# ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

предлагавшиеся ученикам математического класса
57 школы (выпуск 2000 года, класс «В»)

Под редакцией А. Шеня

Москва, 2000
МЦНМО

ББК 22.1
315
УДК 51 (023)

315 **Задачи по математике**, предлагавшиеся ученикам математического класса 57 школы (выпуск 2000 года, класс «В») / под редакцией А. Шеня. М.: МЦНМО, 2000. — 272 с.

ISBN 5-900916-59-6

Книга содержит учебные материалы, составлявшие содержание курса «математического анализа» в математическом классе 57 школы (выпуск 2000 года, класс «В»). В неё включены задачи вечерней математической школы и собеседований, задачи всех четырёх лет обучения (включая контрольные работы и экзамены), а также список тем лекций, читавшихся школьникам.



ISBN 5-900916-59-6

# Оглавление



# Предисловие

В этой книге собраны материалы по курсу математики в одном из классов московской Пятьдесят седьмой школы (выпуск 2000 года, класс «В»). Традиция состоит в том, что в каждом классе курс математики строится по-своему: не только набор задач, но и список тем в разных классах могут быть совершенно разными. Подборки задач такого рода несколько раз публиковались (см., например, [1] и [2]). Недавно вышедшая книжка [3] содержит обязательную часть курса для класса 1993 года выпуска. Отметим, что все эти материалы относятся к классам с двухлетним или трёхлетним сроком обучения (в нашем случае курс рассчитан на 4 года).

Преподавание математики в классе делилось на три части: алгебра (2 часа в неделю), геометрия (2 часа) и занятия по задачам (4 часа), которые по традиции назывались «математическим анализом», хотя в течение первых двух лет задач по анализу практически не было.

Занятия по алгебре и геометрии вёл Рафаил Калманович Гордин. На этих занятиях значительная часть времени отводилась на решение задач и их обсуждение в классе. Занятия по математическому анализу состояли в выдаче заданий и индивидуальной проверке решений, рассказываемых школьниками; этим занималась большая группа преподавателей (см. главу «Ученики и учителя»).

В течение года перед набором класса мы вели занятия в Вечерней математической школе; многие (хотя далеко не все) школьники будущего класса бывали на этих занятиях. Задачи Вечерней математической школы (и вступительных собеседований) также приведены в книге.

Скажем несколько слов о том, в чём (как нам кажется) выбранные задачи несколько отступают от традиций.

Прежде всего, в них заметно меньше доля задач по математическому анализу — два первых года таких задач практически не было.

Мы довольно спокойно относились к требованиям логической строгости (полагая, что уровень таких требований должен постепенно расти вместе со школьниками). Как и иностранный язык, математику можно изучать по-разному: либо начинать с грамматики, либо начинать говорить как придётся о чём-то интересном, постепенно привыкая говорить правильно. В этой шкале наши задачи несколько смещены в сторону второго варианта (по сравнению с традиционными для математических классов). Мы старались свести к минимуму число понятий, откладывая определения до момента, когда они напрашиваются сами собой, и избегая задач на понимание и применение формальных определений (типа «является ли множество целых чисел группой по сложению?»).

Излагая теоретический материал, можно разложить какую-либо теорему в последовательность задач — решая эти задачи, школьник перепрыгивает с камешка на камешек и в конце концов доходит до искомого утверждения. Мы старались положить этих камешков «с запасом», чтобы можно было двигаться в нужную сторону по-разному, не боясь оступиться.

Мы не только не избегали повторений, но старались возвращаться к одному и тому же материалу несколько раз с перерывами, следуя мудрому примеру Совы из книжки о Винни Пухе и пользуясь каждым удобным случаем вновь вернуться к вещам, которые «спокойно можно объяснить два раза, не опасаясь, что кто-нибудь поймёт, о чём вы говорите».

Мы старались не торопиться — в конце концов вопрос не в том, успеют ли школьники изучить что-то, а в том, сохранят ли они интерес до конца школы и продолжат ли они занятия после окончания (хотя, увы, эта цель осталась скорее недостижимой).

Хочется поблагодарить всех учителей и сотрудников 57 школы, работавшим с классом, в частности, И. В. Рехтман (классный руководитель), Б. М. Давидовича (завуч математических классов) и С. Л. Менделевича (директор школы).

# Ученики и учителя

Список учеников, принятых в класс:

Бедарев Владимир
Бурашов Илья
Вьюгин Илья
Дмитревская Анна
Дмитревская Елена
Дубовский Дмитрий
Жгун Владимир
Зарубина Анна
Зверков Дмитрий
Зоркий Фёдор
Коробов Владимир
Лущекина Софья
Нелькин Михаил
Немытов Виктор
Новодворский Пётр
Панин Александр
Полищук Олег
Преображенский Максим
Сальников Сергей
Стальгорова Катя
Тарасов Алексей
Теннова Наталия
Устинов Михаил
Феоктистов Владимир
Шрамов Павел

На уроках математического анализа с классом работали

Ахметшин Алексей
Богуславская Вера
Бурман Юрий
Дерягин Дмитрий
Доценко Владимир
Завьялов Владислав
Зубов Михаил

Зутлер Илья
Кондратьев Владимир
Маркарян Никита
Михайлова Татьяна
Панов Пётр
Першина Мария
Полтерович Иосиф
Ромащенко Андрей
Рыбников Леонид
Рютин Константин
Савватеев Алексей
Соболь Александр
Урюпина Ольга
Ушаков Максим
Шаповал Александр
Шварц Дмитрий
Шень Александр
Шрамов Константин
Шувалов Виктор
Эршлер Дмитрий

и другие. Лекции школьникам прочитали Анна Дюбина, Владимир Фок и Jeremy Bem. В проведении занятияй по физике участвовал Лев Мельниковский, занятий по программированию — Роман Авданин, Константин Белов и Дмитрий Школьник.

Наконец, большая группа преподавателей помогала вести занятия Вечерней математической школы.

# Вечерняя математическая школа и собеседования

Вечерняя математическая школа — это кружок по математике, который традиционно работает в пятьдесят седьмой школе для московских школьников 7 и 8 классов. Одна из основных целей этого кружка — найти будущих учеников школы, хотя по традиции независимо от своих успехов на кружке школьники седьмых и восьмых классов сдают вступительные экзамены (традиционно называемые «собеседованиями») на общих основаниях.

Занятия ВМШ (вечерней математической школы) проходят раз в неделю, обычно в трёх – пяти группах (в каждой параллели) по одним и тем же задачам. Приходить может любой школьник, начиная с любого занятия. Обычно занятие происходит так: выдаются листки с задачами; школьник, решивший задачу, поднимает руку, к нему подходит кто-то из преподавателей и слушает решение. Иногда решение разбирается у доски. Задачи подбираются более или менее по темам, но с таким расчётом, чтобы пришедший впервые школьник также мог их решать.

Как правило, мы включали в задание шесть задач (обычно пятая и шестая задача были не совсем математические).

Мы приводим также задачи собеседований. Первые два собеседования (27 марта и 3 апреля) были письменными: школьникам предлагалось записать ответы и краткие решения задач. Следующие собеседования уже были устными (и проходили примерно так же, как и занятия кружка).

Задачи после звёздочек — дополнительные.

## Занятие 4 октября 1995

1. Может ли шахматный конь обойти все 9 полей доски $3 \times 3$?

2. Сравните дроби

$$\frac{1994}{1995} \quad \text{и} \quad \frac{1995}{1996}.$$

**3.** Как вы думаете, в записи числа $2^{1000}$ (произведение тысячи двоек) больше 500 цифр или меньше? Почему?

**4.** Купец продал кафтан покупателю за 10 рублей. У него не было сдачи с 25 рублей, и он разменял 25-рублевую купюру покупателя у соседа. Покупатель ушел. Сосед приходит: «Бумажка фальшивая». Пришлось купцу дать настоящую. Что потерял купец?

**5.** Двое хотят перейти прямую канаву шириной 4 метра. На краю они нашли две прочные доски длиной $3,5$ метра каждая. Как им перейти на другую сторону?

**6.** Следующий текст получен из хорошо известного заменой каждой буквы на какую-то другую. Последнее слово пропущено. Восстановите его.

— Сагдау ра накя, сагдау ра накя? — пудгэбуз Увнюв Сушванщэб, лсгецуе л цгяжюь сюсюзуь галлдэм цзуцюз *нака* ву шгувтаплдэм зуф. — Е вя ьюца фюгьэг р сюняьдуж. — Фяшюгч вя сювез яцю рюлдзэтувэе э сючязуз яьа фючгюм вюбэ.

— Сгюдзеном чулагьув, — сгюрюгбуз Лсэтов, пуданоруелщ р юфяезю. — Вачвю яьа чозю лрябда накэнщ. Яьа чя жачя. Е лсунщ вя ьюца чяп юцве. — Ьалщя, ьалщя, — сгюфюзчуз юв, — чя ря уряд ра сугзя. — Вю шгувтап вя юнрябуз э рлдюгя пужгусяз...

Увнюв Сушванщэб пуьюзбуз, алнузюлнщ э рэввоя суго ьузю-сюьуза сгярюпьюцзэ яцю чюепзэрюлнщ, юв лнуз фгяьунщ, э рлдюгя цзачюдэм люв юрзуфяз эь люрягкяввю.

Лнгуввюя цюнюрэзюлщ яьа сгючючфявэя. Юв барлнрюруз лдрюпщ люв, бню дню-ню нэжювщдю фягцуз яцю пу рюгюн гачукдэ. Увнюв Сушванщэб юндгоз цзупу э сгэ чзяфвюь лряня юляввяцю ангу арэфяз сягяф лючюм Фяшюгчу: шгувтап р юфвюм гадя фягчуз дугьуввом сэлнюзян, у фгацюи юнлняцэруз пурянваи лаьа. Увнюв Сушванэщэб ючьяг.

— Дялщ дя ля, ьалщя, дялщ дя ля, — сгюэпвял юв нгясяхахэь цюзюлюь.

— Нэкя, ьюзбунщ, — юнрябуз абэнязщ бэлноь галлдэь еподюь, — ьюзбунщ ээз ро сгюсузэ. Е .



## Занятие 11 октября 1995

**1.** В строку написаны 10 единиц подряд. Перед каждой из них (в том числе и перед первой) стоит плюс или минус. Какие числа могут получиться в сумме? Почему?

**2.** Можно ли нарисовать пятиугольник и точку внутри него так, чтобы любая сторона пятиугольника была бы видна из неё под углом $70^\circ$?

**3.** Как разделить 7 одинаковых яблок поровну между 12 людьми, если яблоки разрешается резать не более чем на 5 частей?

**4.** Двое играют в такую игру. Первый называет число от 1 до 10, затем второй называет число от 1 до 10. Первый выигрывает, если сумма чисел чётна. Кто выигрывает при правильной игре (первый или второй) и как он должен играть? Тот же вопрос, если вместо суммы чисел вычисляют их произведение.

**5.** В стакане с водой плавает кусочек льда. Как изменится уровень воды в стакане, когда лёд растает?

**6.** Отгадайте закон и продолжите таблицу:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | | | | |
| 1 | 2 | 1 | 1 | | |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |

.....................

## Занятие 18 октября 1995

**1.** У Васи в комоде лежат 10 черных, 16 синих и 20 зелёных носков. Сколько носков надо достать не глядя, чтобы среди них заведомо была пара носков одного цвета?

**2.** У Пети в комоде валяются 10 чёрных рукавиц (5 пар), 16 синих (8 пар) и 20 зелёных (10 пар). Сколько рукавиц надо достать не глядя, чтобы заведомо можно было выйти на улицу в рукавицах одного цвета?

3. Сколько чисел от 00 до 99 содержат в своей записи цифру 3 и сколько не содержат? Сколько чисел от 000 до 999 содержат в своей записи цифру 3 и сколько не содержат?

4. Прямоугольную шоколадку размером $3 \times 4$ разламывают на дольки $1 \times 1$. Сколько разломов для этого необходимо (ломать одновременно два кусочка не разрешается)? Можно ли обойтись меньшим числом разломов?

5. Большой ящик заполнен мелкой картошкой. Другой столь же большой ящик заполнен ещё более мелкой картошкой. Как вы думаете, в каком из ящиков больше картошки (по весу)?

6. В комнате стоят три электрические лампочки, в соседней — три выключателя к ним, причем на каждом написано «включено» и «выключено», но неизвестно, какой выключатель соответствует какой лампочке. Лампочки из комнаты с выключателями не видны. Как определить, какой выключатель соответствует какой лампочке? Разрешается зайти в комнату с выключателями, проделать с ними любые действия, а после этого войти в комнату с лампочками и проделать любые действия с ними, после чего дать ответ.

## Занятие 25 октября 1995

1. Из города А в город Б ведут 2 дороги, из города Б в город В ведут 3 дороги, из города В в город Г ведут 7 дорог. Сколько различных маршрутов ведут из А в В через Б? Сколько различных маршрутов ведут из А в Г через Б и В?

2. Прямоугольник $7 \times 9$ разбит на клетки $1 \times 1$. Требуется закрасить 4 клетки, образующие квадрат $2 \times 2$. Сколькими разными способами можно выбрать такой квадрат?

3. Сколько существует четырёхзначных чисел, все цифры которых нечётны?

4. Прямоугольный город $5 \times 7$ разбит на квадратные кварталы $1 \times 1$. Мы хотим пройти из юго-западного угла в северо-восточный, идя на север и на восток. Все возможные пути имеют одинаковую длину. (Почему?) Сколько различных путей существует?



5. Ветер дует на север. В какую сторону развевается флаг, закреплённый на воздушном шаре?

6. Замените во фразе

И ВСЕ ЖЕ ОН НЕ ПРАВ

каждую из десяти букв И, В, С, Е, Ж, О, Н, П, Р, А одной из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (разные буквы заменяются на разные цифры) так, чтобы все слова превратились в десятичные записи точных квадратов.

## Занятие 1 ноября 1995

1. На прямой выбраны две точки A и B на расстоянии 10. Где на прямой может находиться точка C, если известно, что расстояние $AC$ в полтора раза больше расстояния $BC$? (Укажите все варианты.)

2. Может ли сторона треугольника быть вдвое больше другой стороны и вдвое меньше третьей?

3. Земной шар обвязали по экватору верёвкой. Затем верёвку удлинили на метр и приподняли над экватором так, что образовалась щель постоянной ширины. Сможет ли в эту щель пролезть кошка?

4. На сколько частей делят пространство плоскости, являющиеся гранями куба? тетраэдра (треугольного молочного пакета)?

5. Почему крышки канализационных люков делают круглыми, а не овальными или квадратными?

6. На конце верёвки сделаны петли, надетые на запястья (не туго, но с рук они не снимаются). Можно ли, не развязывая верёвку (и тем самым не снимая её с рук), завязать на ней узел?

## Занятие 15 ноября 1995

1. В Вестляндии 64 города. Докажите, что в каких-то трёх из них число дождливых дней в сентябре было одинаково.

2. Какое наибольшее число (а) ладей; (б) слонов можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

3. Может ли кот Леопольд подарить 10 мышатам конфеты, если он хочет, чтобы каждый получил хотя бы одну конфету, никакие два мышонка не получили одинакового числа конфет и всего у него (а) 15 конфет; (б) 50 конфет; (в) 100 конфет?

4. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющих равное число знакомых в этой компании. (Знакомства симметричны: если А знаком с Б, то Б знаком с А.)

5. Есть несколько алмазов и мензурка с делениями. Как измерить суммарный объем всех алмазов?

6. Есть три карандаша и нитки. Сделайте из них «жёсткую» конструкцию, в которой карандаши не касались бы друг друга (даже через слой ниток), но удерживались бы нитками в определённом положении друг относительно друга.

## Занятие 22 ноября 1995

1. Правила хорошего тона запрещают женщине стоять первой в очереди, а мужчине стоять перед женщиной. Может ли в очереди, где все правила соблюдены, оказаться женщина?

2. Любую сумму денег, начиная с 8 копеек, можно уплатить пятаками и алтынами. Почему? (Пятак — пять копеек, алтын — три копейки; это старинные русские монеты.)

3. На плоскости нарисовано несколько окружностей, любые две из которых пересекаются. Докажите, что такую фигуру можно обвести карандашом, не отрывая его от бумаги, не проходя ни по одному участку дважды и не пропустив ни одного участка.

4. В последовательности $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ каждое следующее число равно сумме двух предыдущих. Могут ли в ней оказаться рядом (а) два чётных числа? (б) два числа, делящихся на 13?

5. Выключатель имеет три контакта 1, 2 и 3 и два положения. В одном положении контакт 1 соединён с контактом 2, а в другом положении контакт 1 соединён с контактом 3. Как, имея два таких выключателя и много провода, сделать так, чтобы свет на лестнице можно было включать и выключать и сверху, и снизу?



6. На берегу реки крестьянин, волк, коза и капуста. Волк, оставленный с козой без крестьянина, её съедает — в свою очередь, коза съедает капусту, оставшись с ней без присмотра. Как крестьянину перевезти всех на другой берег, если в лодку можно взять только один из трех объектов (за раз)?

## Занятие 29 ноября 1995

1. Не пользуясь калькулятором, скажите, какая из дробей

$$\frac{13}{21} \quad \text{и} \quad \frac{21}{34}$$

больше. Можете ли вы указать дробь, которая по величине находится между ними?

Обыкновенную дробь $m/n$ называют *сократимой*, если её можно сократить, то есть нацело разделить числитель и знаменатель на одно и то же целое число (большее 1).

2. Сократимы ли дроби:

$$\frac{39}{57}; \qquad \frac{6}{1357}; \qquad \frac{1363}{1357} = 1\frac{6}{1357}\ ?$$

3. При каких $n$ и на что можно сократить дроби

$$\frac{n+6}{n}; \qquad \frac{n+19}{n+13}; \qquad \frac{5n+3}{3n+2}\ ?$$

4. Найти сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 100}$$

(Указание: начните складывать.)

5. Имеются неверные чашечные весы (плечи неодинаковой длины, так что для равновесия на одну чашку надо класть больше, чем на другую), правильная килограммовая гиря и мешок сахарного песка. Как отвесить килограмм сахарного песка?

