МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНОВ ЛЕНИНА, ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.11

ШЕНЬ Александр

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ВАРИАНТЫ ПОНЯТИЯ ЭНТРОПИИ

(01.01.06 — алгебра, теория чисел,
математическая логика)

АВТОРЕФЕРАТ

*диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*

МОСКВА 1985

Работа выполнена на кафедре математической логики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор В. А. Успенский.

Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук Я. М. Барздинь, кандидат физико-математических наук В. В. Вьюгин.

Ведущее предприятие — Ленинградское отделение Математического института АН СССР имени В. А. Стеклова.

Защита диссертации состоится «5» IV 1985 г. в 15 час. 30 мин. на заседании специализированного Совета Д.053.05.05 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу:

Москва, 199899, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14—08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан «4» III 1985 г.

Ученый секретарь
специализированного
Совета Д.053.05.05 при МГУ
кандидат физ.-мат. наук

В. Н. ЧУБАРИКОВ

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из важнейших приложений теории алгоритмов является уточнение понятий сложности и случайности. Определение сложности (= энтропии) конечного объекта было предложено А.Н.Колмогоровым в 1965 г. [I]. Оно позволило говорить об энтропии и количестве информации применительно к индивидуальным объектам (а не к случайным величинам, как это делается в теории вероятностей).

После появления работы Колмогорова появились и другие алгоритмические варианты понятия энтропии - энтропия (сложность) разрешения (см. [2]), префиксная энтропия, монотонная энтропия (см. [2, 3]). Применение понятия энтропии к вычислимым функциям (а не к конечным объектам) было предло-

---

I. Колмогоров А.Н. Три подхода к определению понятия количество информации . - Проблемы передачи информации, 1965, т. I, вып. I, с. 3 - II.

2. Успенский В.А., Семенов А.Л. Теория алгоритмов : ее основные открытия и приложения. - В кн.: Алгоритмы в современной математике и ее приложениях. Часть I. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982, с. 99 - 342.

3. Вьюгин В.В. Алгоритмическая энтропия (сложность) конечных объектов и ее применение к определению случайности и количества информации. - Семиотика и информатика. М.:ВИНИТИ, 1981, вып. 16 (второй выпуск за 1980 г.), с. 14 - 43.

жено Шнорром, давшим определение оптимальной нумерации вычислимых функций (см. [2, 4, 5]).

Таким образом, известно много различных (хотя идейно весьма близких) алгоритмических вариантов понятия энтропии. К ним примыкают также различные варианты понятия априорной вероятности (см. [2, 3]).

Цель работы - дать общее определение понятия энтропии, частными случаями которого являлись бы упомянутые варианты понятия энтропии и исследовать его свойства, а также связь с другими понятиями алгоритмической теории вероятностей, исследовать свойства (α , β)-стохастических в смысле Колмогорова объектов.

Научная новизна. Определены понятия задачи и энтропии задачи. Установлены необходимые и достаточные условия для существования оптимального способа описания. Определены логические операции над задачами. Установлено, что всякой выводимой в интуиционистской логике высказываний формуле соответствует равномерно разрешимая задача, что дает возможность получать из выводимых формул вида $\varphi \supset \psi$ неравенства для энтропии.

Показано, каким образом известные алгоритмические вари-

---

4. Schnorr C. P. Optimal Gödel numberings - In: Proceedings of IFIP congress 71, V. 1. / Freiman et al., eds. 1972, p. 56-58.

5. Schnorr C. P. Optimal enumerations and optimal Gödel numberings. - Mathematical systems theory, 1975, v 8, N 2, p. 182-191.

анты понятия энтропии становятся частными случаями рассматриваемого общего определения и каким образом связывающие их соотношения выводятся из его свойств. Исследовано понятие априорной вероятности с точки зрения предлагаемой схемы. Доказано, что, вообще говоря, априорная вероятность не является максимальной перечислимой мерой, но при определенных условиях это так. Рассмотрена связь логарифма априорной вероятности с различными видами энтропии. Получено аксиоматическое описание некоторых видов энтропии. Исследованы свойства предложенного А.Н.Колмогоровым понятия стохастического конечного объекта.

