Квант 7/83

Что такое случайность?

Купив билет в автобусе, вы обнаруживаете, что его номер состоит из одних семерок. Удивительно, не правда ли? Конечно! Ведь не каждый же день такое бывает! А теперь представьте себе, что номер билета — 830877. Наверное, ничего удивительного вы в этом не найдете. А почему, собственно? Ведь и номер 777777, и номер 830877 встречаются одинаково часто (лучше сказать, одинаково редко) — в одном случае из миллиона. Так почему же мы по-разному воспринимаем их появление?

Почему, если наш партнер выбросит на игральной кости десять шестерок подряд, мы подозреваем что-то неладное, а если он выбросит 2, 6, 2, 1, 2, 6, 4, 5, 1, 3, у нас подозрений не возникает?

Почему одни последовательности кажутся нам «случайными», а другие (например, шесть семерок) — нет? Можно ли дать точное математическое определение случайности?

Впервые такое определение было предложено в 1919 году немецким математиком и физиком Рихардом Мизесом. Мы не имеем возможности изложить его во всех деталях, но постараемся объяснить замысел.

Рассмотрим для простоты последовательности, состоящие только из «нулей» и «единиц». В каком случае мы согласны считать такую последовательность случайной? Например, если мы будем многократно подбрасывать о б ы к н о в е н н у ю монету и записывать результаты («орел» — 1, «решка» — 0), полученная последовательность должна быть случайной.

Прежде всего, ясно, что в случайной последовательности должно быть примерно одинаковое число нулей и единиц; поэтому последовательность из одних нулей, как и последовательность из одних единиц, не случайна.

Хотя последовательность

0101010101...

и содержит равное число нулей и единиц, вряд ли кто-нибудь сочтет ее случайной. Что в ней плохого? Например, то, что в ней ни разу не встречается двух подряд идущих нулей или двух единиц, в то время как в с л у ч а й н о й последовательности комбинации 00, 01, 10, 11 должны встречаться одинаково часто. Но и требования равной частоты появления всех комбинаций одинаковой длины мало.

Выпишем подряд числа 0, 1, 2, 3, ... в двоичной системе — получится последовательность

0110111001011101111000...

Можно доказать (попробуйте!), что «в пределе» для любого n все комбинации из нулей и единиц длины n будут встречаться в этой последовательности одинаково часто. Но, несмотря на это, вряд ли кто-нибудь согласится считать ее случайной.

Так что же такое случайная последовательность? Мизес предложил такой подход к определению этого понятия. Будем выбирать из последовательности некоторые ее члены, руководствуясь каким-то правилом. Например, разрешается выбрать все члены с четными номерами или все члены, номера которых — простые числа. Разрешается также, решая вопрос о том, выбирать или нет какой-то член, учитывать значения предыдущих членов последовательности. Например, можно отобрать те члены, перед которыми идут две единицы подряд (Но правило «выбрать те члены, которые сами равны единице», не допускается!) Так вот, случайная по Мизесу последовательность должна быть такой, что при **любом** правиле выбора нули и единицы встречаются среди выбранных членов одинаково часто. (Это требование, как можно проверить, запрещает считать случайными приведенные выше последовательности нулей и единиц).

Рихард Мизес сделал попытку положить свою концепцию случайности в основу теории вероятностей, но натолкнулся на серьезные логические трудности. Убедительную критику его подхода дал советский математик А. Я. Хинчин, а удовлетворительное обоснование теории вероятности было получено в 1933 г. А. Н. Колмогоровым на другом пути — аксиоматическим методом.

Однако порожденное Мизесом направление исследований, посвященное делению последовательностей на «случайные» и «неслучайные», оказалось плодотворным. В начале семидесятых годов А. Н. Колмогоров, воспользовавшись идеями теории алгоритмов, дал убедительное определение этих понятий.