6. Профессор в командировке, а сын отца профессора пьёт дома чай с отцом сына профессора. Как такое может быть?

## Занятие 6 декабря 1995

1. Можно ли разрезать фигуру, изображенную на рис. 1, на две, на три и на четыре одинаковые части?

2. Можно ли прямолинейным разрезом поделить одновременно пополам прямоугольный кусок хлеба и лежащий на нем круглый кусок колбасы (рис. 2)? Сколькими способами это можно сделать?

3. Все грани кубика размером $3 \times 3 \times 3$ покрасили. Потом его разрезали на 27 кубиков размером $1 \times 1 \times 1$. Сколько при этом получилось кубиков со всеми неокрашенными гранями? с одной окрашенной гранью? с двумя окрашенными гранями? с тремя окрашенными гранями? с четырьмя окрашенными гранями?

4. Внутри квадрата размером $1 \times 1$ поставлено 105 точек. Докажите, что среди них найдутся две точки, расстояние между которыми не больше 0,2.

5. Как изменится внутренний диаметр кольца (рис. 3) при нагревании?

6. Можно ли двумя прямолинейными разрезами рассечь подкову (рис. 4) на шесть частей (части между разрезами перекладывать запрещается)?

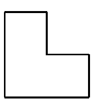

Рис. 1

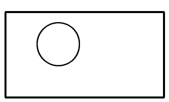

Рис. 2

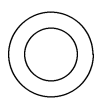

Рис. 3

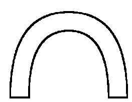

Рис. 4

## Занятие 13 декабря 1995

1. Учительница задала на дом задачу: проверить, делится ли некоторое число на 2, 3 и 6. На следующем уроке Вова сказал: «Я забыл, какое число задали, и делил другое, два раза остатка не было, на третий был». Учительница сказала: «Ты ошибся». Почему она так сказала?

2. Делится ли на 7 сумма двух слагаемых, если (а) оба слагаемых делятся на 7; (б) ровно одно из них делится на 7? (в) ни одно из них не делится на 7?



3. У числа $100! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$ посчитали сумму цифр, у суммы снова посчитали сумму цифр, и так поступали до тех пор, пока не получили число из одной цифры. Что это за число?

4. Целое число, большее 2, называется простым, если оно не разлагается в произведение двух меньших целых положительных чисел. Докажите, что число 999 991 — не простое.

5. Почему трамвайные провода идут не прямо, а зигзагом? Что плохого было бы, если пустить их ровно? (Указание: с троллейбусом этой проблемы нет.)

6. Можно ли расположить 6 длинных круглых карандашей так, чтобы каждый из них касался всех остальных?

## Занятие 20 декабря 1995

1. Вася влил стакан кислоты в банку с водой. Получился 10-процентный раствор кислоты в воде. Потом он добавил в раствор ещё один такой же стакан кислоты. Какой раствор получился в результате?

2. Сколько раз в сутки стрелки часов образуют прямой угол?

3. (а) Найдите сумму всех чётных четырехзначных чисел. (б) Найдите сумму всех четырехзначных чисел, все цифры которых чётны.

4. Саша утверждает, что при подстановке вместо $x$ в выражение $x^2+x+41$ чисел $1, 2, 3, 4, \ldots$ всегда получится простое число. Прав ли он? (Число называется простым, если оно делится только на единицу и само себя.)

5. Как измерить толщину нитки, имея катушку с ниткой, карандаш и линейку с сантиметровыми делениями?

6. Турист вышел из своей палатки, прошел 5 км на юг, 5 км на восток и 5 км на север, после чего снова оказался у своей палатки. Где такое могло произойти?

## Занятие 27 декабря 1995

1. Как расставить 5 бутылок по 6 подносам так, чтобы на каждом подносе было по одной бутылке?

2. Простое число — это число, которое не разлагается в произведение двух меньших целых чисел. (Например, 7 — простое число, а $10 = 2\times5$ — нет.) Докажите, что полусумма двух соседних нечётных простых чисел — составное число.

3. Известно, что $57 = 2^5+5^2$. Найдите аналогичное разложение числа 5757 (т. е. такие целые числа $c$ и $d$, что $5757 = c^d + d^c$).

4. Продолжите последовательность: 4, 3, 3, 6, 4, 5, 4, 6, 6, 6, 11, ...

5. Петя стоит на балконе 2-го этажа, а Вася — на балконе 5-го этажа того же дома. В некоторый момент они одновременно выкрикивают слово «раз». Оказалось, что Петя услышал васино слово немного раньше, чем Вася — петино. Почему?

6. Три черепахи участвовали в кроссе. Первая сказала: «Я пришла к финишу раньше второй.». Вторая сказала: «Я пришла к финишу раньше третьей.» Третья сказала: «Я пришла к финишу раньше первой.» Как такое может быть?

* * *

7. Почему парикмахер в Женеве охотнее побреет двух французов, чем одного немца?

8. Проделайте в тетрадном листе отверстие, в которое может пролезть человек.

9. Нарисуйте фигуру из 11 точек и нескольких отрезков между ними так, чтобы каждая точка была соединена ровно с двумя другими.

10. При всех целых $x$ число $ax^2 + bx + c$ целое. Можно ли утверждать, что числа $a$, $b$, $c$ — целые?

## Домашняя олимпиада

1. Можно ли так расположить в пространстве три одинаковых кубика, чтобы сверху, сбоку и спереди была видна одна и та же фигура — три квадрата, приложенных друг к другу сторонами (буквой «Г»)?

2. Что больше: общее количество цифр в числах $1, 2, 3, 4, \ldots, 999, 1000$ или количество нулей в числах $1, 2, 3, 4, \ldots, 9999, 10000$?



3. Сколько раз входит 2 в разложение на простые сомножители числа $100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \ldots \cdot 199 \cdot 200$?

4. Некоторые целые числа объявлены хорошими, остальные — плохими. Известно, что (а) если $x$ хорошее, то $x + 15$ тоже хорошее; (б) если $x$ плохое, то $x+6$ тоже плохое. Сколько плохих чисел может быть среди чисел от 1 до 1000? Укажите все варианты и докажите, что других быть не может.

5. Японские названия некоторых годов по традиционному восточному календарю: каното уси (1901), хиноэ ума (1966), цутиноэ ума (1978), цутиното хицудзи (1979), каноэ сару (1980), хиноэ тора (1986), цутиното ми (1989), мидзуноэ ума (2002), мидзуното хицудзи (2003), хиноэ ума (2026). (а) Запишите названия годов 1991, 1993, 1997. (б) Через сколько лет наступит ближайший год хиноэ сару? каното ми? мидзуноэ уси?

## Занятие 17 января 1995

1. В Москве живёт более 5 миллионов человек. Вася купил карту масштаба 1 : 100 000, расстелил её на земле и думает, что на неё встанут 50 человек ($50 = 5\,000\,000/100\,000$). Прав ли он?

2. Можно ли замостить плоскость одинаковыми (а) треугольниками; (б) четырехугольниками; (в) пятиугольниками; (г) шестиугольниками; (д) семиугольниками?

3. Сколько нужно провести непересекающихся диагоналей в 100-угольнике, чтобы разрезать его на треугольники? Почему всегда получается одно и то же число диагоналей?

4. На прямой дороге стоят 6 домов на равных расстояниях друг от друга. В каком месте дороги надо сделать автобусную остановку, чтобы суммарное расстояние от неё до всех домов было бы как можно меньше?

5. Мерный цилиндр заполнен водой. Перевёрнутая пробирка, частично заполненная водой, плавает в толще воды. Почему она опускается, если нажать на резиновую плёнку, затягивающую отверстие цилиндра?

6. Разрежьте (а) тупоугольный треугольник; (б) квадрат на остроугольные треугольники.

## Занятие 24 января 1995

1. Являются ли старейший художник среди шахматистов и старейший шахматист среди художников одним и тем же лицом — или это не обязательно? Являются ли лучший шахматист среди художников и лучший художник среди шахматистов одним и тем же лицом?

2. Петя задумал число от 1 до 1000. Вася хочет узнать это число, задавая Пете вопросы, на которые возможны ответы «да» и «нет». Какие вопросы он должен задавать, чтобы гарантированно узнать задуманное число после 10 вопросов? Может ли он сделать то же самое, если список из 10 вопросов он должен составить заранее?

3. Сумма углов треугольника всегда равна $180^\circ$. Чему равна сумма углов пятиугольника? Чему равна сумма углов пятиконечной звезды?

4. Из утверждений «$x > 1$», «$x > 2$», «$x > 3$», «$x > 4$», «$x > 5$» три верных и два неверных. Какие?

5. Почему не горит бумажная коробочка, в которой кипятят воду?

6. Царь вызвал двух мудрецов, дал каждому из них карточку (так, чтобы другой её не видел), и сказал: «У каждого из вас на карточке написано целое положительное число, причём эти числа отличаются на единицу». После этого царь спросил первого мудреца: «Какое у второго число?». — «Не знаю», — ответил первый. Царь спросил второго: «А ты не знаешь, какое число у первого?». — «И я не знаю», — ответил второй. И снова спросил царь первого, и снова тот ответил, что не знает. После этого он спросил второго, и тот сказал, какое число у первого. Какие числа могли быть на карточках и как рассуждал второй?

## Занятие 31 января 1996

1. Что случится с периметром и площадью прямоугольника, если одну его сторону увеличить на 10 процентов, а другую уменьшить на 10 процентов?

2. Двое лыжников шли друг за другом с постоянной скоростью 6 км/ч на расстоянии 200 метров. (а) Начался более трудный участок, где на котором скорость лыжников стала 4 км/ч. Каково расстояние между лыжниками на этом участке? (б) Затем был лёгкий участок со скоростью 7 км/ч, затем очень трудный со скоростью 3 км/ч и, наконец, они вышли снова на участок со скоростью 6 км/ч. Каково расстояние между ними в этот момент?



3. На столе лежат четыре карточки, на которых сверху написано: А, Б, 4, 5. Какое наименьшее количество карточек и какие именно нужно перевернуть, чтобы проверить истинность утверждения «Если на одной стороне карточки четное число, то на другой — гласная буква»?

4. Из Москвы во Владивосток ежедневно ровно в полночь (по московскому времени) выходит поезд, который идет ровно 6 суток. Из Владивостока в Москву ежедневно в полдень (по московскому времени) выходит поезд, который идет также 6 суток. Когда поезда встречаются, машинисты кричат «Ура!». (а) Сколько раз машинист кричит «Ура!» на пути из Москвы во Владивосток? (б) Сколько криков «Ура!» раздается в течение суток? Наконец, (в) сколько железнодорожных составов нужно, чтобы организовать такое движение?

5. У катушки, изображенной на рис. 5, внутренний диаметр равен 1 см, а внешний — 2 см. Катушка катится со скоростью 30 см/с. С какой скоростью для этого человек должен тянуть конец нитки?

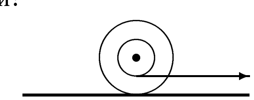

Рис. 5

6. Вася приходит на станцию метро в случайное время и садится в первый пришедший поезд (либо в одну сторону — в школу, либо в другую — в кино). Хотя поезда ходят точно по расписанию, и в обе стороны идет примерно одинаковое число поездов, получается так, что Вася в школу попадает в среднем в три раза реже, чем в кино. Как так может быть?

## Занятие 7 февраля 1996

1. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник шири-

ной 8 клеток и высотой 6 клеток. Можно ли поставить в нём крестики так, чтобы (а) в каждой строке стояло 4 крестика, а в каждом столбце — 3? (б) в каждой строке стояло 3 крестика, а в каждом столбце — 2?

2. В строчку написаны 10 чисел, причём сумма любых трёх соседних равна 15. Первое число равно 7. Чему может быть равно последнее число?

3. В мешке лежит 57 чёрных фасолин и 43 белых. Борис Петрович вынимает из мешка наугад две фасолины. Если они оказываются одного цвета, то он заменяет их на белую фасолину, если разного — то на чёрную. Так он делает до тех пор, пока в мешке не останется только одна фасолина. Какого цвета она будет?

4. Квадратная площадь размера $50 \times 50$ метров выложена плитами размера $1 \times 1$ четырёх цветов — белого, красного, синего и зелёного. При этом плиты одного цвета не лежат рядом и не имеют общего угла. Сколько красных плит на площади?

5. Стакан наполнили водой, накрыли картонкой и перевернули. Почему вода не выливается?

6. Бизнесмен заключил с чёртом следующее соглашение: каждый день бизнесмен даёт чёрту одну купюру, а взамен получает любое (указанное бизнесменом) число купюр меньшего достоинства. Может ли бизнесмен бесконечно долго выполнять свои обязательства, если другого источника денежных купюр у него нет?

## Занятие 14 февраля 1996

1. Володя и Лёша играют в крестики на доске $3 \times 3$ по таким правилам: ходят по очереди, ставя крестик в любую свободную клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход (некуда). Первым ходит Володя. Кто выиграет?

2. Дима и Сэм играют в такую игру. Вначале ладья стоит в левом нижнем углу шахматной доски. Ходят по очереди. На каждом ходу ладью можно сдвинуть или вправо, или вверх (на любое число клеток). Проигрывает тот, кто не может сделать ход (ладья в правом верхнем углу). Первым ходит Дима.



Кто выигрывает при правильной игре?

3. Боря и Игорь играют в такую игру. На столе лежат две кучки спичек по 7 спичек в каждой. Ходят по очереди. За один ход можно взять любое число спичек (хоть все), но только из одной кучки. Выигрывает тот, кто взял последнюю спичку. Боря начинает. Кто выиграет при правильной игре?

4. На доске написано число 100. Таня и Оля ходят по очереди. За один ход разрешается уменьшить написанное на доске число на 1, 2 или 3. У кого получится отрицательное число, проиграл. Первой ходит Таня. Кто выиграет?

5. Андрей и Рома играют в азартную игру. Каждый из них пишет на бумажке целое число, не показывая другому. Затем они открывают бумажки, складывают числа и смотрят, делится ли сумма на 3. Если делится, то Рома платит Андрею 3 рубля, если нет, Андрей платит Роме 2 рубля. Кому выгодна эта игра? Как надо изменить её правила, чтобы игра была честной?

6. Бизнесмен договорился о партии в шахматы по переписке с двумя гроссмейстерами. Он похваляется своему приятелю: «Ну уж у одного я точно выиграю. В крайнем случае, будут две ничьи». Почему он в этом так уверен?

## Занятие 21 февраля 1996

1. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску (а) белую и черную ладьи, не бьющие друг друга? (б) две белые ладьи, не бьющие друг друга? (В чём разница между этими задачами?)

2. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 8 одинаковых ладей, не бьющих друг друга?

3. В классе 20 учеников. Было проведены две контрольные, за каждую из которых ставились отметки от 2 до 5 (не участвовавшие получили двойки). Докажите, что есть два ученика с одинаковыми результатами (по обеим контрольным).

4. Каких чисел больше среди чисел от 000000 до 999999: тех, у которых сумма цифр чётна или тех, у которых она нечётна? Сколько тех и других?

5. Посмотрите на ключ от своей квартиры. Объясните, как работает замок. Как Вы думаете, могут ли все замки в новом 500-квартирном доме (выпущенные одной фирмой) быть разными?

6. Фирма «Русский сувенир» обнаружила в результате «маркéтинга», что многие граждане хотели бы иметь на память десятитысячную купюру, номер на которой совпадает с их телефонным номером. Но их начальный капитал недостаточен, чтобы приобрести купюры со всеми возможными номерами. Тем не менее фирма нашла выход из положения. Какой?

## Занятие 28 февраля 1996

1. Любая из сторон первого треугольника больше любой стороны второго треугольника, а площадь второго больше площади первого. Может ли так быть?

2. Двузначное число написали подряд три раза. (Например, из числа 67 получилось число 676767. Полученное число всегда делится на 7, 13 и на 111. Почему?

3. Можно ли из квадрата со стороной 1 вырезать несколько кругов, сумма диаметров которых больше 1996?

4. Мышка грызёт куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков, кубик за кубиком. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к другому кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика?

5. Имеется кирпич, карандаш, лист бумаги и линейка с делениями. Как найти найти длину большой диагонали кирпича (расстояние между противоположными вершинами)?

6. Миша горько плачет: «Ну почему мне так не повезло с днём рождения! Я уж и не помню, что мне дарили в прошлый раз...» В чём его беда?

## Занятие 6 марта 1996

1. В турнире по крестикам-ноликам по олимпийской системе участвует миллион (1 000 000) игроков. Сколько партий будет сыграно в этом турнире? (В турнире по олимпийской системе проигравший выбывает.)



2. Мистер и миссис Смит по очереди переводят стрелку часов на два или три часа вперёд. Сначала стрелка показывала 1 час. Тот, после чьего хода стрелка показала 5 часов, считается победителем; другой считается проигравшим и идёт готовить чай. Верно ли, что мистеру Смиту не придётся готовить чай, если он уступит право первого хода миссис Смит и будет играть правильно?

3. Володя и Сева по очереди пишут кладут на прямоугольный стол круглые монеты (все монеты одинаковы). Уже лежащие монеты сдвигать нельзя; класть монету поверх других — тоже. Кто не может положить монету так, чтобы она не упала со стола, проигрывает. Первым ходит Володя. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Натуральные числа раскрашены в два цвета. Докажите, что можно так выбрать три числа $A$, $B$ и $C$ одного цвета, что $A + B = 2C$.

5. Дальтоники не различают цветов. Могут ли они пользоваться светофором? Если да, то почему ГАИ неохотно выдаёт им права?

6. Три разбойника делят между собой большой пирог. Каждый из них мог бы разрезать пирог на три равные части, но остальные ему не доверяют. «Если бы нас было двое, — говорит один из разбойников, — то один разрезал бы пирог на две части, а второй выбрал одну из частей, и каждый был бы уверен, что получил не меньше половины.» Предложите разбойникам способ поделить пирог так, чтобы каждый был уверен, что ему досталось не меньше трети.

## Задание 13 марта 1996

1. Изменятся ли частное и остаток, если делимое и делитель увеличить в три раза?

2. Можно ли так написать на шести гранях кубика числа от 1 до 6, чтобы числа на соседних гранях не были соседними (то есть отличались бы на 2 или больше)?