Приложения. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в алгоритмической теории вероятностей.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинарах кафедры математической логики МГУ, а также на седьмой Всесоюзной конференции по логике и методологии науки.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах, список которых представлен в конце автореферата.

Структура диссертации. Работа состоит из введения, 4 глав и списка литературы, содержащего 2I наименование (всего I33 страницы машинописного текста).

2. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Предлагаемое в работе определение понятия энтропии использует понятие f_0-пространства в смысле Ю.Л.Ершова [6], являющееся чрезвычайно удобным средством для определения вычислимости отображений, область определения и область значений которых состоят из объектов более сложной природы, чем натуральные числа (функций, последовательностей и т.д.)

Другая важная идея, которую использует предлагаемое определение энтропии - идея интерпретации операций логики высказываний (конъюнкции, дизъюнкции, импликации) как операций не над утверждениями, а над задачами. Эта идея была предложена А.Н.Колмогоровым в [7] и уточнена впоследствии Ю.Т.Медведевым в [8]. Говоря неформально, задача определяется двумя множествами - множеством X "возможных решений" задачи и его подмножеством A - множеством "действительно решений". Например, задачу "перечислить все

---

6. Ершов Ю.Л. Вычислимые функционалы конечных типов. - Алгебра и логика, 1972, т. 11, № 4, с. 367 - 437.

7. Kolmogoroff A. Zur Deutung der intuitionistischen Logik. - Mathematische Zeitschrift, 1935, Bd. 32, H. 1, S. 58 - 65.

8. Медведев Ю.Т. Финитные задачи. - Доклады АН СССР, 1962, т. 142, 5, с. 1015 - 1018.

элементы множества $S \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ можно рассматривать как пару таких множеств: множеством возможных решений считается множество всех последовательностей натуральных чисел, а действительными решениями считаются те последовательности, множеством значений которых является множество S.

В диссертации используется следующая схема определения энтропии. Пусть имеются два f_0-пространства X и Y. Элементы первого мы будем считать описаниями (кодами), а элементы второго - описываемыми (кодируемыми) объектами. Пусть на множестве конечных объектов пространства X введена функция объема (сопоставляющая каждому конечному объекту натуральное число). Способами описания будем называть вычислимые в некотором точном смысле отображения $f : X \to Y$. Сложность задачи $\langle Y, A \rangle$ в пространстве Y при способе описания f определяется как минимальный среди объемов тех описаний $x \in X$, для которых $f(x) \in A$. При некоторых условиях на пространство X среди всех способов описания существует оптимальный, сложность задачи $\langle Y, A \rangle$ при оптимальном способе описания мы и назовем энтропией этой задачи. Если X и Y выбраны из числа f_0-пространств $\mathbb{N}_\perp$ и Ω (f_0-пространства натуральных чисел и пространства последовательностей нулей и единиц), возможны 4 варианта, изображенные в таблице:

148

f_0 - пространство описываемых объектов f_0 - пространство описаний	$\mathbb{N}_\perp$	Ω
$\mathbb{N}_\perp$	K	KR
Ω	KP	KM

В ней указано, каким из упоминавшихся выше вариантов понятия энтропии соответствует возникающее при данных пространствах описываемых объектов и описаний понятие энтропии задачи: K - простая колмогоровская энтропия, KR - энтропия разрешения, KP - префиксная энтропия, KM - монотонная энтропия.

Глава I носит вспомогательный характер и содержит понятия и результаты, в основном не являющиеся новыми (см. [6]). Мы сочли нужным поместить здесь этот материал, так как изложение его в виде, используемом в последующих разделах, в литературе отсутствует. Эта глава посвящена понятию f_0 -простанства и связанным с ним конструкциям.

