-}, \alpha\rangle \in K_{\omega\text{свп}}$. В силу теоремы 1 существует перечислимое множество, удовлетворяющее любой совокупности условий вида (1), (2), $(3_C)$. В ситуации $S_{+-} \times S_{+-}$ каждой правильной последовательности $\langle A_0, B_0\rangle$, $\langle A_1, B_1\rangle, \ldots$ сопоставим множества $A_\infty$ и $B_\infty$ – объединения левых и правых членов пар. Можно доказать, что если $\alpha$ – условие "$A_\infty$ несравнимо с $B_\infty$", то $\langle S_{+-} \times S_{+-}, \alpha \in K_{\omega\text{вп}}\rangle$. Отсюда вытекает теорема Мучника – Фридберга (см. ([3])), утверждающая существование двух несравнимых перечислимых множеств. При этом можно выбрать эти множества удовлетворяющими дополнительным условиям (гиперпростыми, не гипергиперпростыми и т.д.).

В ситуации $S_{01}^{A}$ каждой правильной последовательности индивидов сопоставим последовательность $m(0)m(1)\ldots$ чисел 0 и 1, началами которой все эти индивиды являются. Ей, в свою очередь, сопоставим разбиение множества $A$ на два множества $A^0$ и $A^1$, определяемое так: $A^i=\{a(s)|m(s)=i\}$. Пусть $\alpha$ – одно из условий: $A^0$ и $A^1$ неотделимы; $C$ не сводится к $A^0$; $C$ не сводится к $A^1$ (при любом неразрешимом $C$таком, что $C\leqslant_T \mathbf{0}'$); $A^0$ и $A^1$ несравнимы. Тогда можно установить, что $\langle S_{01}^{A},\alpha\rangle\in K_{\omega\text{свп}}$. С помощью теоремы 1 из этих фактов можно извлечь различные следствия, например, следующие известные.

Т е о р е м ы: 1* ([4]). *Всякое перечислимое неразрешимое множество можно представить в виде объединения двух непересекающихся перечислимых неразрешимых множеств.* 2* (*Дж.Е. Сакс, см.* ([1])). *Всякое перечислимое неразрешимое множество можно представить в виде объединения двух непересекающихся несравнимых перечислимых множеств.*

5. Рассмотрим связь между методом приоритета и диагональным методом. Пару $\langle M,R\rangle$ будем называть *Д*-с и т у а ц и е й, если $M$ есть множество, а $R\subseteq M\times M$. Понятия правильной последовательности и условия в *Д*-ситуации $S$ определяются аналогично п. 1. Всякую пару вида $\langle S,\alpha\rangle$, где $S$ – *Д*-ситуация, а $\alpha$ – условие в $S$, будем называть *Д*-требованием. *Д*-требование $\langle S,\alpha\rangle$ назовем д и а г о н а л ь н ы м, если для всякого индивида $m_0$ ситуации $S$ существует такая начинающаяся с $m_0$ конечная правильная последовательность, что любое бесконечное правильное продолжение ее удовлетворяет условию $\alpha$. Имеет место следующая

Т е о р е м а 2. *Для всякой ситуации* $S=\langle M,U,R,T\rangle$ *существует такая Д-ситуация* $S_1=\langle M_1,R_1\rangle$ *и такое отображение* $\varphi$ *множества всех правильных последовательностей Д-ситуации* $S_1$ *в множество всех правильных последовательностей ситуации* $S$, *что для всякого условия* $\alpha$ *ситуации* $S$ *верно: если* $\langle S,\alpha\rangle$ – *приоритетное требование, то* $\langle S_1,\varphi^{-1}(\alpha)\rangle$ – *диагональное Д-требование.*

Верна также теорема, получающаяся из сформулированной при перемене местами слов ситуация и *Д*-ситуация; приоритетное и диагональное; требование и *Д*-требование. Эти теоремы показывают, что использование классов $K_{\text{п}}$ и $K_{\omega\text{п}}$ в описанной схеме доказательства эквивалентно применению диагонального метода.

6. Введем ситуацию $S_{-}^{++}$, которая будет применяться для построения пар непересекающихся перечислимых множеств с заданными свойствами. Назовем индивидами пары непересекающихся конечных множеств; будем считать, что индивид $\langle A_1,B_1\rangle$ может следовать за $\langle A,B\rangle$, если $A\subseteq A_1$, $B\subseteq B_1$. Указаниями назовем тройки $\langle A^+,B^+,K\rangle$ попарно непересекающихся конечных множеств; будем считать, что индивид $\langle A,B\rangle$ согласован с указанием $\langle A^+,B^+,K\rangle$, если $A^+\subseteq A$, $B^+\subseteq B$, $(A\cup B)\cap K=\phi$. Полученную ситуацию обозначим $S_{-}^{++}$.