3. На плоскости нарисовано 1000 точек. Всегда ли можно

провести прямую так, чтобы по каждую сторону от неё было ровно 500 точек?

**4.** На окружности поставлено (в некотором порядке) 10 красных точек и 10 синих. Докажите, что число пар соседних красных точек равно числу пар соседних синих точек.

5. Маховик подвешен на двух нитках, намотанных на ось. Его отпускают, и он движется вниз, раскручиваясь. Дойдя донизу, он начинает подниматься вверх. Почему?

**6.** У Димы было 7 картофелин, у Гриши было 5, а у Яши вообще не было. Они сварили картошку и разделили полученную тюрю поровну на троих. Благодарный Яша дал Диме с Гришей 12 конфет. Как они должны поделить их по справедливости?

## Занятие 20 марта 1996

**1.** Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 25. Найдите уменьшаемое.

2. Передние покрышки у автомобиля стираются через 25000 км пути, а задние через 15000 км пути. Сколько можно проехать, если вовремя поменять покрышки местами, чтобы они стёрлись одновременно? В какой момент их нужно менять? (Считается, что в передних и задних колёсах стирается одна и та же часть покрышки, причём стирается она равномерно.)

3. Можно ли нарисовать многоугольник и точку внутри него, из которой ни одна сторона многоугольника не видна целиком?

4. Можно ли нарисовать многоугольник и точку вне него, из которой ни одна сторона многоугольника не видна целиком?

5. На столе лежала верёвка (без узла). Лёня подошел к столу, взял веревку за концы двумя руками, и, не выпуская концов верёвки из рук, завязал на ней узел. Как он это сделал?

**6.** Среди любых трёх школьников 7а класса хотя бы один играет в компьютерные игры. Преподаватели решили выгнать



всех, кто играет в компьютерные игры. Сколько школьников останется, если это решение выполнить?

## Собеседование 27 марта 1996 года

**Вариант 1**

**1.** Найдите минимальное целое число, большее 40 100 и являющееся точным квадратом (квадратом другого целого числа).

**2.** Какой угол образуют минутная и часовая стрелки в 11 часов 20 минут?

**3.** Найдите положительное целое число $n$, если известно, что

$$(n+2)(n+3)(n+5)(n+7) = 4\,158.$$

**4.** Числа $a, b, c, d, e$ положительны. Известно, что $ab = 2$, $bc = 3$, $cd = 4$, $de = 5$. Чему равно $e/a$?

**5.** Каждую сторону прямоугольника увеличили на 3 см; в результате его площадь увеличилась на 39 см$^2$. Найдите периметр исходного прямоугольника.

**6.** Как замостить плоскость одинаковыми плитками, имеющими вид квадрата с отрезанным углом (рис. 6)? (Нарисуйте подробную схему укладки плит.)

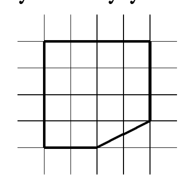

Рис. 6

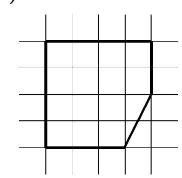

Рис. 7

**7.** Верёвку сложили пополам, потом ещё раз пополам, потом снова пополам, а потом разрезали в каком-то месте. (Режут не на сгибе и сразу все нити.) (а) Сколько кусочков получилось? (б) Два из этих кусочков имели длину 7 см и 3 см. Какова длина верёвки? Укажите все возможности.

**8.** В треугольнике $ABC$ угол $B$ равен 20°, а угол $C$ равен 40°. Биссектриса $AD$ угла $A$ равна 2. Найти разность сторон $BC - AB$. (Подсказка: на стороне $BC$ постройте точку $E$, для которой угол $AEB$ равен 80°.)

**Вариант 2**

**1.** Найдите наименьшее целое число, большее 10 100, которое является точным квадратом (квадратом другого целого числа).

**2.** Какой угол образуют минутная и часовая стрелки в 12 часов 20 минут?

**3.** Известно, что $(n+3)(n+5)(n+7)(n+11) = 4\,095$ и что $n$ — целое положительное число. Найдите его.

**4.** Числа $a, b, c, d, e$ положительны. Известно, что $ab = 3$, $bc = 2$, $cd = 4$, $de = 5$. Найти отношение $a/e$.

**5.** Каждую сторону прямоугольника увеличили на 2 м; в результате его площадь увеличилась на 28 м$^2$. Найдите периметр исходного прямоугольника.

**6.** Как замостить плоскость одинаковыми плитками, имеющими вид квадрата с отрезанным углом (рис. 7)? (Нарисуйте подробную схему укладки плит.)

**7.** Верёвку сложили пополам, потом ещё раз пополам, потом снова пополам, а потом разрезали в каком-то месте.

(а) Сколько кусочков получилось? (б) Два из этих кусочков имели длину 9 см и 4 см. Какова длина верёвки? Укажите все возможности. (Режут не на сгибе и сразу все нити.)

**8.** В треугольнике $ABC$ угол $B$ равен $40°$, а угол $C$ равен $20°$, разность сторон $BC - AC$ равна 4. Найти длину биссектрисы угла $A$. (Подсказка: возьмите на стороне $BC$ точку $E$, для которой угол $AEB$ равен $100°$.)

## Собеседование 3 апреля 1996 года

**Вариант 1**

**1.** Какое число (одно и то же) надо прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{11}{41}$, чтобы она превратилась в $\frac{3}{8}$?

**2.** (а) Найдите минимальное пятизначное число, делящееся на 123. (б) Сколько существует пятизначных чисел, делящихся на 123? (Пятизначные числа — это числа от 10 000 до 99 999.)

**3.** Автомат отрезает от помещённого в него прямоугольника квадрат со стороной, равной меньшей из сторон прямоугольника. Применяя несколько раз подряд этот автомат



к имевшемуся у него прямоугольнику, Вася в конце концов разрезал его на 2 больших квадрата, 3 квадрата поменьше и 5 маленьких квадратов со стороной 1 см. Какой прямоугольник у него был?

**4.** Вычислите произведение, приведя подобные члены:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6).$$

**5.** В треугольнике $ABC$ на стороне $AB$ взята точка $D$, а на стороне $BC$ взята точка $E$. При этом отрезок $DE$ параллелен $AB$ и равен по длине отрезку $AD$. Найдите угол $EAB$, если углы $B$ и $C$ треугольника равны соответственно $45°$ и $60°$.

**6.** Как замостить плоскость одинаковыми плитками, показанными на рис. 8? Плитки нельзя переворачивать другой стороной. (Нарисуйте подробную схему укладки плиток.)

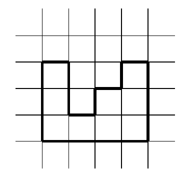

Рис. 8

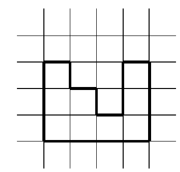

Рис. 9

**7.** (а) Найдите положительное число (не обязательно целое), при делении которого на $10/21$ и $4/15$ в частном получаются целые числа. (б) Найдите *наименьшее* такое число.

**Вариант 2**

**1.** Какое число (одно и то же) надо прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{36}{91}$, чтобы она превратилась в $\frac{4}{9}$?

**2.** (а) Найдите минимальное пятизначное число, делящееся на 213. (б) Сколько существует пятизначных чисел, делящихся на 213? (Пятизначные числа — это числа от 10 000 до 99 999.)

**3.** Автомат отрезает от помещённого в него прямоугольника квадрат со стороной, равной меньшей из сторон прямоугольника. Применяя несколько раз подряд этот автомат к имевшемуся у него прямоугольнику, Вася в конце концов разрезал его на 3 больших квадрата, 2 квадрата поменьше и

6 маленьких квадратов со стороной 1 см. Какой прямоугольник у него был?

4. Вычислите произведение, приведя подобные члены:

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5).$$

5. В треугольнике $ABC$ на стороне $AB$ взята точка $D$, а на стороне $AC$ взята точка $E$. При этом отрезок $DE$ параллелен $BC$ и равен по длине отрезку $EC$. Найдите угол $ABC$, если углы $BAC$ и $BCD$ равны соответственно $55^\circ$ и $25^\circ$.

6. Как замостить плоскость одинаковыми плитками, показанными на рис. 9? Плитки нельзя переворачивать другой стороной. (Нарисуйте подробную схему укладки плиток.)

7. (а) Найдите положительное число (не обязательно целое), при делении которого на $15/8$ и $21/10$ в частном получаются целые числа. (б) Найдите *наименьшее* такое число.

## Собеседование 6 апреля 1996 года

1. Каким днём недели было 6 апреля 1957 года? В году 365 дней, если он не високосный (366 дней); високосные годы — это те, которые делятся на 4 (исключения бывают только в начале столетий).

2. В четырёхугольнике $ABCD$ продолжения противоположных сторон $AB$ и $CD$ пересекаются под углом $20^\circ$; продолжения противоположных сторон $BC$ и $AD$ также пересекаются под углом в $20^\circ$, Докажите, что два угла в этом четырёхугольнике равны, а два других отличаются на $40^\circ$.

3. Двое пловцов одновременно начали плыть по 25-метровой дорожке бассейна со скоростями 1,4 м/с и 1,1 м/с. Доплывая до конца дорожки, каждый из пловцов поворачивает назад. Когда более быстрый пловец впервые обгонит более медленного (плывя в ту же сторону)? На каком расстоянии от места старта это произойдёт?

4. Квадратное колесо катится по дороге. Нарисуйте траекторию его оси (находящейся в центре колеса). Из каких кривых она состоит?



5. Сумма трех различных чисел (не обязательно целых) равна 10, а разница между большим и меньшим из них равна 2. Каким может быть среднее по величине число?

* * *

6. Река с параллельными прямыми берегами имеет ширину 100 метров. На одном из берегов реки есть пристань. Есть остров периметра 800 метров; других островов нет. Докажите, что можно доплыть от пристани до другого берега реки, проплыв не более 300 метров (минуя остров).

7. Квадрат разрезан на 5 прямоугольников, четыре из которых имеют по одному общем углу с квадратом и равновелики друг другу, а пятый находится внутри квадрата (не имея с ним общих кусков сторон). Докажите, что он будет квадратом.

## Собеседование 10 апреля 1996

1. В каких пределах могут находиться сумма $a+b$, разность $a-b$, произведение $a\cdot b$ и частное $a/b$, если $6<a<7$ и $2<b<3$?

2. На столе в ряд стоят банки объёмом 1 литр, $1/2$ литра, $1/3$ литра, $1/4$ литра,…, $1/100$ литра. Первая из них полна воды, остальные пустые. Из первой банки переливают воду (сколько поместится) во вторую, затем из второй в третью, из третьей в четвёртую и т. д. (на последнем шаге последняя банка будет наполнена доверху). Сколько воды окажется в каждой из банок? Найти общее количество воды в первых 50 банках после всех переливаний.

3. Процессия движется из пункта А в пункт Б со скоростью 5 км/ч. Каждые полчаса высылаются гонцы в пункт Б, которые движутся со скоростью 20 км/ч. С какими интервалами прибывают гонцы в Б?

4. Квадратный пруд имеет сторону 500 метров. На одной из его сторон выбрана точка, отстоящая от одного угла на 200 метров и от другого угла на 300 метров. Нарисуйте точки, до которых можно дойти, пройдя не более 900 метров по суше. Из каких кривых состоит граница получившейся области?

5. Работа была поделена поровну между работниками в бригаде. После первого дня посчитали, сколько человек вы-

полнило не менее 30% своей доли — таких оказалось 70% всех работающих. Когда стали считать только тех, кто выполнил не менее 70% своей доли — таких оказалось 30% работавших. Можно ли быть уверенным, что выполнена хотя бы треть работы?

* * *

**6.** Человек приехал на станцию на час раньше обычного и не стал ждать посланную за ним машину, а пошёл ей навстречу, встретил, сел и приехал на 20 минут раньше обычного. Сколько минут он шёл пешком? (Скорости человека и машины постоянны.)

**7.** Грани куба $2\times2\times2$ раскрашены в несколько цветов (каждый из четырёх квадратиков каждой грани — в один из цветов). При этом квадратики, имеющие общую сторону (в том числе находящиеся на разных гранях) имеют разные цвета. Какое максимальное количество квадратиков одного цвета может быть? Какое минимальное число цветов может быть использовано?

## Собеседование 13 апреля 1996 года

**1.** На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 1996$. Вася вычеркнул каждое десятое число, считая от начала (т. е. $10, 20, 30, \ldots$). После этого он вычеркнул каждое девятое число из оставшихся, затем каждое восьмое, каждое седьмое,..., каждое второе. Сколько чисел останется? Какое число будет стоять на последнем месте?

**2.** Докажите равенство:

$$\frac{1}{1\cdot199}+\frac{1}{3\cdot197}+\frac{1}{5\cdot195}+\ldots+\frac{1}{197\cdot3}+\frac{1}{199\cdot1}=\frac{1}{100}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{199}\right).$$

**3.** В выражении $(a+b-c)(d-e-f)(g-h+i)(k+l+m)$ раскрыли скобки. Сколько членов получится? Перед сколькими из них будет стоять знак минус?

**4.** В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен $60^\circ$. Известно, что биссектриса угла $A$, медиана, проведённая из вершины $B$, и высота, опущенная из вершины $C$, пересекаются в одной точке. Докажите, что треугольник равносторонний.



**5.** На плоскости лежит картонный квадрат, который разрешается перекатывать через рёбра (при перекатывании ребро остаётся на месте, а квадрат переворачивается на другую сторону). После нескольких перекатываний квадрат вернулся в то же место плоскости. Докажите, что он оказался в прежнем положении (т. е. все его вершины оказались на исходных местах).

## Собеседование 17 апреля 1996 года

**1.** (а) Докажите, что сумма дробей $1/1000+1/1001+1/1002+\ldots+1/1999+1/2000$ не меньше $1/2$. (б) Тот же вопрос для суммы $1/1000+1/1001+1/1002+\ldots+1/1995+1/1996$.

**2.** Найдите самое большое натуральное число, при делении которого с остатком на 57 частное и остаток получаются равными.

**3.** Известно, что $a/b=c/d$. Докажите, что $(a-b)/(a+b)=(c-d)/(c+d)$.

**4.** В треугольнике $ABC$ взяли точку $D$ на стороне $BC$, точку $E$ на стороне $AC$ и точку $F$ на стороне $AB$. При этом $AF=AE$, $BD=BF$ и $CE=CD$. Известно, что $\angle ABC=20^\circ$. Найдите угол $FED$.

**5.** На плоскости нарисовали треугольник и квадрат. Потом покрасили все точки, попадающие внутрь хотя бы одной из фигур. Может ли при этом получиться 7-угольник? 8-угольник? 13-угольник?

* * *

**6.** Восстановите пример:

```
*******|**
***    |**8**
  **
  **
   ***
   ***
     0
```

**7.** Может ли получиться 14-угольник в задаче 5?

## Собеседование 20 апреля 1996

**1.** Собака преследует зайца, который находится на расстоянии 40 своих прыжков впереди собаки. Собака делает 7 прыжков за то же время, что заяц — 9, но 3 прыжка собаки равносильны 5 прыжкам зайца. Сколько прыжков надо сделать собаке, чтобы догнать зайца?

**2.** Известно, что положительные числа $x$ и $y$ таковы, что $x^4 = 37$, $y^3 = 15$. Какое из чисел $x$ и $y$ больше и почему?

**3.** Вася тренируется на катке. Он положил три шайбы в вершины треугольника, а затем бьёт по одной из шайб так, чтобы она (двигаясь по прямой) прошла в ворота, образуемые двумя другими шайбами. Могут ли после 7 бросков все три шайбы оказаться в прежних местах? Могут ли они после 7 бросков оказаться в вершинах того же треугольника?

**4.** Даны две бутылки с растворами разной концентрации. В одной бутылке 0,5 литра, в другой 0,3 литра. Два одинаковых стаканчика налили доверху (каждый из своей бутылки), после чего растворы влили обратно в бутылки, поменяв их местами. В результате в обеих бутылках получился раствор одинаковой концентрации. Найти объём стаканчиков.

**5.** Петя и Боря смотрят на большой кусок пчелиных сот. Соты состоят из шестиугольников, примыкающих друг к другу так, что в вершине сходятся три шестиугольника. Петя считает число шестиугольников, Боря — число вершин шестиугольников. У кого из них получится больше? Во сколько раз (примерно)? Почему?

* * *

**6.** По плоскости катают (без проскальзывания) кубик: вправо – вверх – влево – вниз – вправо – вверх – . . . Вернётся ли он в исходное положение, и если да, то через сколько раз?

**7.** По кругу стоят 10 корзин. При каких $n$ можно разложить $n$ яблок по этим корзинам так, чтобы количества яблок в соседних корзинах отличались ровно на 1?

## Собеседование 26 апреля 1996 года (физика)

**1.** Груз прицеплен к безмену, который висит на другом



безмене. Сколько весит груз, если безмены показывают 300 и 500 граммов?

**2.** Чтобы завернуть винт, отвёртку крутят по часовой стрелке. В какую сторону нужно крутить гайку, чтобы навернуть её на винт, головка которого вмурована в стену — по часовой стрелке или против?

**3.** Резиновый шарик падает вертикально, крутясь вокруг горизонтальной оси. Отклонится ли он от вертикали, когда отскочит? Если да, до в какую сторону?

**4.** При проигрывании магнитофонной кассеты плёнка движется с постоянной скоростью (4,77 см/с). Какая из втулок кассеты крутится быстрее — приёмная или подающая?

**5.** Как движется Солнце с точки зрения жителей Южного полушария — слева направо или справа налево?

**6.** В пятирожковой люстре можно отдельно включать три и два рожка (двумя клавишами выключателя). Нарисуйте схему соединения люстры и выключателей с электросетью, учитывая, что из потолка в люстру идут 3 провода.

**7.** Половина симметричной U-образной трубки заполнена водой, половина — подсолнечным маслом (до той же высоты). Что произойдёт, если открыть кран внизу трубки?

**8.** Вася закрыл правый глаз и смотрит в зеркало левым. Он видит муху, сидящую на зеркале, на фоне закрытого правого глаза. После этого он открыл правый глаз и закрыл левый. На фоне чего он теперь увидит муху (которая осталась в той же точке зеркала)? Почему?