В I.I дается определение f_0 -пространства и вводится связанная с ним терминология. Именно, f_0-пространством называется тройка $\langle X, \leq, X_0 \rangle$ (где X - некоторое множество, $\leq$ - частичный порядок на нем, X_0 - некоторое подмножество множества X), удовлетворяющая некоторым требованиям. Элементы множества X называются объектами, отношение $x \leq y$ читается "y продолжает x" или "x есть часть y", объекты, входящие в X_0, называются конечными. Наименьший в смысле введенного порядка объект называется неопределенностью и обозначается $\perp$. В I.2 строятся основные примеры f_0-пространств, необходимые для дальнейшего, среди них - пространства $\mathbb{N}_\perp$ и Ω, упоминавшиеся выше. В п. I.3 вводится понятие полного f_0-пространства и показывается, что всякое f_0-пространство можно рассматривать как часть полного. Это позволяет в дальнейшем ограничиваться рассмотрением полных пространств. В I.4 вводятся операции над f_0-пространствами (произведение $X \times Y$, сумма $X + Y$, пространство функций $C(X, Y)$) и устанавливаются их свойства, используемые в дальнейшем. Чтобы определить понятие вычислимого объекта f_0-пространства, нужно занумеровать его конечные объекты натуральными числами. Пространство с такой нумерацией называется эффективным f_0-пространством, если выполнены некоторые естественные требования; соответствующие определения даны в I.5. В эффективных пространствах вводится понятие вычислимого объекта. Вычислимые объекты пространства $C(X, Y)$ естественно рассматривать как вычислимые отображения из X в Y. Они используются для определения относительной вычислимости. В п. I.5 показано, каким образом известные варианты понятия относительной вычислимости становятся частными случаями этой схемы. Наконец, в I.6 на рассмотренных пространствах вводится объем. Этим завершается изложение необходимых сведений об f_0-пространствах (называемых в дальнейшем для краткости просто пространствами).

В главе 2 определяется понятие задачи, среди всех задач выделяются разрешимые, которые и классифицируются по трудности с помощью понятия энтропии.

В п. 2.I дается определение понятия задачи. Именно, задачей называется пара $\langle X, A \rangle$, где X - пространство, а $A \subset X$. Среди задач выделяются монотонные (те, у которых любое продолжение решения есть решение) и разрешимые (те, у которых среди решений есть вычислимые).

В п. 2.2 уточняется понятие способа описания объектов пространства Y с помощью объектов пространства X - такими способами считаются вычислимые объекты пространства $C(X, Y)$. Если на X задан объем ℓ и фиксирован способ описания $f \in C(X, Y)$, то сложность задачи $\langle Y, A \rangle$ при способе описания f определяется как $\inf \{ \ell(x) \mid x - \text{конечный объект } X,\ f(x) \in A \}$

В п. 2.3 даны необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять пространство X для того, чтобы при любом Y среди всех способов описания из $C(X, Y)$ существовал оптимальный (дающий наименьшую с точностью до аддитивной константы сложность). Пространства

X с объемом ℓ, обладающие таким свойством, называются регулярными. Именно, для регулярности пространства X необходимо и достаточно, чтобы существовал такой способ описания $f \in C(X, X \times \mathbb{N}_\perp)$, что
$$(\forall n \in \mathbb{N})\, \exists C\, (\forall x \in X_0)\, (K_f(\langle X \times \mathbb{N}_\perp, \{\langle x_0, n\rangle\}\rangle) \le \ell(x_0) + C)$$
(предложение I). Пусть X - регулярное пространство. Сложность задачи в пространстве Y при оптимальном способе описания из $C(X,Y)$ мы называем энтропией (точнее, X-энтропией). Энтропия задачи оказывается конечной тогда и только тогда, когда эта задача разрешима (п. 2.3, предложение 2).

В п. 2.4 приводятся примеры регулярных пространств с объемом ($\mathbb{N}_\perp$, Ω, Ξ). Каждому из них соответствует свой вид энтропии.

Их сравнению посвящен п. 2.5.

Предложение I. Пусть X_1 и X_2 - два регулярных пространства, f - монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию Липшица. Тогда следующие свойства равносильны: (I) для любого пространства Y существует такое C, что для любой задачи $\alpha = \langle Y, A\rangle$ справедливо неравенство $K_{X_1}(\alpha) \le f(K_{X_2}(\alpha)) + C$; (2) существует такое C, что для всякого конечного объекта $x_2 \in X_2$ выполнено неравенство $K_{X_1}(\langle X_2, \{x_2\}\rangle) \le f(\ell_2(x_2)) + C$.

В п. 2.6 сравниваются энтропии задач в разных пространствах при одном и том же пространстве описаний.

Глава 3 посвящена связи между понятием задачи и интуиционистской логикой высказываний.