Рихард Мизес родился 100 лет назад во Львове. Окончив Венский университет, он затем был профессором Страсбургского и Берлинского университетов. С 1933 г. Мизес работал профессором Стамбульского университета, с 1939 г.— в Гарварде (США). Умер Мизес в 1953 г.

А. Х. Шень

О целочисленных точках кривых вида

$$x^n + y^n = c^n$$

Если c — целое число, то окружность

$$x^2+y^2=c^2 \qquad (1)$$

обязательно проходит через точки с целыми координатами, например через точки $(0, \pm c)$ и $(\pm c, 0)$, лежащие на осях координат. Окружность (1) может проходить и через целочисленные точки, не лежащие на осях координат, например, при $c=5$ — через точки (3, 4), (4, 3) *).

А может ли кривая

$$x^n+y^n=c^n \qquad (2)$$

(где $n \geqslant 3$, $c>0$) проходить через целочисленную точку (x, y) при $x>0$ и $y>0$? В общем виде ответ на этот вопрос неизвестен, однако мы докажем следующее утверждение:

Для любого целого положительного c можно указать такой номер N, начиная с которого (то есть при $n \geqslant N$) кривая (2) не проходит через целочисленные точки, не лежащие на осях координат.

Почему это так? Изучение графика кривой (2) при $n=1, 2, 3, 4, \ldots$ наводит на мысль, что при достаточно большом n эта кривая прижимается к ломаной ABC, звенья которой идут по прямым AB и BC, заданным соответственно уравнениями $y=c$ и $x=c$, где c — целое (рис. 1). Но внутри «красного коридора» ширины 1, ограниченного ломаной ABC, осями координат и ломаной $A_1B_1C_1$ (см. рис. 1), уже нет целочисленных точек, а наша кривая целиком лежит в этом коридоре при достаточно большом n.

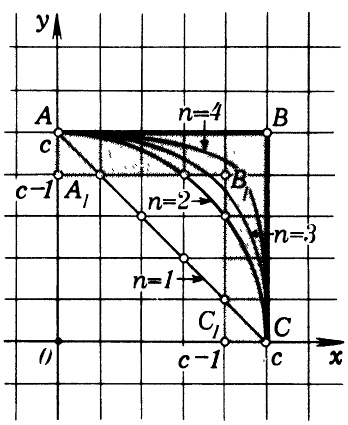

Рис. 1.

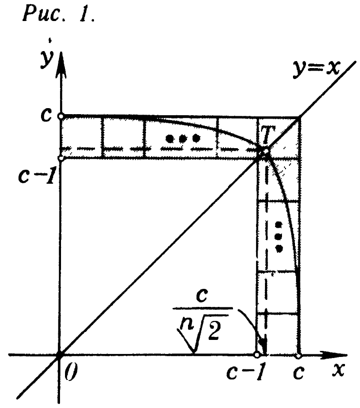

Рис. 2.

Основываясь на этих наглядных соображениях, приведем теперь строгое доказательство сформулированного утверждения.

Пусть дано целое $c>0$; кривая (2) пересекает оси координат в точках $(c, 0)$, $(0, c)$. Ее точка пересечения T с биссектрисой первого квадрата имеет абсциссу $x=\frac{c}{\sqrt[n]{2}}$. Чтобы кривая целиком оказалась внутри «красного коридора» (рис. 2), достаточно потребовать, чтобы $c-1<\frac{c}{\sqrt[n]{2}}$. А последнее неравенство будет выполненным, если мы выберем

$$n > \frac{\ln 2}{\ln c - \ln(c-1)},$$

что всегда можно сделать, так как правая часть неравенства — постоянная. В «коридоре» нет целочисленных точек. Значит, наша кривая не проходит через целочисленные точки, не лежащие на осях координат, что и требовалось.

А. Г. Маневич

---

*) Если окружность (1) проходит через целочисленную точку (x_0, y_0), то тройка чисел (x_0, y_0, c) называется *пифагоровой*. О пифагоровых тройках можно прочитать в «Кванте», 1981, № 4, с. 39 и 1979, № 4, с. 38.