**9.** В каких из 8 случаев перепиливания тяжёлого бревна на двух опорах (рис. 10) пилу будет зажимать?

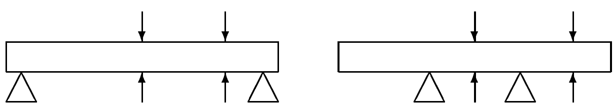

Рис. 10

**10.** Лыжи обычно делают вогнутыми (середина лыжи приподнимается над землёй, когда концы стоят на земле), при этом среднюю часть лыжи обычно намазывают мазью, прилипающей к снегу, а концы — мазью, хорошо скользящей по снегу. Зачем всё это делается?

# Задачи 1996 – 1997 года

Звёздочками отделены дополнительные задачи. Часть из них была в листочках, остальные выдавались школьникам в индивидуальном порядке после проверки всех обязательных задач и никак не регистрировались.

## Числовая ось

**1.** Найти координату середины отрезка, если его концы имеют координаты 17 и 33.

**2.** Найти координаты точек, делящих отрезок $[-1, 4]$ в отношении $2:3$ и $3:4$.

**3.** Точку с координатой $x$ сдвинули на 5 единиц вправо. Какова её координата теперь?

**4.** При каких $x$ точка с координатой $x^2$ находится правее точки с координатой $x$?

**5.** Найти координаты середины отрезка, если его концы имеют координаты $x$ и $y$.

**6.** Нарисовать на числовой оси точки $x$, для которых $x - 1/3$ — целое число.

**7.** $\ldots x/2$ — целое число.

**8.** $\ldots 2x$ — целое число.

**9.** $\ldots x - 2 \leqslant 2x$.

**10.** Нарисовать на числовой оси те точки $x$, для которых среди неравенств

$$x > 1, x > 2, \ldots, x > 9, x > 10$$

ровно три верных.

**11.** $\ldots$ чётное число верных.

**12.** Чтобы не получить двойку по устному счёту, первоклассник Вася пользуется для сложения двумя линейками, приложенными друг к другу (рис. 11). Как он это делает?

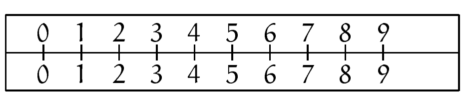


Рис. 11



* * *

**13.** Точки $A$ и $B$ имеют координаты $a$ и $b$. Найти координату точки $C$, делящей отрезок $AB$ в отношении $2:3$.

**14.** Нарисовать на числовой оси те точки $x$, для которых

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-9)(x-10) > 0.$$

**15.** Линейку повернули на $180^\circ$ и приложили к другой такой же. При этом точка 4 нижней линейки совпала с точкой 7 верхней, а точка 5 нижней совпала с точкой 6 верхней. Какое число находится напротив числа 10 на нижней линейке? Напротив числа $x$ на нижней линейке?

**16.** При каких $x$ точка с координатой $x^2$ находится правее точки с координатой $x$?

**17.** На сколько сдвинется середина отрезка на числовой оси, если один его конец неподвижен, а второй сдвинулся на 3 единицы?

**18.** На числовой оси находятся точки $A, B, C, D$. Петя нашел середины отрезков $AB$ и $CD$, соединил их отрезком и взял середину этого отрезка. Вася сделал то же с отрезками $AC$ и $BD$. Доказать, что Петя и Вася получили одну и ту же точку.

**19.** Нарисовать на числовой оси положительные числа, в десятичной записи которых первая цифра после запятой равна 3.

**20.** На числовой оси отмечены точки с координатами 0 и 1. Разрешается отметить середину отрезка, если его концы уже отмечены. Можно ли, соблюдая это правило, отметить точку с координатой $1/3$?

## Абсолютная величина

*Абсолютной величиной* (или *модулем*) числа $x$ называется само $x$, если $x \geqslant 0$, и число $-x$, если $x < 0$. Обозначение: $|x|$. (Например, $|2| = |-2| = 2$.)

**1.** Дима считает, что $|-a|$ при $a < 0$ равно $a$, а Володя — что $-a$. Кто из них прав?

**2.** Нарисовать на числовой оси все точки $x$, для которых $|x| > 1$.

**3.** Как записать расстояние между точками числовой оси с координатами $x$ и $y$, используя знак абсолютной величины?

**4.** Известно, что $|x| = 5$, $|y| = 3$. Какие значения может принимать $|x+y|$? Тот же вопрос для $|x-y|$ и $|x \cdot y|$.

**5.** Нарисовать на числовой оси все точки $x$, для которых $|x-5| \leqslant 3$.

**6.** Нарисовать на числовой оси все точки $x$, для которых $|x+1|+|x+2|=1$.

**7.** Точки $A$ и $B$ имеют координаты 1 и 7. Найти координату точки $C$, если расстояние $AC$ в полтора раза больше расстояния $BC$. (Указать все варианты.)

**8.** Решить уравнение

$$2|x-1|=3|x-7|.$$

**9.** Почему в задачах 7 и 8 ответ одинаковый?

* * *

**10.** Найти выражение, содержащее буквы $x$ и $y$, арифметические операции и знаки абсолютной величины, значение которого равно наибольшему из чисел $x$ и $y$.

**11.** Даны два числа $a$ и $b$. Может ли так случиться, что среди утверждений $a \leqslant b$, $-a \leqslant b$ и $|a| \leqslant b$ два верных и одно неверное?

**12.** Какие значения может принимать $x+y+z+t+u$, если $|x|=1$, $|y|=2$, $|z|=4$, $|t|=8$, $|u|=16$?

**13.** Доказать, что

$$|x-z| \leqslant |x-y|+|y-z|$$

при любых $x$, $y$ и $z$.

**14.** Известно, что $|x+2| \leqslant 3$, $|x-4| \leqslant 5$. Доказать, что $|x| \leqslant 1$.

**15.** Найти наименьшее значение выражения

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|+|x-6|.$$

При каких $x$ оно достигается?

**16.** На прямом шоссе через равные промежутки стоят 6 домов. Где нужно вырыть колодец, чтобы суммарное расстояние от всех домов до колодца было как можно меньше? А если промежутки между домами различны?

**17.** По кругу расположены 7 коробков, в которых лежат 19, 9, 26, 8, 18, 11, 14 спичек (считая по часовой стрелке). За один шаг разрешается переложить спичку из любого коробка в соседний. Какое наименьшее число шагов необходимо, чтобы уравнять число спичек во всех коробка́х?



**18.** Известно, что $|x+2y| \leqslant 4$, $|x+y| \leqslant 3$. Какие значения может принимать $x$?

**19.** На прямой дорожке стоят несколько школьников. Вдоль неё ходит учитель физкультуры. По сигналу «Хоп!» каждый из школьников бежит к тому месту, где стоит учитель, а затем возвращается на своё место. Так повторяется несколько раз. Доказать, что наибольшее расстояние пробежал один из двух крайних школьников.

**20.** Какое наибольшее число решений может иметь уравнение

$$||||x-a|-b|-c|-d|=e$$

относительно $x$ при фиксированных $a, b, c, d, e$?

**21.** По кругу написано 30 чисел. Между каждыми двумя записали модуль их разности, а исходные числа стёрли. Доказать, что полученные 30 чисел можно разделить на две группы с равной суммой.

## Целая часть

*Целой частью* числа $x$ называется наибольшее целое число, не превосходящее $x$. Обозначение: $[x]$. (Например, $[2] = 2$, $[3{,}1]=3$, $[-2]=-2$, $[-3{,}1]=-4$.)

*Дробной частью* числа $x$ называется разность $x-[x]$. Обозначение: $\{x\}$

Таким образом, $x=[x]+\{x\}$, причём $0 \leqslant \{x\} < 1$ для любого числа $x$.

**1.** Нарисовать на числовой оси точки $x$, целая часть которых чётна.

**2.** Нарисовать на числовой оси точки $x$, дробная часть которых равна $1/3$.

**3.** Какие значения может принимать сумма $[x]+[-x]$?

**4.** Какие значения может принимать сумма $\{x\}+\{-x\}$?

**5.** Вася знает, что $[x]=3$, $[y]=4$. Достаточно ли у него данных, чтобы найти $[x+y]$?

**6.** Вася знает, что $\{x\}=0{,}3$, $\{y\}=0{,}4$. Достаточно ли у него данных, чтобы найти $\{x+y\}$?

**7.** Нарисовать на числовой оси те числа $x$, для которых $[x]=[x+2/3]$.

* * *

**8.** Обозначая дни недели от воскресенья до субботы числами 0,

$1, 2, \ldots, 6$, Вася придумал формулу

$$\text{день недели} = 7 \cdot \{\text{число}/7\},$$

которая годится, если первое число месяца было понедельником. Как надо её изменить, если первое число месяца было пятницей?

**9.** Всегда ли верны формулы $[[x+y]+z] = [x+[y+z]]$ и $\{\{x+y\}+z\} = \{x+\{y+z\}\}$?

**10.** Доказать, что $[[x/y]/z] = [x/(yz)]$ для любых положительных целых $x, y, z$.

**11.** Написать выражение, содержащее букву $x$, числа, операцию взятия целой части и арифметические операции, которое равнялось бы ближайшему к $x$ целому числу (любому, если их два).

**12.** Написать формулы для частного и остатка при делении двух целых положительных чисел с остатком (формулы должны использовать арифметические операции и знак целой части).

**13.** Доказать, что (при всех $x$)

$$[x] + [x + \tfrac{1}{n}] + [x + \tfrac{2}{n}] + \ldots + [x + \tfrac{n-1}{n}] = [nx].$$

**14.** Существует ли такое $x$, что $[x] + [2x] + [3x] + [4x] = 99$?

**15.** Найти сумму

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \ldots + [\sqrt{10000}].$$

**16.** Доказать, что

$$[\tfrac{35}{23}] + [2 \cdot \tfrac{35}{23}] + [3 \cdot \tfrac{35}{23}] + \ldots + [22 \cdot \tfrac{35}{23}] = \\ = [\tfrac{23}{35}] + [2 \cdot \tfrac{23}{35}] + [3 \cdot \tfrac{23}{35}] + \ldots + [34 \cdot \tfrac{23}{35}].$$

## Тождества

**1.** Проиллюстрировать формулу $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, сложив квадрат со стороной $a+b$ из квадрата со стороной $a$, квадрата со стороной $b$ и двух прямоугольников со сторонами $a$ и $b$.

**2.** Проиллюстрировать формулу $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$, разрезав квадрат $a \times a$ с вырезанным углом $b \times b$ на две части, из которых можно сложить прямоугольник со сторонами $a-b$ и $a+b$. (Достаточно одного прямого разреза.)

**3.** Доказать, что $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$. Как выглядит соответствующая картинка?



**4.** Если к произведению двух целых чисел, отличающихся на 2, прибавить единицу, то получится точный квадрат (например, $4 \cdot 6 + 1 = 5^2$). Почему?

*Простое число* — это целое число, большее 1, которое нельзя представить как произведение двух меньших целых положительных чисел.

**5.** Простое число после увеличения на 1 становится точным квадратом. Найти все такие числа.

**6.** Доказать, что число 999 991 составное (т. е. не простое).

**7.** Найти $(a+b+c)(a+b-c)$, $(a+b+c)(a-b+c)$, $(a+b-c)(a-b+c)$ (не пользуясь бумагой для промежуточных вычислений).

**8.** В выражении $(a+b-c)(d-e-f)(g-h+i)(k+l+m)$ раскрыли скобки. Сколько членов получится? Перед сколькими из них будет стоять знак минус?

* * *

**9.** В строку написаны точные квадраты: $1, 4, 9, 16, \ldots$ Под каждыми двумя числами написали их разность: $4-1=3$, $9-4=5$, $16-9=7$ и т. д. Доказать, что каждое следующая разность больше предыдущей на 2.

**10.** Написать формулу для $(a+b)^3$ и описать соответствующее ей разрезание куба со стороной $a+b$.

**11.** В старину, когда не было калькуляторов, для быстрого умножения чисел применялись таблицы «четвертей квадратов», которые указывали значения $x^2/4$ для $0, 1, 2, 3, \ldots$ Как выполнить умножение с помощью такой таблицы (и нескольких сложений и вычитаний)?

**12.** Перемножить

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}).$$

**13.** Доказать, что сумма кубов двух положительных целых чисел не может быть простым числом (за исключением единственного случая $1^3 + 1^3 = 2$).

**14.** Доказать, что при положительном целом $n$ число $n^2 + n$ не может быть точным квадратом.

**15.** Четыре подряд идущих целых числа перемножили и к произведению прибавили 1. Доказать, что получился точный квадрат.

**16.** Назовём целое число хорошим, если оно представимо в виде суммы двух точных квадратов. (Например, 5 хорошее, так как $5 = 2^2 + 1^2$, а 3 — нет.) Доказать, что удвоив хорошее число, мы снова получим хорошее число.

**17.** (Продолжение.) Доказать, что произведение двух хороших чисел всегда хорошее.

**18.** Доказать, что сумма

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 3} + \ldots + \\ + \frac{1}{1\cdot n} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$$

(в знаменателях стоят все комбинации чисел от 1 до $n$, в которых числа не повторяются) равна $n$.

## Координаты на плоскости

Нарисовать на плоскости точки $\langle x, y\rangle$, для которых

**1.** $x = y$;

**2.** $x > y$;

**3.** $x = 1$;

**4.** $xy = 0$;

**5.** $x + y = 0$;

**6.** $x + y = 1$;

**7.** $x^2 = y^2$;

**8.** $|x| = |y|$;

**9.** $[x] = [y]$;

**10.** $\{x\} = \{y\}$;

**11.** $|x - 1| < 1/3$;

**12.** $x^2 + y^2 = 0$;

**13.** $y = 2x$;

**14.** $(x - y)(x + y)(y - 2x) = 0$;

**15.** $(x - y)(x + y)(y - 2x) \geqslant 0$;

**16.** $x^2 + y^2 = 2xy$;

**17.** $\max(x, y) \leqslant 2$ (здесь $\max(x, y)$ — наибольшее из чисел $x$ и $y$);

**18.** $\max(x, y) \geqslant 2$;

**19.** точка 1 лежит на числовой оси между точками $x$ и $y$;



**20.** $x(x - 1)(x - 2)y(y - 1)(y - 2) = 0$;

**21.** $x(x - 1)(x - 2)y(y - 1)(y - 2) > 0$.

* * *

**22.** Вершины треугольника имеют координаты $\langle 0, 0\rangle$, $\langle 3, 5\rangle$ и $\langle 5, 8\rangle$. Какова его площадь?

**23.** Две вершины квадрата имеют координаты $\langle 5, 0\rangle$ и $\langle 0, 2\rangle$. Каковы координаты двух остальных вершин?

**24.** Точку с координатами $\langle x, y\rangle$ повернули на $90^\circ$ вокруг точки $\langle 0, 0\rangle$ против часовой стрелки. Найти координаты получившейся точки.

**25.** Точку с координатами $\langle x, y\rangle$ отразили симметрично относительно оси OX, оси OY и относительно прямой $x = y$. Найти координаты трёх получившихся точек.

**26.** Нарисовать те точки $\langle x, y\rangle$, для которых **(а)** $x + x^2 = y + y^2$; **(б)** $x + x^3 = y + y^3$; **(в)** $x + |x| = y + |y|$.

## Четные и нечётные числа

**1.** Каких чисел больше среди чисел от 1 до 1000 — чётных или нечётных?

**2.** Можно ли так расставить знаки в выражении

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm 9 \pm 10,$$

чтобы получился нуль?

**3.** Почему произведение двух нечётных чисел нечётно?

**4.** Заполнить «таблицу сложения»

| | Ч | Н |
|---|---|---|
| Ч | Ч | |
| Н | | |

(например, в левой верхней клетке стоит буква Ч, которая означает, что сумма двух чётных чисел чётна). Как выглядит аналогичная таблица для умножения?

**5.** При каких $n$ сумма

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

чётна?

**6.** При каких $n$ сумма

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

чётна?

**7.** Может ли квадрат целого числа быть чётным, но не делиться на 4?

* * *

**8.** Придя утром в класс, некоторые из школьников пожали друг другу руки. Доказать, что число школьников, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

**9.** В контрольной участвовало 25 человек. Каждый участник получил тройку, четвёрку или пятёрку, причём средний балл оказался равен 4. Доказать, что один из учеников получил четвёрку.

**10.** По окружности написано несколько чисел. Среди произведений соседних чисел ровно 5 отрицательных. Доказать, что одно из чисел равно 0.

**11.** На квадратной доске $7 \times 7$ расставлено 25 шашек, причем их расположение симметрично относительно диагонали квадрата. Доказать, что одна из шашек стоит на этой диагонали.

**12.** (Продолжение) Доказать, что если расположение шашек симметрично относительно обеих диагоналей квадрата, то в центральной клетке стоит шашка.

**13.** Окружность разделена точками на 99 дуг, из которых 3 имеют длину 3 см, ещё 3 имеют длину 2 см, и оставшиеся 3 имеют длину 1 см. Доказать, что какие-то две из точек деления диаметрально противоположны.

**14.** Может ли прямая пересекать все 11 сторон невыпуклого 11-угольника (не проходя через его вершины)?

**15.** Могут ли 9 шестерёнок, сцепленных по кругу, вращаться?

**16.** Все кости домино расположили в цепь. Доказать, что на концах цепи стоят равные цифры.

**17.** Улитка каждые 15 минут поворачивает на $90^\circ$ (а в промежутках ползёт по прямой). Доказать, что она может вернуться в исходную точку лишь через целое число часов.

**18.** На прямой имеется 11 точек, причём сумма расстояний от них до некоторой точки $A$ равна сумме расстояний от них до другой точки $B$. Доказать, что хотя бы одна из этих 11 точек лежит на отрезке $AB$.



**19.** За круглым столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек. Доказать, что хотя бы у одного из сидящих оба соседа — мальчики.

**20.** Можно ли разрезать шахматную доску без клеток $a1$ и $h8$ на прямоугольники $1 \times 2$?

**21.** Три кузнечика на прямой играют в чехарду. Каждую секунду один из них перепрыгивает через другого (но не через двух). Доказать, что они могут вернуться в исходное положение только через чётное число секунд.