В п. 3.I даются определения логических операций над задачами. Именно, конъюнкцией задач α и β называется задача $\alpha \wedge \beta$, пространством которой является произведение пространств задач α и β, а решениями являются пары $\langle x, y \rangle$, где x - решение α, а y - решение β. Пространством задачи $\alpha \vee \beta$ является сумма пространств задач α и β, а решениями являются все решения α и все решения β. Пространством задачи $\alpha \supset \beta$ является пространство непрерывных функций из пространства задачи α в пространство задачи β, а решениями являются те функции, значения которых на любом решении задачи α являются решениями задачи β. Логическая константа "ложь" интерпретируется как задача с одноэлементным пространством и пустым множеством решений.

В п. 3.2 рассматриваются энтропии задач $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$ и $\alpha \supset \beta$. Устанавливается, что энтропия задачи $\alpha \vee \beta$ определяется энтропиями задач α и β. Исследуются энтропии задач $\alpha \wedge \beta$ (энтропия пары) и $\alpha \supset \beta$ (условная энтропия β при известном α).

В п. 3.3 определяется интерпретация интуиционистской логики высказываний с помощью задач. Пусть $\Phi(p_1, \ldots, p_n)$ - формула логики высказываний, $\alpha_1 = \langle X_1, A_1 \rangle, \ldots, \alpha_n = \langle X_n, A_n \rangle$ - задачи. Тогда в соответствии с данными выше определениями логических операций над задачами возникает задача $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Пространство этой задачи зависит только от пространств X_i (но не от множеств A_i). Обозначим его $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$. Оказывается справедливой следующая теорема (п. 3.3):

Если Φ - выводимая в интуиционистской логике высказываний формула, то в пространстве $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ найдется вычислимый объект t , являющийся решением задачи $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ при любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Эта теорема является аналогом известного результата Медведева [8], устанавливающего связь интуиционистской логики высказываний с финитными задачами.

В п. 3.4 из этой теоремы выводится ряд неравенств для энтропии задач (предложение I и его следствия)

В п. 3.5 исследуется логика задач, то есть множество пропозициональных формул, для которых справедливо утверждение теоремы п. 3.3. Устанавливается, что это множество является суперинтуиционистской логикой, не совпадающей ни с интуиционистской, ни с классической (предложение 1).

Глава 4 посвящена дальнейшему исследованию введенного понятия энтропии. В п. 4.I показано, каким образом различные известные варианты энтропии (простая колмогоровская [I], условная колмогоровская [I], энтропия (сложность) разрешения [2], префиксная энтропия [3], монотонная энтропия [3], номер частично рекурсивной функции при оптимальной нумерации [2, 4, 5]) включаются в описанную схему.

В п. 4.2 показывается, каким образом многочисленные неравенства, связывающие между собой различные виды энтропии, могут быть получены как следствия доказанных в главе 2 общих теорем. Указаны неулучшаемые оценки, связывающие четыре варианта энтропии из приведенной выше таблицы (K, KP, KR, KM).

В п. 4.3 исследуется понятие априорной вероятности. Для каждой задачи $\langle Y, A \rangle$ и для каждого способа описания $f \in C(\Omega, Y)$ объектов пространства Y с помощью двоичных последовательностей определим $P_f(\langle Y, A \rangle)$ как вероятность того, что случайно взятая (по равномерной мере) последовательность в Ω будет описанием решения задачи $\langle Y, A \rangle$. Устанавливается, что для любого пространства Y среди всех способов описания в $C(\Omega, Y)$ существует оптимальный - тот, при котором P_f максимальна с точностью до ограниченного множителя. Функция P_f при оптимальном f называется априорной вероятностью. В пространствах $N_\perp$ и Ω она совпадает с максимальной перечислимой мерой (см. [3]). Мы доказываем (предложение 4), что аналогичное свойство выполнено для всех пространств, в которых любые два конечных объекта, имеющие общую мажоранту, сравнимы. Это условие существенно: в предложении 5 приводится пример, показывающий, что в пространстве частичных функций со значениями 0 и I априорная вероятность не является максимальной перечислимой мерой.

В п. 4.4 изучается связь логарифма априорной вероятности с другими видами энтропии.

П. 4.5 посвящен аксиоматическому описанию различных видов энтропий. Именно, в нем устанавливается следующее утверждение (теорема I).