Сопоставим каждой правильной последовательности индивидов $\langle A_0,B_0\rangle$, $\langle A_1,B_1\rangle,\ldots$ множества $A_\infty=\cup A_i$ и $B_\infty=\cup B_i$. Пусть $\alpha$ – одно из условий: $A_\infty$ и $B_\infty$ сильно неотделимы (см. ([3]), стр. 165); $A_\infty$ и $B_\infty$ несравнимы. Тогда можно доказать, что требование $\langle S_{-}^{++},\alpha\rangle$ принадлежит $K_{\omega\text{вп}}$. Назовем множество $D$ о т д е л и т е л е м пары множеств $\langle X,Y\rangle$, если $X\subseteq D$ и $Y\cap D=\phi$. Можно доказать, что если $\alpha$ – одно из условий: ни один отделитель $\langle C_1,C_2\rangle$ не сводится ни к одному отделителю $\langle A_\infty,B_\infty\rangle$ (при любой паре $\langle C_1,C_2\rangle$ перечислимых неотделимых множеств); $C$ не сводится ни к одному отделителю $\langle A_\infty,B_\infty\rangle$ (при любом неразрешимом $C$ таком, что $C\leqslant_T\mathbf{0}'$), то $\langle S_{-}^{++},\alpha\rangle\in K_{\omega\text{свп}}$. В ситуации $S_{-}^{++}\times S_{-}^{++}$ каждой правильной последовательности соответствуют две пары множеств $\langle A_\infty,B_\infty\rangle$ и $\langle C_\infty,D_\infty\rangle$. Можно установить, что если $\alpha$ – условие "никакой отделитель $\langle A_\infty,B_\infty\rangle$ не сравним ни с каким отделителем $\langle C_\infty,D_\infty\rangle$", то $\langle S_{-}^{++}\times S_{-}^{++},\alpha\rangle\in K_{\omega\text{вп}}$. С помощью теоремы 1 из упомянутых фактов непосредственно вытекают следующие ниже теоремы.

Т е о р е м а 3. *Существуют такие пары перечислимых неотделимых множеств* $\langle A_1,A_2\rangle$ *и* $\langle B_1,B_2\rangle$, *что любой отделитель пары* $\langle A_1,A_2\rangle$ *несравним по*

*Тьюрингу с любым отделителем пары $\langle B_1, B_2\rangle$. Обе пары можно считать сильно неотделимыми, а также можно считать множества $A_1$ и $A_2$ и множества $B_1$ и $B_2$ несравнимыми по Тьюрингу.*

Теорема 4. *Для любой пары $\langle C_1, C_2\rangle$ перечислимых неотделимых множеств существует такая пара перечислимых неотделимых множеств $\langle A_1, A_2\rangle$, что никакой отделитель пары $\langle C_1, C_2\rangle$ не сводится ни к какому отделителю пары $\langle A_1, A_2\rangle$. Пару $\langle A_1, A_2\rangle$ можно выбрать сильно неотделимой.*

Теорема 5. *Для всякого неразрешимого множества $C$ такого, что $C \leqslant_T \mathbf{0}'$, существует такая пара перечислимых неотделимых множеств $\langle A_1, A_2\rangle$, что $C$ не сводится ни к какому отделителю $\langle A_1, A_2\rangle$.*

7. Рассмотрим еще одну ситуацию $S_{+-}$, примени ую для исследования проблем отделения. Пусть $\langle A_1, A_2\rangle$ – пара перечислимых неотделимых множеств, $a(n)$ – вычислимый пересчет $A_1$ без повторений. Назовем индивидом любое конечное множество, указанием – любую пару конечных множеств $\langle K^+, A^-\rangle$ такую,что $a(K^+) \cap A^- = \phi$. Будем говорить, что индивид $K_2$ может следовать за индивидом $K_1$, если $K_1 \subseteq K_2$, и что индивид $K$ согласован с указанием $\langle K^+, A^-\rangle$, если $K^+ \subseteq K$ и $a(K) \cap A^- = \phi$. Полученную ситуацию обозначим $S_{\oplus -}$. Каждой правильной последовательности индивидов $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots$ сопоставим множество $A_1' = a(\cup K_i)$. Можно доказать, что если $\alpha$ – одно из условий: $A_1'$ и $A_2$ неотделимы; $C$ не сводится к $A_1'$ (при любом неразрешимом $C$ таком, что $C \leqslant_T \mathbf{0}'$) ; никакой отделитель $\langle C_1, C_2\rangle$ не сводится к $A_1'$ (при любой паре $\langle C_1, C_2\rangle$ перечислимых неотделимых множеств), то $\langle S_{\oplus -}, \alpha\rangle \in K_{\omega\,\text{свп}}$. Отсюда, в частности, вытекает

Теорема 6. *Для любой неразрешимой проблемы (в смысле Ю.Т. Медведева ([5])) отделения существует строго меньшая ее в смысле слабой сводимости (определение см. в ([6])) проблема отделения.*

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
20 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Дж. Шенфилд,* Степени неразрешимости, М., "Наука", 1977. [2] *A.H.Lachlan,* Zs. math. Logik u. Grundlagen d. Math., B. 13, 1 (1967). [3] *Х. Роджерс,* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., "Мир", 1972. [4] *R.M. Friedberg,* J. Symb. Logic, v. 23, 309 (1958). [5] *Ю.Т. Медведев,* ДАН, т. 104, 501 (1955). [6] *А.А. Мучник,* Сиб. матем. журн., т. 4, № 6, 1328 (1963).