**22.** На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 57$. Разрешается заменить любые два числа на их сумму или разность, пока не останется одно число. Может ли это число быть нулём?

**23.** По кругу написаны 4 целых числа. Между каждыми двумя записывают абсолютную величину их разности, а исходные числа стирают. Так повторяют несколько раз. Доказать, что рано или поздно останутся одни нули.

**24.** (Лемма Шпернера) Треугольник КГБ (рис. 12) разрезан на меньшие, вершины которых окрашены в красный, голубой и белый цвета. При этом известно, что вершина К — красная, Г — голубая и Б — белая. Кроме того, известно, что вершины на стороне ГБ либо голубые, либо белые, на стороне КБ — либо красные, либо белые, на стороне ГК — либо голубые, либо красные. Доказать, что хотя бы один из маленьких треугольников имеет вершины всех трёх цветов и что таких трёхцветных треугольников нечётное число.

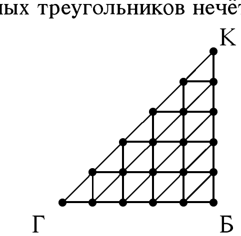


Рис. 12

## Графики движений

**1.** На графике (рис. 13) изображено движение автобуса, сделавшего по пути остановку. Когда автобус ехал быстрее — до или после остановки?

**2.** Движение одной машины изображено точками, второй — сплошной линией (рис. 14). Что происходило на дороге?

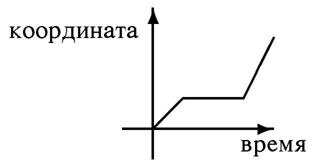


Рис. 13

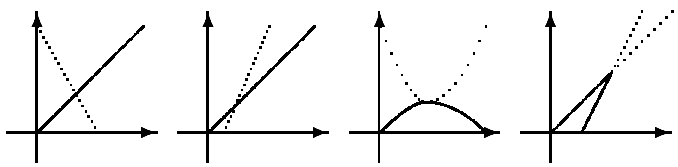

Рис. 14

3. На каких графиках (рис. 15) машина ускоряется (увеличивает скорость), а на каких — замедляется?

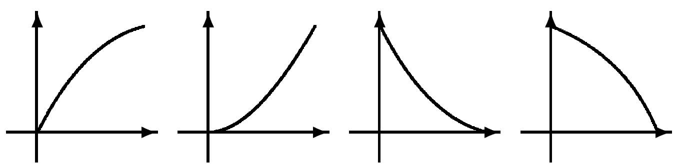

Рис. 15

4. На графиках (рис. 16) показана зависимость высоты воды в бочке от времени. Вода вливается в бочку с постоянной скоростью. Нарисовать примерную форму бочки.

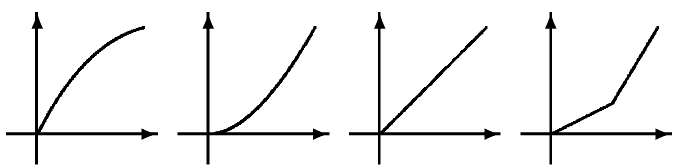

Рис. 16

5. Машина проехала половину времени со скоростью $v$, а вторую половину — со скоростью $w$. Какова её средняя скорость?

6. Машина проехала половину пути со скоростью $v$, а вторую половину со скоростью $w$. Какова её средняя скорость?



7. Бассейн разделён перегородками на две равные части, к каждой из которых ведёт своя труба. Первая половина заполняется за $t$ часов, вторая — за $u$ часов. За сколько времени наполнят бассейн обе трубы, если перегородку снять?

8. Идя навстречу трамваям, пешеход встречал их каждые 5 минут, идя в одну с ними сторону — каждые 7. Как часто он будет их встречать, стоя на месте? (Трамваи движутся с постоянной скоростью и с одинаковыми интервалами. Скорость пешехода также постоянна.)

9. Человек приехал на станцию на час раньше обычного и не стал ждать посланную за ним машину, а пошёл ей навстречу, встретил, сел и приехал на 20 минут раньше обычного. Сколько минут он шёл пешком? (Скорости человека и машины постоянны.)

* * *

10. Два пешехода вышли навстречу друг другу одновременно из пунктов А и Б. Каждый из них идёт с постоянной скоростью, и дойдя до конца дороги, поворачивает обратно. Первый раз они встретились через час после начала движения. Когда они встретятся во второй раз?

11. Вода выливается из цилиндрической бочки через дырку в дне. Нарисовать примерный график зависимости высоты воды от времени.

12. Альпинист начал подъём в 8 часов и поднялся на вершину к 19 часам. Назавтра он начал спуск в 8 часов и закончил его в 19 часов. Доказать, что как бы неравномерно он не двигался при подъёме и спуске, найдётся точка, которую он проходил при подъёме и спуске в одно и то же время (с разницей ровно в сутки).

13. Машина двигалась в одном направлении, причём за любой промежуток в 1 час она перемещалась на 60 км. Могла ли она за 2,5 часа проехать больше 150 км?

14. Улитка ползла в течение 5 минут, всё время находясь под наблюдением. Каждый наблюдатель наблюдал за ней в течение 1 минуты, и за эту минуту она проползла ровно 1 метр. Могла ли улитка проползти 6 метров?

15. (Продолжение) Могла ли она проползти 11 метров?

16. По шоссе в одном направлении, с постоянной скоростью и с равными интервалами идут автобусы. Однажды человек прошёл по

шоссе 4 км и его обогнали 6 автобусов. В другой раз он прошёл (с той же скоростью) 6 км и его обогнали 8 автобусов. В третий раз он прошёл 17 км. Сколько автобусов его обогнали?

## Дроби

**1.** Что больше: 10001/10002 или 100001/100002?

**2.** Найти целые положительные числа $x$, $y$, $z$, $t$, для которых

$$\frac{16}{9} = x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{t}}}.$$

**3.** Какая обыкновенная дробь при переводе в десятичную систему даёт 0,17171717...?

**4.** Вычислить

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{100}\right).$$

**5.** Сумма нескольких различных правильных дробей с числителем 1 может быть равна 1, например $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. Есть ли другие такие примеры?

**6.** Доказать, что

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\ldots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}.$$

(Насколько левая и правая части меньше $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}$?)

**7.** Доля двоечников в классе больше $\frac{2}{5}$, но меньше $\frac{3}{7}$, а всего в классе не больше 15 человек. Сколько в классе двоечников?

**8.** Известно, что $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$; числители и знаменатели этих дробей положительны. Доказать, что дробь $\frac{m+p}{n+q}$ находится между ними.

* * *

**9.** Доказать, что число

$$\alpha = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

не целое.



**10.** (Продолжение) Число $\alpha$ записали в виде несократимой дроби. Чётен ли её числитель? А знаменатель?

**11.** Любая дробь с целыми положительными числителем и знаменателем может быть представлена в виде суммы различных дробей с числителем 1 и целым положительным знаменателем.

**12.** Найти сумму

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{98\cdot99\cdot100}.$$

**13.** Вычислить произведение

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{100}\right).$$

**14.** Какая обыкновенная дробь при переводе в десятичную систему даёт 0,217171717...?

**15.** Может ли сумма 20 дробей с нечётными числителями и знаменателями быть равна 1?

**16.** Сначала бревно хотели распилить на 7 равных частей, и наметили распилы красной краской; потом собрались пилить на 13 равных частей и наметили распилы зелёной краской; наконец, его распилили на 20 равных частей. Доказать, что все части, кроме двух крайних, имеют ровно одну пометку — либо красную, либо зелёную.

## Делимость

**1.** Доказать, что произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 3.

**2.** Доказать, что число $a^3-a$ при любом целом $a$ делится на 3.

**3.** Доказать, что сумма $84+85+86+87+88+89+90$ делится на 7 и на 87.

**4.** Делится ли число 12345678910 на 8?

**5.** Найти трёхзначный и семизначный делители числа 103103103.

**6.** Указать верные среди следующих утверждений: (**а**) если $a$ делится на $c$, а $b$ не делится на $c$, то $a+b$ не делится на $c$; (**б**) если $a$ делится на $c$, а $b$ не делится на $c$, то $ab$ делится на $c$; (**в**) если $a$ и $b$ не делятся на $c$, то $a+b$ не делится на $c$; (**г**) если $a$ и $b$ не делятся на $c$, то $ab$ не делится на $c$; (д) если $ab$ делится на $c$, то хотя бы одно из чисел $a$ и $b$ делится на $c$.

7. Известно, что $a, b, c, d$ — положительные целые числа, что $ab = cd$ и что $a$ делится на $c$. Доказать, что $d$ делится на $b$.

**8.** Известно, что $a + 2$ и $13 - b$ делятся на 11. Доказать, что $a + b$ делится на 11.

**9.** Сколько чисел от 1 до 1000 не делятся на 2? не делятся на 3? не делятся ни на 2, ни на 3?

**10.** Найти все пары целых чисел $x$ и $y$, для которых (а) $x^2 - y^2 = 9$; (б) $x^2 - y^2 = 12$.

**11.** Найти все целые числа от 1 до 50, у которых количество целых положительных делителей (считая единицу и само число) нечётно. Пример: число 4 имеет 3 делителя $(1, 2, 4)$ и потому подходит.

* * *

12. Можно ли разрезать шахматную доску $8 \times 8$ на прямоугольники $3 \times 1$?

13. Известно, что $a^2$ делится на $a-b$. Доказать, что и $b^2$ делится на $a - b$.

14. Числа $a$ и $b$ целые, причём $2a + 3b$ делится на 7. Доказать, что $a + 5b$ также делится на 7.

15. Целые числа $x$, $y$ таковы, что $29x = 41y$. Доказать, что число $x + y$ делится на 10.

16. Найти все пары целых чисел $x$ и $y$, для которых $xy - x + 4y = 16$.

17. Доказать, что произведение любых четырёх последовательных натуральных чисел делится на 24.

18. Число $a$ чётно, но не делится на 4. Доказать, что количество чётных делителей числа $a$ равно количеству нечётных делителей числа $a$. (Например, при $a = 10$ есть два чётных делителя 2 и 10 и два нечётных делителя 1 и 5.)

19. Доказать, что любое шестизначное число вида $abcabc$ (три первые цифры совпадают с тремя последними) делится на 7, 11 и 13.

20. Доказать, что при любом целом $a > 1$ число $a^{100}-1$ делится на $a - 1$.

21. Доказать, что при любом целом $a > 1$ число $a^{99}+1$ делится на $a + 1$.



**22.** Миша придумал теорему: число нечётных делителей числа есть делитель числа чётных делителей этого числа, причём частное равно число чётных делителей числа, не имеющих нечётных делителей, больших 1. Правильна ли эта теорема?

**23.** Число $m$ не делится ни на 2, ни на 3. Доказать, что $m^2 - 1$ делится на 24.

**24.** Найти 4 целых положительных числа с таким свойством: любое число делит произведение остальных, увеличенное на 1. Можно ли найти 5 чисел с таким свойством? а 6?

## Остатки

**1.** Отметить на числовой оси целые числа, которые при делении на 7 дают остаток 2. (На рисунке должны поместиться числа от $-20$ до 20.)

**2.** Число 100*** (звёздочками обозначены три неизвестные цифры) делится на 547. Найти одно из таких чисел.

**3.** Книги на столе пытались связывать в пачки по 2, по 3, по 4 и по 5 книг, и каждый раз оставалась одна лишняя. Сколько книг было на столе? (Известно, что их было не больше 100.)

**4.** Квадрат целого положительного числа оканчивается на ту же цифру, что и само число. Что это за цифра? (Указать все возможности.)

**5.** Доказать, что для любого целого $a$ число $10a$ даёт при делении на 9 тот же остаток, что и само $a$.

**6.** Число $a$ даёт остаток 5 при делении на 9, число $b$ даёт остаток 7 при делении на 9. Можно ли по этим данным определить, какой остаток дают числа $a+b$ и $ab$ при делении на 9?

**7.** Найти остаток от деления $6^{100}$ на 7.

**8.** Число $a$ даёт остаток 6 при делении на 12. Может ли оно давать остаток 12 при делении на 20?

**9.** Доказать, что число и его сумма цифр дают одинаковые остатки при делении на 9.

**10.** Какие остатки может давать точный квадрат при делении на 4?

**11.** Доказать, что уравнение $x^2 = 2y^2$ не имеет решений в целых числах (кроме $x = y = 0$).

* * *

**12.** Пятая степень числа оканчивается на ту же цифру, что и само число. Почему? Для каких ещё степеней это верно?

**13.** Найти число, которое при делении на 2 даёт остаток 1, при делении на 3 — остаток 2, при делении на 4 — остаток 3, при делении на 5 — остаток 4, при делении на 6 — остаток 5 и при делении на 7 даёт остаток 6.

**14.** Квадрат целого положительного числа оканчивается на те же две цифры, что и само число. Что это за цифры? (Указать все возможности.)

**15.** Какое наибольшее число различных целых чисел можно выбрать, если требуется, чтобы сумма и разность любых двух из них не делились на 15?

**16.** Существуют ли целые $x$, $y$, для которых $x^2 + y^2 = 99$?

**17.** Сформулировать признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 11.

**18.** Верен ли такой признак делимости на 27: число делится на 27 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 27?

**19.** Целое положительное число увеличили на 1. Могла ли сумма его цифр возрасти на 8? Уменьшиться на 8? Уменьшиться на 10?

**20.** Последняя цифра точного квадрата равна 6. Доказать, что его предпоследняя цифра чётна.

**21.** Остаток от деления простого числа на 30 — простое число. Почему?

## Подсчет количеств

**1.** Если каждый двадцатый математик — шизофреник, а каждый тридцатый шизофреник — математик, то кого больше: шизофреников или математиков? Во сколько раз?

**2.** На окружности нарисовано 10 черных точек и одна белая. Чего больше: треугольников с вершинами в этих точках, все вершины которых черные, или четырёхугольников с тремя чёрными и одной белой вершиной?

**3.** В классе 20 школьников, которые решали задачи домашнего задания. Оказалось, что каждый школьник решил ровно 15 задач, а каждую задачу решили ровно 10 школьников. Сколько задач было задано?

**4.** Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно составить, переставляя буквы в слове ТОК?



**5.** Тот же вопрос для слова БОБ.

**6.** Сколькими способами можно разменять 100 рублей монетами по 10, 20 и 50 рублей?

**7.** В выпуклом 6-угольнике провели все диагонали. Сколько их? Во скольких точках они пересекаются, если никакие три диагонали не проходят через одну точку?

**8.** Найти коэффициент при $abc$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(a + b + c)^3$.

**9.** На плоскости проведено 5 прямых, никакие две не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения у этих прямых? Зависит ли ответ от расположения прямых?

**10.** (Продолжение) На сколько частей эти прямые делят плоскость? Зависит ли ответ от расположения прямых?

**11.** В произведении $abc$ можно двумя способами расставить скобки, указывающие порядок действий: $(ab)c$ или $a(bc)$. Для произведения $abcd$ таких способов уже пять: $((ab)c)d$, $(a(bc))d$, $(ab)(cd)$, $a((bc)d)$ и $a(b(cd))$. Сколькими способами можно расставить скобки в произведении $abcde$? (Порядок сомножителей сохраняется.)

* * *

**12.** Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно составить, переставляя буквы в слове МАША? Тот же вопрос для слова МАМА.

**13.** Сколькими способами можно представить 10 в виде суммы четырёх положительных слагаемых? (Разбиения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются за одно.)

**14.** Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x+y = 10$? Тот же вопрос для уравнения $x+y+z = 10$.

## Правило произведения

**1.** Автобусные билеты имеют шестизначные номера, от 000000 до 999999. Сколько всего различных номеров? номеров, все цифры которых нечетны?

**2.** (Продолжение) Сколько номеров, в которых любые две соседние цифры различны?

**3.** (Продолжение) Сколько номеров, все цифры которых различны?

**4.** (Продолжение) Сколько номеров, у которых есть хоть одна чётная цифра?

**5.** Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове `КОРТЕЖ`?

**6.** Забор состоит из 20 досок, каждую из них надо покрасить в один из трёх цветов, причём соседние доски должны быть покрашены в разные цвета. Сколькими способами это можно сделать?

**7.** На пятидесятитысячной банкноте есть номер: две русские буквы и 7 цифр. Какое максимальная сумма денег может быть выпущена в обращение такими банкнотами, если все номера должны быть разными?

**8.** Экзаменационный билет содержит вопрос по алгебре, по геометрии, и задачу. Вопросов по алгебре — 20, по геометрии — 30, задач — 100. Сколько различных билетов можно составить?

**9.** Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга?

* * *

**10.** Сколько есть шестизначных автобусных номеров, содержащих цифру 7?

**11.** Сколькими способами можно покрасить квадрат $2\times 2$, составленный из 4 квадратиков, если каждый квадратик надо покрасить в один из $n$ цветов, и соседние (имеющие общую сторону) квадратики должны быть покрашены по-разному?

**12.** Найти сумму всех пятизначных чисел, составленных из нечётных цифр.

**13.** Найти сумму всех пятизначных чисел, составленных из *различных* нечётных цифр.

**14.** Сколько существует шестизначных чисел, не содержащих цифр 0 и 9?

**15.** Сколько существует шестизначных чисел, содержащих цифру 9, но не содержащих цифры 0?

**16.** Сколькими способами можно разбить 14 человек на 7 пар?



**17.** На шахматную доску $8\times 8$ ставят слонов так, чтобы они не били друг друга. Доказать, что число таких расстановок есть точный квадрат.

## Подсчёты с кратностью и без

**1.** Сколькими способами можно выбрать дежурного и дневального из числа 10 зазевавшихся школьников?

**2.** Сколькими способами можно выбрать двух дежурных из числа 10 зазевавшихся школьников?

**3.** Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных из числа 10 зазевавшихся школьников?

**4.** Каждая из $n$ команд сыграла с каждой по одному разу. Сколько всего было игр?

**5.** Сколько диагоналей в выпуклом $n$-угольнике?

**6.** Таня, Дима, Лёша и 4 школьника становятся в очередь. Сколькими способами они могут встать? В скольких из них Таня стоит до Лёши?