Пусть K - произвольная функция с натуральными аргументами и значениями, обладающая следующими свойствами: (I) множество всех x, для которых $K(x) \leq n$, конечно и имеет мощность, совпадающую с точностью до ограниченного и отделенного от нуля множителя с 2^n, (2) функция K является пределом вычислимой убывающей последовательности вычислимых всюду определенных функций, (3) для любой вычислимой функции f справедливо неравенство $K(f(x)) \leq K(x) + \mathcal{O}(1)$ (для тех x, для которых $f(x)$ определено). Тогда функция K совпадает с простой колмогоровской энтропией с точностью до ограниченного слагаемого.

Следствием этой теоремы является то, что если регулярное пространство с объемом задает энтропию на натуральном ряду, обладающую свойством (I), упомянутым в теореме, то эта энтропия совпадает с простой колмогоровской энтропией (с точностью $\mathcal{O}(1)$). Сформулированные утверждения останутся верными, если заменить $\mathcal{O}(1)$ на $\mathcal{O}(\log n)$ и $2^{n+\mathcal{O}(1)}$ на $2^{n+\mathcal{O}(\log n)}$ (теорема 2).

В п. 4.5 исследуются свойства стохастических по Колмогорову конечных объектов. Назовем число x (α, β)-стохастическим, если существует такое конечное множество A, что $x \in A$ и справедливы соотношения $K(A) \leq \alpha$ и $K(x) \geq \log_2 |A| - \beta$. Здесь $K(A)$- простая колмогоровская энтропия множества A (точнее, его номера в любой вычислимой нумерации), $|A|$ - число элементов A .

Исследованы условия, при которых среди натуральных чисел заданного начального отрезка существуют нестохастические. Именно, установлено (при некотором C), что если $\alpha \geq \log_2 n + C$, $\alpha + \beta \geq n + 4\log_2 n + C$, то все натуральные числа от 0 до 2^n являются (α , β)-стохастическими. Если же $2\alpha + \beta < n - 6\log_2 n - C$, то среди чисел от 0 до 2^n существуют не (α , β)-стохастические (теорема 2). Исследованы также вопросы о доле нестохастических объектов среди всех чисел заданного отрезка (теорема 3).

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

I. Построена общая схема определения понятия энтропии задачи, использующая понятие f_0 -пространства в смысле Ю.Л.Ершова. Исследованы свойства этой схемы. Показано, каким образом известные алгоритмические варианты понятия энтропии становятся частными случаями этой схемы. Установлена связь этой схемы с интуиционистской логикой.

2. С точки зрения этой схемы исследовано понятие априорной вероятности. Указаны условия, при которых априорная вероятность является максимальной перечислимой полумерой.

3. Дано аксиоматическое описание некоторых видов энтропии.

4. Исследованы свойства стохастических по А.Н.Колмогорову объектов.

Работы автора по теме диссертации.

I. Шень А. Аксиоматическое описание понятия энтропии конечного объекта. - В кн.: Логика и основания математики. Тезисы УIII Всесоюзной конференции Логика и методология науки , г. Паланга, 26 - 28 сентября 1982 г. Вильнюс: Вильнюсский университет, 1982, с. 104 - 105.

2. Шень А.Х. Исчисление задач и ℓ_0 -пространства. - В кн.: УI Всесоюзная конференция по математической логике. Тбилиси, 30.XI - 2.XII.1982 г. Тезисы докладов. Тбилиси: Издательство Тбилисского университета, 1982, с. 204.

3. Шень А.Х. Понятие (α , β)-стохастичности по Колмогорову и его свойства. - Доклады АН СССР, 1983, т. 271, 6, с. 1337 - 1340.

4. Шень А.Х. Алгоритмические варианты понятия энтропии. - Доклады АН СССР, 1984, т. 276, 3, с. 563 - 566.

Сдано в набор 02.01.85
Подписано в печать 20.12.84 Л-83625
Формат 60х90 1/16 Печать офсетная Бум.офс.
Усл.печ.л. 1,0 Усл.кр.-отт. 1,12 Уч.-изд.л. 0,58
Тир. 120 экз. Зак. 148

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
140010, Люберцы 10, Московской обл.,
Октябрьский проспект, 403