**7.** (Продолжение) До Лёши и Димы?

**8.** (Продолжение) До Лёши, но после Димы?

**9.** (Продолжение) В скольких из них Дима стоит рядом с Лёшей (до или после него)?

**10.** Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове `ОТОРОПЬ`? Тот же вопрос для слова `МАТЕМАТИКА`.

**11.** Автобусные билеты имеют шестизначные номера, от 000000 до 999999. Сколько существует номеров, в которых все цифры различны и идут в возрастающем порядке?

* * *

**12.** Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове `САВВАТЕЕВ`? в слове `МЕТАМАТЕМАТИКА`?

**13.** Сколько десятизначных чисел, в которые цифры $1, 2, 3, \ldots, 8$ входят по разу, а цифра 9 — дважды?

**14.** Диск разделён на 10 секторов, которые надо покрасить в 10 цветов. Сколькими способами это можно сделать? (Раскраски, отличающиеся поворотом диска, считаются за одну.)

**15.** Есть десять бусинок разных цветов, из которых составляют ожерелье (нанизывая на кольцевую нитку). Сколько разных ожерелий можно составить? (Два ожерелья считаются различными, если их нельзя перепутать, как ни переворачивай.)

**16.** Игральный кубик имеет 6 граней с цифрами $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Сколько различных игральных кубиков существует, если считать различными два кубика, которые нельзя спутать, как ни переворачивай?

**17.** Диск разделён на 17 секторов, каждый из которых нужно раскрасить в один из $n$ цветов, причём не все сектора должны иметь один цвет. Сколькими способами это можно сделать?

**18.** (Продолжение) Вывести из предыдущей задачи, что $n^{17} - n$ всегда делится на 17, и вообще при простом $p$ (и любом $n$) число $n^p - n$ делится на $p$ (малая теорема Ферма)

**19.** Автобусные билеты имеют шестизначные номера, от 000000 до 999999. Сколько существует номеров, в которых все цифры идут в неубывающем порядке (соседние цифры могут совпадать)?

**20.** 10 человек собрались играть в футбол, для чего им нужно разделиться на 2 команды (по 5 человек в каждой). Сколькими способами это можно сделать?

## Общая мера

Два отрезка *соизмеримы*, если они имеют *общую меру* — третий отрезок, который укладывается в каждом из них целое число раз.

**1.** Доказать, что прямоугольник, стороны которого соизмеримы, можно разрезать на квадраты.

**2.** Лёша дал такое определение: два отрезка соизмеримы, если существует третий, в котором каждый из двух укладывается целое число раз. Равносильно ли это определение обычному?

**3.** Доказать, что отрезки $a$ и $b$ соизмеримы в том и только том случае, когда $a$ и $a + 2b$ соизмеримы.

**4.** От прямоугольника отрезают квадраты со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, столько раз, сколько можно (мы будем называть это «операцией Евклида»). К оставшемуся прямоугольнику снова применяют операцию Евклида и так далее. Сколько и каких квадратов получится, если начать с прямоугольника со сторонами 75 и 21?



**5.** (Продолжение) Применяя операцию Евклида, прямоугольник разрезали на большой квадрат, два квадрата поменьше и два совсем маленьких. Найти отношение сторон исходного прямоугольника.

**6.** Доказать, что если стороны прямоугольника соизмеримы, то применяя операцию Евклида, мы в конце концов разрежем его на квадраты.

**7.** Доказать, что если применение операции Евклида разрезает прямоугольник на некоторое (конечное) число квадратов, то стороны прямоугольника соизмеримы, и сторона самого маленького квадрата является их общей мерой.

**8.** (Продолжение) Доказать, что сторона самого маленького квадрата является *наибольшей* общей мерой и любая другая общая мера укладывается в ней целое число раз.

Результаты задач 6 и 7 позволяют дать эквивалентное определение соизмеримости: стороны прямоугольника несоизмеримы, если к нему можно применять операцию Евклида бесконечное число раз.

**9.** Говорят, что стороны прямоугольника находятся в отношении «золотого сечения», если после отрезания от него квадрата получается прямоугольник, подобный исходному (имеющий то же отношение сторон). Найти отношение золотого сечения.

**10.** Доказать, что отношение золотого сечения иррационально, то есть не выражается дробью с целыми числителем и знаменателем.

**11.** Применяя операцию Евклида к некоторому прямоугольнику, получили один большой квадрат, два квадрата поменьше, два еще меньших, два совсем маленьких и так далее (на каждом следующем шаге получалось два квадрата и процесс никогда не кончился). Найти отношение сторон исходного прямоугольника.

**12.** Сколько квадратов разных размеров будет получаться, если применять операцию Евклида к прямоугольнику с отношением сторон $\sqrt{3} : 1$?

**13.** Используя предыдущие задачи, доказать, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ иррациональны.

* * *

**14.** Доказать, что отрезки $a$ и $b$ соизмеримы в том и только том случае, когда $2a + 3b$ и $5a + 7b$ соизмеримы.

**15.** Применяя операцию Евклида к некоторому прямоугольнику, получили 10 квадратов разного размера и два совсем маленьких квадрата. Найти отношение сторон исходного прямоугольника и выяснить, больше или меньше оно золотого сечения.

**16.** Как отложить на прямой отрезок в 3 см, имея металлический прямоугольник со сторонами 75 и 21 сантиметров?

**17.** К прямоугольнику, стороны которого не больше 1 метра, 20 раз применили операцию Евклида. Доказать, что стороны оставшегося прямоугольника не превышают 1 мм.

**18.** Кузнечик умеет прыгать по прямой в любую сторону на расстояние 1 м и на расстояние $\sqrt{2}$ м. Доказать, что он может попасть в точку, отстоящую менее чем на 1 мм от исходной, но не совпадающую с ней.

**19.** Из угла прямоугольного биллиарда пускают шар под углом $45^\circ$, который отражается от стенок по закону «угол падения равен углу отражения». Доказать, что шар снова попадёт в один из углов в том и только случае, если стороны биллиарда соизмеримы. (Шар считается точкой.)

**20.** Прямоугольник со сторонами 1 и $\pi$ разрезают на квадраты описанным способом. Используя калькулятор, подсчитать число квадратов первых трёх уровней. При этом остаётся прямоугольник с почти равными сторонам. Как надо изменить отношение сторон исходного прямоугольника, чтобы остаточный прямоугольник стал квадратом?

**21.** Отношение двух отрезков равно 1,625, а меньший из них равен $\sqrt{2}$. (**а**) Найти их наибольшую общую меру. (**б**) Найти наименьший отрезок, в котором оба они укладываются целое число раз.

**22.** Отрезок $a$ соизмерим с отрезками $b$ и $c$. Следует ли отсюда, что отрезки $b$ и $c$ соизмеримы между собой?

**23.** В трапеции средняя линия соизмерима с одним из оснований. Следует ли отсюда, что она соизмерима с другим основанием?

**24.** Будут ли следующие пары отрезков соизмеримы: (**а**) $2+3\sqrt{2}$ и $3+2\sqrt{2}$; (**б**) $1/\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$; (**в**) $1/(\sqrt{2}-1)$ и $2+\sqrt{2}$; (**г**) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$?

## Индукция

**1.** Доказать, что любая сторона (**а**) четырёхугольника; (**б**) пятиугольника; (**в**) произвольного $n$-угольника меньше суммы остальных его сторон.



**2.** Доказать, что (**а**) $n! \geqslant 3^n$ для $n = 7, 8, 9, \ldots$; (**б**) $2^n \geqslant n^2$ для $n = 4, 5, 6, \ldots$

**3.** Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Доказать, что эти области можно так раскрасить в два цвета, что любые две соседние (граничащие по отрезку или лучу) области будут покрашены в разные цвета.

**4.** Доказать, что двузначные числа от 00 до 99 можно записать в таком порядке, что в каждом следующем отличается от предыдущего только одна цифра и ровно на 1. Доказать аналогичное утверждение для трёхзначных чисел $(000, \ldots, 999)$, четырёхзначных и т. д.

**5.** Доказать, что квадраты $4 \times 4$, $8 \times 8$, $16 \times 16, \ldots$ с вырезанной угловой клеткой можно разрезать на «уголки» из трёх клеток (квадраты $2 \times 2$ с вырезанным углом).

**6.** На сколько изменятся суммы

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

и

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n},$$

если увеличить $n$ на 1? Доказать, что эти суммы равны друг другу при всех $n$.

**7.** Число $x + 1/x$ — целое. Доказать, что числа $x^2 + 1/x^2$, $x^3 + 1/x^3$, $x^4 + 1/x^4, \ldots$ также целые.

**8.** Чтобы разрезать выпуклый $n$-угольник на треугольники, проводя непересекающиеся диагонали, нужно ровно $n-3$ диагонали, не больше и не меньше. Почему?

**9.** Число $111\ldots111$ ($3^n$ единиц) делится на $3^n$. Почему?

* * *

**10.** Игра «Ханойские башни» имеет три вертикальных стержня. На один из них надета пирамидка из колец разного размера (меньшие на больших). (**а**) Как переложить кольца на другой стержень, если перекладывать можно только по одному, большее на меньшее класть нельзя, пирамидка состоит из $n$ колец? (**б**) Доказать, что это можно сделать за $2^n - 1$ перекладываний. (**в**) Доказать, что за меньшее число перекладываний это сделать невозможно.

**11.** Последовательность $2, 3, 5, 9, \ldots$ составлена по такому правилу: если из утроенного члена этой последовательности вычесть удвоенный предыдущий, то получится следующий ($3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$, $3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 9$ и т. д.). Доказать, что все члены этой последовательности — степени двойки, увеличенные на 1.

**12.** Доказать, что квадрат размера $4 \times 4$, $8 \times 8$, $16 \times 16, \ldots$ с вырезанной клеткой (любой) можно разрезать на «уголки» из трёх клеток (квадраты $2 \times 2$ с вырезанным углом).

**13.** В стране $n$ городов. Каждый год открывается авиасообщение между какими-то двумя городами. Доказать, что должно пройти по крайней мере $n - 1$ лет, прежде чем из любого города можно будет попасть в любой (с пересадками).

**14.** Один выпуклый многоугольник расположен внутри другого. Доказать, что периметр внутреннего многоугольника меньше периметра внешнего.

**15.** На доске написаны два числа $1, 1$. Затем между ними вписывают их сумму; получается $1, 2, 1$. Затем между каждыми двумя снова вписывают их сумму: $1, 3, 2, 3, 1$. Такое действие выполняют ещё 10 раз. Сколько чисел будет на доске? Какова будет их сумма?

**16.** Из чисел $1, 2, 3, 4, \ldots, 2n - 1, 2n$ можно выбрать не более $n$ чисел, если требуется, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось на другое. Доказать это (**а**) для $n = 3$; (**б**) для $n = 4$; (**в**) для $n = 5$; (**г**) для произвольного $n$.

**17.** В теории относительности скорости складываются по такому правилу: $v, w \mapsto \frac{v+w}{1+vw}$. Доказать, что результат сложения нескольких скоростей не зависит от того, в каком порядке мы их складываем.

**18.** Доказать, что $2^n \geqslant n^{10}$ при $n \geqslant 100$.

**19.** В последовательности из 10 нулей и единиц разрешается (1) менять первый член; (2) менять член, стоящий после первой единицы. Доказать, что из любой последовательности можно получить любую.

## Неравенства и оценки

**1.** Все стороны треугольника меньше 1. Может ли его площадь быть больше 100?



**2.** Все стороны треугольника больше 100. Может ли его площадь быть меньше 1?

**3.** Все высоты треугольника больше 100. Может ли его площадь быть меньше 1?

**4.** Сумма нескольких положительных чисел больше 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,001?

**5.** Сумма нескольких положительных чисел меньше 1. Может ли сумма их квадратов быть больше 100?

**6.** Сумма двух положительных чисел больше 10. Может ли их произведение быть меньше 0,001?

**7.** Произведение двух положительных чисел больше 10. Может ли их сумма быть меньше 0,001?

**8.** Стороны прямоугольника увеличили на сантиметр. Может ли его площадь увеличиться более чем на квадратный метр?

**9.** Два положительных числа отличаются не более чем на 0,1. Могут ли их квадраты отличаться более чем на 10?

**10.** Два положительных числа отличаются не более чем на 0,1. Могут ли их квадратные корни отличаться более чем на 10?

* * *

**11.** Все медианы треугольника меньше 1. Может ли его площадь быть больше 100?

**12.** Все высоты треугольника меньше 1. Может ли его площадь быть больше 100?

## Сумма и произведение двух чисел

**1.** Сумма двух положительных чисел равна 2. Доказать, что их произведение не превосходит 1.

**2.** Сумма двух положительных чисел меньше 2. Доказать, что их произведение меньше 1.

**3.** Доказать, что $x + 1/x \geqslant 2$ для любого положительного $x$.

**4.** Из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат. Почему?

**5.** Из всех прямоугольников данной площади наименьший периметр имеет квадрат. Почему?

**6.** Доказать, что $\sqrt{xy} \leqslant (x+y)/2$ для любых неотрицательных $x$, $y$.

**7.** Доказать, что $xy \leqslant (x^2+y^2)/2$ для любых $x$ и $y$.

**8.** Доказать, что при постоянной сумме двух чисел их произведение тем больше, чем ближе числа друг к другу.

* * *

**9.** Рычажные весы имеют не совсем одинаковые плечи, и потому продавец отвешивал один килограмм сахара на левой чашке весов, а второй (тому же покупателю) — на правой. Выиграл покупатель или проиграл?

**10.** Корабль плывёт из А в Б по течению реки, а затем возвращается против течения (скорости течения и корабля постоянны). Потратит ли он на все путь больше или меньше времени, чем на равный путь по озеру?

**11.** Какую наибольшую площадь можно отгородить на берегу прямоугольным забором длины не более 100 метров? (Четвёртая сторона прямоугольника — берег; там забор не нужен.)

**12.** Доказать неравенство $\sqrt{xy} \leqslant (x+2y)/(2\sqrt{2})$.

## Системы счисления

**1.** Имеется 6 больших мешков с монетами, во всех монеты настоящие и весят 10 граммов, а в одном фальшивые и на один грамм легче. Как с помощью одного взвешивания (на весах, показывающих суммарный вес положенных на них монет) определить, в каком мешке фальшивые монеты?

**2.** Тот же вопрос, если фальшивые монеты могут быть в нескольких мешках.

**3.** Доказать, что каждое целое положительное число можно представить в виде суммы различных степеней двойки, причём единственным способом.

**4.** Продолжить таблицу и объяснить правило её построения:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
| 0 | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | ... |

(Записи в нижней строке называют сделанными в двоичной системе счисления.)



**5.** На доске написано число 0. С написанным числом разрешается выполнять два действия: (1) увеличить его вдвое; (2) увеличить его вдвое и прибавить 1. Сколькими способами можно получить на доске число 1000 (если вообще можно)?

**6.** Найти четыре тройки целых неотрицательных чисел, чтобы выполнялось такое свойство: каждое число от 0 до 80 можно представить в виде суммы четырёх чисел — по одному из каждой тройки.

**7.** На доске написано число 0. С написанным числом разрешается выполнять два действия: (1) увеличить его втрое; (2) увеличить его втрое и прибавить 1. Число назовём доступным, если его можно получить на доске таким способом. Сколько доступных чисел от 0 до 1000?

* * *

**8.** Разложить 1/3 в двоичную периодическую дробь.

**9.** Превратить двоичную периодическую дробь 0,101101101... в обыкновенную.

**10.** Перевести восьмеричное число 2736454 в 16-ричную систему.

**11.** В последовательности чисел $1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ (*числа Фибоначчи*) каждое число равно сумме двух предыдущих. Доказать, что любое целое положительное число можно представить в виде суммы некоторых чисел Фибоначчи, среди которых нет стоящих рядом, и что это можно сделать ровно одним способом.

**12.** Купец хочет взвешивать любое количество фунтов товара от 0 до 40 с помощью чашечных весов, имея всего четыре гири (которые можно класть на любую из чашек). Удастся ли ему это? (Делать несколько взвешиваний нельзя.)

**13.** Бесконечная вправо и вниз таблица заполняется по такому правилу: в каждую клеточку ставится минимальное целое неотрицательное число, которого нет ни слева, ни сверху от него. (Таким образом, первая строка и первый столбец содержат числа $0, 1, 2, 3, \ldots$) Какое число стоит в 101-ой строке на 201-ом месте? Каково общее правило?

## Рекуррентные формулы

**1.** Пешка стоит в углу доски $5 \times 5$ на поле $\langle 1, 1 \rangle$. За один ход ей разрешается сдвинуться вправо или вверх. Найти для каждого поля доски, сколькими способами пешка может на него попасть (например, на поле $\langle 2, 2\rangle$ можно попасть двумя способами: вправо – вверх и вверх – вправо).

2. (Продолжение) Тот же вопрос, если можно идти вправо, вверх, и по диагонали (вправо-вверх).

3. (Продолжение) Тот же вопрос, если можно идти вправо и вверх и нельзя делать два шага вправо подряд.

4. Обозначим через $a(m, n)$ количество различных последовательностей, составленных из $m$ нулей и $n$ единиц. Доказать, что $a(m, n) = a(m-1, n) + a(m, n-1)$ при любых $m, n > 0$. Составить таблицу $a(m, n)$ для $0 \leqslant m, n \leqslant 5$.

5. Для $n = 1, 2, 3, \ldots, 9, 10$ найти количество (а) всех последовательностей нулей и единиц длины $n$; (б) тех из них, в которых нет двух идущих подряд нулей; (в) тех из них, в которых нет трёх идущих подряд нулей.

6. Сколькими способами можно расставить скобки в произведении $n$ сомножителей? Для $n = 3, 4, 5$ это число было подсчитано; сделать это для $n = 6, 7, 8$. (Указание. Последнее умножение может быть в одной из $n-1$ позиций, поэтому искомое число равно сумме ...)

7. Рассмотрим все разбиения целого положительного числа $n$ в сумму целых положительных слагаемых (разбиения, отличающиеся порядком, мы считаем за одно). Подсчитать количество разбиений числа $n$, у которых все слагаемые не превосходят $m$, при $m$ и $n$, не превосходящих 8. Ответом должна быть таблица $8 \times 8$. (Указание. Все разбиения числа $n$, в которых слагаемые не превосходят $m$, делятся на две группы: где слагаемые не превосходят $m-1$ и где наибольшее слагаемое равно $m$.)

* * *

8. На окружности имеется $2n$ точек. Сколькими способами их можно соединить $n$ непересекающимися хордами? Подсчитать это число для $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, 7$.

9. Имеется выпуклый $n$-угольник. Сколькими способами его можно разрезать на треугольники, проводя непересекающиеся диагонали? Подсчитать это число для $n = 3, 4, 5, \ldots, 8$.



10. Кольцевой забор состоит из $n$ досок, каждую из них надо покрасить в один из трёх цветов, причём соседние доски должны быть покрашены в разные цвета. Сколькими способами можно это сделать для $n = 3, 4, 5, 6$? Найти общую формулу для произвольного $n$.

11. На контурной карте нарисовано несколько стран, каждую из которых надо раскрасить в один из $n$ цветов, причём соседние страны должны быть раскрашены в разные цвета. Доказать, что количество вариантов раскраски есть многочлен от $n$.

12. Рассмотрим раскраски забора из $n$ досок в три цвета так, чтобы соседние доски были раскрашены в разные цвета. Пусть $d_n$ — число способов раскрасить забор для фиксированных и различных цветов крайних досок, а $e_n$ — то же число для одинаковых цветов крайних досок. Найти $e_n$ и $d_n$ для $n = 3, 4, 5, 6, 7$.

13. Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = n$, если все $x_i$ должны быть равны 0 или 1? Подсчитать ответ для $1 \leqslant m, n \leqslant 7$.

14. (Продолжение) Тот же вопрос, если все $x_i$ должны быть равны 0, 1 или 2.

15. Автобусный билет называется счастливым, если сумма первых трёх его цифр равна сумме последних трёх. Подсчитать число счастливых билетов. (Указание. Один из возможных способов: подсчитать для двузначных и четырёхзначных билетов, сколько имеется билетов с данной разностью между суммами первой и второй половин.)

16. Для $n = 1, 2, 3, \ldots, 9, 10$ найти количество последовательностей нулей и единиц длины $n$, в которых нет комбинации `001`; тот же вопрос для комбинации `0101`.

## Взаимно однозначные соответствия

1. Сколько (а) пятизначных чисел, содержащих только цифры 1 и 2? (б) вариантов освещения коммунальной кухни, где у каждой из пяти соседок — своя лампочка? (в) слагаемых в произведении $(a+b)(c+d)(e+f)(g+h)(i+j)$? (г) подмножеств у пятиэлементного множества (в подмножество каждый элемент может входить или не входить, порядок элементов не учитывается)? Как убедиться, что во всех этих задачах ответ одинаков, не решая ни одной из них?

2. (а) Сколькими способами можно назначить двух дежурных среди пяти зазевавшихся школьников? (б) Город имеет

форму прямоугольника $3 \times 2$, который разбит прямыми улицами на квадраты $1 \times 1$. Сколько кратчайших путей ведут из одного угла в противоположный? (**в**) Какой коэффициент окажется при $a^3b^2$, если раскрыть скобки в выражении $(a+b)^5$ и привести подобные слагаемые? (г) Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове ОГОГО? (д) Сколько двухэлементных подмножеств у пятиэлементного множества? (е) Сколько трёхэлементных подмножеств у пятиэлементного множества? Как убедиться, что во всех этих задачах ответ одинаков, не решая ни одной из них?

**3.** Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x+y+z=3$? Почему в этой задаче ответ тот же самый, что и в предыдущей? (Указание: ОГОГО $\leftrightarrow 1+1+1$, ГГООО $\leftrightarrow 0+0+3, \ldots$)

**4.** Почему число решений уравнения $x+y+z=30$ в положительных целых числах равно числу решений уравнения $x+y+z=27$ в неотрицательных целых числах?

**5.** Каких подмножеств больше у множества $\{1,2,3,\ldots,9,10\}$ — содержащих 1 или не содержащих 1?

**6.** Все последовательности из 20 нулей и единиц делятся на две группы — те, в которых чётное число единиц, и те, в которых нечётное. Каких больше?

**7.** Сколько существует шестизначных автобусных билетов, сумма цифр которых чётна?

* * *

**8.** Доказать, что счастливых автобусных билетов (у которых сумма первых трёх цифр равна сумме трёх последних) столько же, сколько автобусных билетов с суммой цифр 27.

**9.** Доказать, что число разбиений выпуклого $n$-угольника на треугольники непересекающимися диагоналями равно числу способов расстановки скобок в произведении $n-1$ сомножителей.

**10.** Доказать, что количество разбиений целого положительного числа $n$ на целые положительные слагаемые, не превосходящие $k$, равно количеству разбиений числа $n$ на не более чем $k$ целых положительных слагаемых.

**11.** Сколько существует автобусных билетов, сумма цифр которых делится на 3?



## Принцип Дирихле

**1.** В математической олимпиаде участвовало 900 школьников. Доказать, что можно найти трёх участников, у которых общий день рождения.

**2.** В классе 25 школьников, которые писали четыре контрольные; ни один школьник не прогулял ни одну из контрольных, и все они получили четвёрки и пятёрки. Доказать, что найдутся два школьника, у которых результаты за все контрольные одинаковы.

**3.** Двенадцати школьникам досталось 65 конфет. Доказать, что какие-то двое школьников съели одинаковое число конфет.

**4.** В квадрате со стороной 10 выбрано 100 точек. Может ли так случиться, что расстояние между любыми точками не меньше 2?

**5.** Боря утверждает, что может отгадать любое целое число от 1 до 100, задав не более 6 вопросов, требующих ответа «да» или «нет». Почему он не прав? Скольких вопросов было бы достаточно? Почему?

**6.** На контрольной каждую задачу решило не меньше половины школьников. Доказать, что есть школьник, решивший не меньше половины задач.

**7.** Доказать, что равносторонний треугольник нельзя накрыть двумя равносторонними треугольниками меньшего размера.

**8.** Написано 10 положительных чисел, причём сумма любых трёх из них больше 6. Доказать, что сумма всех чисел больше 20.

**9.** Какое максимальное количество целых чисел можно написать, если требуется, чтобы сумма и разность любых двух из них не делилась на 37?

* * *

**10.** Футбольный турнир проводится в один круг (каждая команда играет с каждой). Доказать, что в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

**11.** В клетках шахматной доски 100 на 100 написаны целые числа, причём числа в соседних клетках отличаются не более чем на 20. Доказать, что на доске есть три одинаковых числа.

**12.** Имеется 11 бесконечных десятичных дробей. Доказать, что найдутся две дроби, совпадающие в бесконечном числе разрядов.

**13.** Имеется 4 различных по весу камня. Как упорядочить камни по весу, сделав не более 5 взвешиваний на чашечных весах без гирь? Можно ли придумать способ, гарантирующий это за 4 взвешивания?

**14.** Та же задача для 5 камней.

**15.** В таблице из 11 строк и 10 столбцов написаны целые числа. Доказать, что можно вычеркнуть некоторые строки (не все — возможно, ни одной), после чего сумма чисел в каждом столбце будет чётной.

## Треугольник Паскаля

Число $k$-элементных подмножеств $n$-элементного множества называется *числом сочетаний из* $n$ *по* $k$, и обозначается $C_n^k$ (или $\binom{n}{k}$).

**1.** Чему равны $C_n^0$ и $C_n^n$? Доказать, что $C_n^k = C_n^{n-k}$ при $n \geqslant 0$ и $0 \leqslant k \leqslant n$.

**2.** Доказать, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**3.** Доказать, что

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

**4.** С использованием обозначения $C_n^k$ записать (а) число последовательностей из $a$ нулей и $b$ единиц; (б) число решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = d$, где все $x_1, \ldots, x_m$ равны 1 или 2 (здесь $m$ и $d$ — целые положительные числа, $m \leqslant d$).

**5.** С использованием обозначения $C_n^k$ записать число решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = d$ (а) в целых неотрицательных числах; (б) в целых положительных числах.

**6.** Переплётчик должен переплести 12 одинаковых книг в красный, синий или зелёный переплёты. Сколькими способами он может это сделать? (Не обязательно использовать все цвета.)



**7.** В *треугольнике Паскаля*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
\multicolumn{9}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}$$

вычислить первые 7 строк.

**8.** Доказать, что в треугольнике Паскаля каждое число равно сумме двух стоящих над ним.

**9.** Вычислить сумму чисел в первых 7 строках треугольника Паскаля. Объяснить наблюдаемую закономерность.

**10.** Знакопеременная сумма чисел в любой строке треугольника Паскаля равна нулю. (Другими словами: сумма чисел, стоящих на чётных местах в любой строке, равна сумме чисел, стоящих на нечётных местах.) Почему?

* * *

**11.** Доказать, что произведение любых 11 последовательных делится на 11! (факториал 11).

**12.** Сколько есть подмножеств множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, для которых выполнено такое условие: никакие два их элемента не отличаются ровно на 1?

**13.** Сколькими способами можно переставить буквы в слове БРАКОДЕЛ, если требуется, чтобы и гласные, и согласные (по отдельности) шли в алфавитном порядке?

**14.** Вычислить $11^2$, $11^3$, $11^4$. Сравнить результат с треугольником Паскаля. Объяснить наблюдаемую закономерность. Будет ли она продолжаться и дальше? Тот же вопрос для чисел $1001^2, 1001^3, \ldots$

**15.** Какие строки треугольника Паскаля состоят целиком из нечётных чисел? целиком (не считая краёв) из чётных чисел?

**16.** Какие строки треугольника Паскаля состоят целиком (не считая краёв) из чисел, делящихся на 3?

17. Возьмём любое число в треугольнике Паскаля и сложим все элементы, начиная с него и идя по прямой вверх-налево. Сумма окажется равной элементу, стоящему снизу под ним. Почему?

## Комбинаторика и алгебра

**1.** Доказать, что коэффициент при $x^{10}$, который получится после раскрытия скобок и приведения подобных в $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^9 + x^{10})^3$, равен числу решений уравнения $a + b + c = 10$ в целых неотрицательных числах.

**2.** Найти коэффициент при $abcde$ в $(a + b + c + d + e)^5$.

**3.** Доказать, что число способов разменять 20 долларов бумажками в 1, 2 и 5 долларов равно коэффициенту при $x^{20}$ в выражении

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{20}) \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 \ldots + x^{20}) \times (1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20}).$$

**4.** Доказать формулу *бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

**5.** Используя формулу бинома, доказать, что сумма чисел в любой строке треугольника Паскаля есть степень 2 и что знакопеременная сумма чисел в любой строке равна 0.

**6.** Найти коэффициент при $a^{10}b^{15}c^{20}$ в $(a + b + c)^{45}$.

**7.** Гоша вычислил произведение $(1+x) \cdot (1+x^2) \cdot (1+x^4) \times (1 + x^8) \cdot (1 + x^{16})$. Тоша доказал, что, имея по одной гире в 1, 2, 4, 8 и 16 граммов, можно набрать любой вес от 1 до 31 грамма, причём единственным способом. Юра сказал Гоше и Тоше: «Вы решали одну и ту же задачу». Почему он так сказал?

## Сравнения

Говорят, что числа $a$ и $b$ *сравнимы по модулю* $m$, если их разность делится на $m$. (Числа предполагаются целыми; мы считаем, что модуль $m$ положителен.) Обозначение: $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$.



**1.** Доказать, что $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$ в том и только том случае, когда $a$ и $b$ дают одинаковые остатки при делении на $m$.

**2.** Найти положительное целое число, которое сравнимо с $-1$ по любому из модулей $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

**3.** Доказать, что сравнения по одному модулю можно складывать и перемножать: если $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$ и $c \equiv d (\mathrm{mod}\ m)$, то $a + c \equiv b + d (\mathrm{mod}\ m)$ и $ac \equiv bd (\mathrm{mod}\ m)$.

**4.** Доказать, что если $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$, то $a^n \equiv b^n (\mathrm{mod}\ m)$ при $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

**5.** Доказать, что $a^n \equiv b^n (\mathrm{mod}\ (a - b))$ при $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ (и при любых $a \neq b$).

**6.** Какие остатки может давать точный квадрат при делении на 3, 5 и 7?

**7.** Найти остатки от деления $16^{101}$ и $18^{101}$ на 17.

**8.** Доказать, что четырёхзначное число $abcd$ сравнимо с $a + b + c + d$ по модулю 9 и с $-a + b - c + d$ по модулю 11.

**9.** Известно, что $7a \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 13)$. Найти остаток от деления $a$ на 13. (Сколько есть возможностей?)

**10.** Известно, что $8a \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 14)$. Найти остаток от деления $a$ на 14. (Сколько есть возможностей?)

**11.** Доказать, что $1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99} + 6^{99}$ делится на 7.

**12.** Известно, что $ac \equiv bc (\mathrm{mod}\ mc)$. Доказать, что $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$.

**13.** Найти остаток от деления $(n^2 - 1)^{101} (n + 1)^{100}$ на $n$.

* * *

**14.** Доказать, что $7777^{2222} + 2222^{7777}$ делится на 9.

**15.** Найти остаток от деления числа $1234567891011\ldots99100$ на 9.

**16.** Доказать, что $1^{100} + 2^{100} + 3^{100} + 4^{100} + 5^{100} + 6^{100}$ делится на 7.

**17.** При каких $n$ число $11^{2n} + 12^n$ делится на 133?

**18.** Известно, что сумма двух точных квадратов делится на 21. Доказать, что она делится на 441.

## Арифметика остатков

**1.** Составить таблицу сложения для остатков по модулю 11. (Такая таблица состоит из 11 строк и 11 столбцов, пронумерованных от 0 до 10. В $m$-ой клеточке $n$-ой строки стоит остаток от деления суммы двух чисел, дающих остатки $m$ и $n$.) Верно ли такое утверждение: в каждой строке и каждом столбце встречаются все остатки ровно по одному разу?

**2.** Решить ту же задачу для умножения. (В этом случае в таблице будет нулевая строка и нулевой столбец.)

**3.** Решить те же задачи для сложения и умножения по модулю 7 и 10.

**4.** Какие числа и по скольку раз встречаются на диагонали (идущей из левого верхнего угла в правый нижний) таблиц сложения и умножения по модулям 5, 7, 11, 17 и 19?

**5.** В последовательности $1, 2, 5, 8, 11, \ldots$ каждое следующее число на 1 больше суммы цифр квадрата предыдущего числа. Какое число стоит на 100-м месте?

**6.** Последовательность остатков от деления $a, 2a, 3a, \ldots$ на 12 (каждый член получается прибавлением $a$ по модулю 12) периодична (при любом $a$ от 0 до 11). Почему? Какие периоды тут встречаются (при различных $a$)?

**7.** Тот же вопрос при делении на 11. Какие периоды тут возможны?

**8.** Последовательность остатков от деления $a, a^2, a^3, \ldots$ на 11 (каждый член получается умножением на $a$ по модулю 11) периодична при любом $a$ от 0 до 10. Почему? Какие периоды тут возможны?

**9.** В последовательности Фибоначчи $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$ каждый член равен сумме двух предыдущих. Заменив каждое число остатком от деления его на 11, мы получим последовательность, в который каждый член равен сумме двух предыдущих по модулю 11. Доказать, что эта последовательность периодична, и найти период.

**10.** Будет ли периодична аналогичная последовательность, если 11 заменить на 13? Каков будет её период?



* * *

**11.** Доказать, что для любого $n$ последовательность остатков от деления чисел Фибоначчи на $n$ периодична (и не имеет предпериода — повторяющийся кусок стоит с самого начала)

**12.** Доказать, что существует число Фибоначчи, оканчивающееся двумя нулями. Доказать, что существует число Фибоначчи, оканчивающееся двумя девятками.

**13.** Запишем два произвольных числа от 0 до 10. Продолжим последовательность, беря каждый член равным сумме двух предыдущих по модулю 11. Доказать, что члены этой последовательности будут повторяться через 10.

**14.** При каких $\alpha$ (не обязательно целых) последовательность дробных частей $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots$ будет периодична?

## Что в лоб, что по лбу

**1.** В таблице $57 \times 91$ расставлены числа. Может ли быть так, что сумма чисел в каждом столбце положительна, а в каждой строке — отрицательна?

**2.** В таблице $m \times n$ расставлены числа так, что сумма чисел в любой строке или столбце равна 57. Доказать, что $m = n$.

**3.** Может ли в таблице $4 \times 4$ сумма чисел в любой строке быть чётным числом, а в любом столбце — нечётным? Тот же вопрос для таблицы $3 \times 5$.

**4.** Может ли работа фирмы за любые пять подряд идущих месяцев быть прибыльной, а по итогам года — убыточной? Может ли такое положение продолжаться в течение 6 лет?

**5.** Кассир считает деньги так: сначала он считает все купюры независимо от их достоинства, потом считает еще раз купюры достоинством больше 1 рубля, затем прибавляет число купюр достоинством больше 2 рублей и так далее. Почему у него получается правильный ответ?

**6.** Все грани многогранника — треугольники, и их $n$ штук. Сколько у него рёбер?

**7.** Для каждой вершины многогранника подсчитали количество граней, сходящихся в этой вершине, и полученные числа сложили. Доказать, что полученная сумма чётна.

**8.** При входе в библиотеку стоят две доски. На одной из них приходящие читатели записывают, сколько человек уже было в библиотеке, когда они пришли. На другой уходящие читатели записывают, сколько осталось человек, когда они ушли. Утром и вечером в библиотеке никого не было. Доказать, что за день на обеих досках были написаны одни и те же числа.

**9.** Клетки шахматной доски пронумерованы от 1 до 64 (в первой строке от 1 до 8 слева направо, во второй — от 9 до 16 и так далее). Как ни поставь на доску 8 ладей, не бьющих друг друга, сумма номеров клеток, на которых они стоят, будет одна и та же. Почему?

## Инварианты

**1.** В турнире по олимпийской системе (проигравший выбывает) приняло участие 100 человек. Сколько было сыграно партий, прежде чем был определён победитель?

**2.** В ящик положили 3 меньших ящика. Затем в некоторые из них также положили по 3 ещё меньших ящика, и так далее. В конце концов оказалось 17 заполненных ящиков (внутри которых есть другие ящики). Сколько в этот момент пустых ящиков?

**3.** По окружности расположено 20 плюсов и 20 минусов. Доказать, что пар соседних плюсов столько же, сколько пар соседних минусов.

**4.** На доске выписаны числа $1, 2, \ldots, 20$. Разрешается стереть любые два числа $a$ и $b$ и написать число (**а**) $a + b - 1$; (**б**) $a + b + ab$. Какое число может остаться после 19 таких операций?

**5.** Любую вершину треугольника можно сдвигать по проходящей через нее прямой, параллельной противоположной стороне. Можно ли такими операциями сделать из равностороннего треугольника со стороной 1 прямоугольный треугольник с катетами, равными 1?

**6.** У числа $100! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100$ вычислили сумму цифр, у полученного числа также вычислили сумму цифр и так далее, пока не осталось однозначное число. Что это за число?



**7.** В ряд стоят 6 сосен и на каждой сидит чиж. Каждую минуту два чижа (на одной или разных соснах) перелетают на соседнюю сосну — один направо, другой налево. Могут ли чижи собраться на одной сосне?

**8.** (Продолжение) А если сосны стоят по кругу, и один из чижей летит по часовой стрелке, а другой — против?

**9.** (Продолжение) А если в ряд стоят 4 сосны, на которых сидят 1, 2, 3, 4 чижа, на какой сосне они смогут собраться?

**10.** В строчку написаны 10 чисел, причём сумма любых трёх соседних равна 15. Первое число равно 7. Чему может быть равно последнее число?

**11.** В мешке лежит 57 чёрных фасолин и 33 белых. Борис Михайлович вынимает из мешка наугад две фасолины. Если они оказываются одного цвета, то он заменяет их на белую фасолину, если разного — то на чёрную. Так он делает до тех пор, пока в мешке не останется только одна фасолина. Какого цвета она будет?

* * *

**12.** К любым двум числам последовательности $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$ разрешается одновременно прибавить или отнять по единице. Можно ли несколькими такими операциями сделать все числа равными?

**13.** Стоят 57 стаканов вверх дном. За ход разрешается перевернуть любые (**а**) 5; (**б**) 6 стаканов. Можно ли за несколько ходов поставить стаканы вниз дном?

**14.** В стране Серобуромалин живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно принимают окраску третьего цвета (например, при встрече серого и бурого хамелеона оба становятся малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

**15.** На каждой клетке доски $9 \times 9$ сидит жук. В какой-то момент каждый жук переполз на одну из соседних клеток. Доказать, что после этого хотя бы одна клетка стала пустой.

**16.** На шахматной доске $9 \times 9$ стояли 9 ладей, не бьющих друг друга. В какой-то момент каждая ладья сделала ход коня. Доказать, что теперь какие-то две ладьи бьют друг друга.

## Графы

**1.** В углах доски $3 \times 3$ стоят шахматные кони — два чёрных и два белых (рис. 17). (**а**) Можно ли поменять чёрных и белых коней местами (получив конфигурацию рис. 18)? (**б**) Можно ли поменять одного чёрного коня с одним белым (получив конфигурацию рис. 19)? (**в**) Если можно (в предыдущих пунктах), какое минимальное число ходов для этого необходимо?

| | | |
|---|---|---|
| Ч | | Ч |
| | | |
| Б | | Б |

Рис. 17

| | | |
|---|---|---|
| Б | | Б |
| | | |
| Ч | | Ч |

Рис. 18

| | | |
|---|---|---|
| Ч | | Б |
| | | |
| Б | | Ч |

Рис. 19

**2.** Выписать в ряд цифры от 1 до 9 (каждую по разу) так, чтобы любые две подряд идущие цифры давали бы двузначное число, делящееся на 7 или на 13.

**3.** Каждый из учеников класса подсчитал, сколько у него в классе друзей (не считая себя). Полученные числа сложили. Получилось нечётное число. Доказать, что кто-то из школьников числит среди своих друзей человека, который не считает его своим другом.

**4.** Доказать, что в любой компании из шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. (Считается, что если А знаком с Б, то Б знаком с А.)

**5.** Нарисовано несколько точек. Некоторые из них соединены линиями. (Такую картинку называют *графом*, точки называют *вершинами*, линии — *рёбрами*.) Известно, что граф *связен*, то есть из любой вершины можно пройти в любую, идя по рёбрам. Доказать, что (число рёбер) $\geqslant$ (число вершин)$-1$.

**6.** (Продолжение) Доказать, что если число рёбер не меньше числа вершин, то граф имеет *цикл*: можно найти замкнутый путь, проходящий по рёбрам, и не проходящий два раза по одному ребру.

**7.** Можно ли нарисовать открытый конверт (рис. 20) и закрытый конверт (рис. 21), не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по одному участку линии дважды?



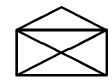

Рис. 20

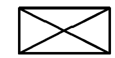

Рис. 21

**8.** Каждый из 20 школьников решил 2 из 20 задач, причём каждую задачу решили ровно два школьника. Доказать, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый школьник рассказал одну из решённых им задач и чтобы все задачи были рассказаны.

* * *

**9.** Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски $4 \times 4$ выкинуть угловые клетки. Можно ли её обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом по одному разу и вернуться на исходное поле?

**10.** Имеется кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая его, сделать из него каркас куба со стороной 10 см? И если нельзя, то в скольких местах придётся эту проволоку сломать?

**11.** Имеется группа островов, соединённых мостами. Турист побывал на всех островах, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведёт с Троекратного, если турист (**а**) не с него начал и не на нём закончил? (**б**) с него начал, но не на нём закончил? (**в**) с него начал и на нём закончил?

**12.** Что можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по одной линии дважды, а что нет?

**13.** В связном графе число вершин ровно на единицу больше числа рёбер. Доказать, что в нём нет циклов.

**14.** На доске отметили 17 точек и соединили каждые 2 из них цветным отрезком: белым, синим или красным. Доказать, что найдутся 3 точки в вершинах одноцветного треугольника.

**15.** Некоторые из 9 школьников подрались. Доказать, что найдутся либо три такие школьника, что каждый подрался с каждым, либо четыре школьника, между которыми не было драк.

**16.** Имеется связный граф. Доказать, что можно удалить одну из его вершин (и все входящие в неё ребра), не нарушив его связности.

## Экзаменационная контрольная работа

### Вариант 1

**1.** Нарисовать на плоскости точки с координатами $\langle x, y\rangle$, для которых (а) $x^2+2x+y^2>3$; (б) $(x+y)(x-1)(y+2)<0$.

**2.** Найти минимальное значение выражения $|x+1|+|x|+ +|x-1|+|x+2|$. При каких $x$ оно достигается?

**3.** Найти все пары целых (не обязательно положительных) чисел $(x, y)$, для которых $x+y+xy=35$. Сколько таких пар существует? (Порядок членов в паре существен.)

**4.** Доказать, что отрезки длиной $1+\sqrt{2}$ и $2+3\sqrt{2}$ несоизмеримы.

**5.** Найти наименьшее возможное значение $x+2y$, если $xy=1$ и $x, y>0$. При каких $x$ и $y$ оно достигается?

**6.** Записать периодическую десятичную дробь $0{,}3737\ldots$ в виде несократимой обыкновенной дроби (частного двух целых чисел).

**7.** Синим цветом на числовой оси отмечены целые числа, которые при делении на 40 дают остаток 7, а красным — те, что дают остаток 17 при делении на 24. Каково наименьшее расстояние между красными и синими точками?

**8.** Найти остаток от деления записанного в шестнадцатиричной системе счисления числа $1234567$ на тринадцать.

**9.** Какое максимальное число попарно не параллельных прямых можно провести на плоскости, если требуется, чтобы угол между любыми двумя был больше $3{,}5°$?

**10.** Сколько есть последовательностей длины 6 из цифр $0, 1, 2$, в которых нет идущих подряд двух одинаковых цифр?

* * *

**11.** Что больше: $101^{100}$ или $2\cdot 10^{200}$?

**12.** С последовательностью из десяти нулей и единиц разрешается делать две вещи: (1) менять в ней первый член; (2) менять член, стоящий после первой единицы. Доказать, что с помощью этих двух операций из любой последовательности можно получить любую.

**13.** Доказать, что для любого целого $n>10$ квадрат можно разрезать на $n$ квадратов.

**14.** Сколько есть последовательностей длины 6 из цифр $0, 1, 2$, в которых никакие два нуля не идут подряд?



**15.** В ряд стоят 50 стаканов, из них половина (на чётных местах) — вверх дном. За один ход разрешается перевернуть группу из любого числа подряд идущих стаканов. Доказать, что нельзя поставить все стаканы вниз дном, сделав менее 25 ходов.

**16.** Найти сумму $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\ldots+[\sqrt{400}]$. (Квадратные скобки обозначают целую часть.)

### Вариант 2

**1.** Нарисовать все такие $\langle x, y\rangle$, для которых (а) $[x]=[2y]$; (б) $[x]=2[y]$.

**2.** Найти остаток при делении суммы $1^2+2^2+3^2+\ldots+ +100^2$ на 7.

**3.** Подряд написали все числа от 1 до 1000. Сколько всего цифр понадобилось? Сколько раз при этом встретилась цифра 7?

**4.** Известно, что $a+b+c=7$, а $a^2+b^2+c^2=17$. (а) Найти $ab+bc+ac$. (б) Можно ли найти две различные тройки $a, b, c$ (отличающиеся порядком различными не считаются) с такими свойствами?

**5.** Всякое ли натуральное число можно представить как разность квадратов двух целых чисел?

**6.** На какую максимальную величину квадрат числа может быть меньше самого числа?

**7.** Найти площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости прямыми $x+y=-3$, $x-2y=6$ и $y=7$.

**8.** Сколько существует чисел от 0 до 99999, сумма цифр которых (а) не превосходит 7; (б) не превосходит 22?

**9.** Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове КАТАЛОГ, если требуется, чтобы буква К находилась между двумя буквами А (расстояние между которыми может быть любым)?

**10.** Два одинаковых стакана заполнены растворами спирта в воде на $2/3$ — в одном концентрация спирта 60%, в другом 40%. Разрешается переливать любое количество жидкости из одного стакана в другой (после чего она перемешивается). Можно ли после конечного числа переливаний добиться, чтобы во втором стакане концентрация спирта стала больше, чем в первом?

**11.** Имеется 6 килограммов сахара общей ценой 40000, 4 килограмма гречки общей ценой 27000 и 5 килограммов риса общей ценой 33000. Какова наибольшая стоимость продуктов, которые можно унести в мешке, выдерживающем 12 килограммов?

**12.** Написано 10 чисел, сумма любых трех из них больше семи. Может ли случиться так, что (а) сумма любых семи из них меньше шестнадцати? (б) сумма любых пяти из них меньше двенадцати?

**13.** В магическом квадрате $3 \times 3$ сумма цифр в каждой строке, в каждом столбце и по любой из двух диагоналей равна 15. Доказать, что число в центральной клетке равно 5.

**14.** На доске написаны числа $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$. Разрешается взять любые 6 из них и увеличить на 1. Так можно делать многократно. Можно ли добиться, чтобы все числа стали равными?

**15.** Клетки доски $8 \times 8$ раскрашены в четыре цвета, причём в любом квадрата $2 \times 2$ все четыре цвета встречаются по разу. Доказать, что все четыре угловые клетки (а) любого прямоугольника $2 \times 8$; (б) всей доски имеют различные цвета.

# Задачи 1997 – 1998 года

В этом году листки по-прежнему делились на «обязательную часть» и «дополнительные задачи» (отделены звёздочкой). Листок «Слабо?» в основном составлен из трудных задач предыдущих листков. В конце главы приведены задачи экзамена, который, в отличие от предыдущего года, был устным.

## Осевая симметрия

Точка $A'$ называется *симметричной* точке $A$ *относительно прямой* $l$ (называемой *осью симметрии*), если отрезок $AA'$ перпендикулярен этой прямой и делится ей пополам. Каждая точка прямой $l$ считается симметричной самой себе.

**1.** Точки $A$ и $A'$ симметричны относительно прямой $l$, точка $X$ лежит на этой прямой. Доказать, что отрезки $XA$ и $XA'$ равны и образуют равные углы с прямой $l$.

**2.** Точка $A$ лежит внутри острого угла $\alpha$ с вершиной в точке $O$, точки $A'$ и $A''$ симметричны ей относительно сторон угла. Найти угол $A'OA''$.

**3.** Точка $A$ симметрична точке $B$ относительно прямой $l$, точка $B$ симметрична точке $C$ относительно прямой $m$, наконец, точка $C$ симметрична точке $A$ относительно прямой $n$. Доказать, что прямые $l$, $m$ и $n$ либо пересекаются в одной точке, либо параллельны друг другу.

**4.** Доказать, что симметрия сохраняет расстояния: если точки $A'$ и $B'$ симметричны $A$ и $B$ относительно некоторой прямой, то расстояния $AB$ и $A'B'$ равны.

**5.** Доказать, что симметрия сохраняет прямые: если точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой, то симметричные им точки $A'$, $B'$ и $C'$ также лежат на одной прямой.

**6.** Даны две точки $A$ и $B$, не лежащие на прямой $l$. Найти на прямой $l$ точку $X$, для которой сумма $AX$ и $BX$ минимальна. (Точки $A$ и $B$ могут лежать по разные стороны от $l$ или по одну сторону.)

**7.** (Продолжение) Найти точку $X$, для которой разность расстояний $AX$ и $BX$ максимальна по абсолютной величине. Всегда ли такая точка существует?

**8.** Луч света, отражающийся по закону «угол падения равен углу отражения», выпускают внутри угла в $1^\circ$ с зеркальными стенками. Сколько раз он отразится от стенок? (Указать все возможности.)

* * *

**9.** Даны две параллельные прямые $l$ и $m$. Выбрав точку $A$ произвольно, построим точку $B$, симметричную $A$ относительно прямой $l$, а затем точку $C$, симметричную $B$ относительно прямой $m$. Доказать, что расстояние $AC$ не зависит от выбора точки $A$.

**10.** Внутри острого угла выбрана точка $A$. Построить точки $B$ и $C$, лежащие на сторонах этого угла (по одной на стороне), для которых периметр треугольника $ABC$ минимален.

**11.** Картонный треугольник, все стороны которого различны, перекатывают по плоскости (отражая симметрично относительно сторон). Доказать, что можно добиться, чтобы стороны треугольника оказались параллельны своему начальному положению, но треугольник оказался бы в другом месте плоскости.

**12.** В остроугольном треугольнике найти три точки на сторонах, являющиеся вершинами треугольника с минимальным периметром.

**13.** Даны две прямые, пересекающиеся под углом $25^\circ$, и некоторая точка $A$, которая отражается симметрично относительно этих прямых (сколько угодно раз и в любом порядке). Отметим все точки, которые могут получиться таким образом. Сколько их будет? (Ответ зависит от положения точки $A$. Указать все возможности.)

**14.** Что получится в предыдущей задаче для других углов между прямыми?

**15.** Шар отражается от стенок прямоугольного бильярда по закону «угол падения равен углу отражения». Фиксированы две точки $A$ и $B$ внутри бильярда. Сколькими способами шар может попасть из $A$ в $B$, испытав 1 отражение? 2 отражения? $n$ отражений? (Для простоты можно забыть про случаи, когда шар попадает в угол.)

**16.** Доказать, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, проведенными параллельно сторонам, равны.

**17.** На биссектрисе внешнего угла $C$ треугольника $ABC$ взята точка $M$. Доказать, что $MA + MB > CA + CB$.

**18.** По разные стороны от прямой $l$ даны точки $A$ и $B$. Построить точку $O$ на прямой $l$ так, чтобы лучи $OA$ и $OB$ образовывали равные углы с прямой $l$.



## Центральная симметрия

Точки $A$ и $A'$ называются *симметричными относительно точки* $O$ (называемой *центром симметрии*), если точка $O$ является серединой отрезка $AA'$.

**1.** Доказать, что если точки $A'$ и $B'$ симметричны точкам $A$ и $B$ относительно некоторой точки $O$, то отрезки $AB$ и $A'B'$ равны и параллельны.

**2.** Доказать, что если три точки лежат на одной прямой, то и симметричные им (относительного некоторого центра) точки также лежат на одной прямой.

**3.** Фиксированы две точки $L$ и $M$. Взяв произвольную точку $A$, мы строим точку $B$, симметричную ей относительно $L$, а затем точку $C$, симметричную $B$ относительно $M$. Доказать, что расстояние $AC$ не зависит от выбора точки $A$.

**4.** Дан угол и точка внутри него. Провести через точку прямую, отрезок которой между сторонами угла делится этой точкой пополам. (Другими словами: найти на сторонах данного угла точки, симметричные друг другу относительно данного центра.)

**5.** Даны три точки $A$, $B$ и $C$. Построить точку, которая после трех последовательных симметрий с центрами в $A$, $B$, $C$ (в указанном порядке) возвращается в исходное положение.

**6.** Доказать, что точки, симметричные точкам заданной окружности относительно заданного центра, лежат на окружности.

**7.** Через точку пересечения двух окружностей провести прямую, на которой эти окружности отсекают равные хорды.

**8.** Двое по очереди кладут монеты на прямоугольный стол, причем они не должны накрывать друг друга и падать со стола. Сдвигать уже лежащие монеты нельзя. Кто не может сделать ход, проигрывает. Как должен играть первый, чтобы выиграть?

**9.** Дан параллелограмм $ABCD$ (вершины указаны по часовой стрелке) и точка $X$. Через точки $A$, $B$, $C$ и $D$ проведены прямые, параллельные $CX$, $DX$, $AX$ и $BX$ (соответственно). Доказать, что эти четыре прямые пересекаются в одной точке.

* * *

10. На плоскости бывают центральная и осевая симметрии, в пространстве аналогичных им видов симметрий три. Как вы думаете, что это за симметрии?

11. На прямой выбраны четыре точки $A, B, C, D$, идущие в указанном порядке, причём $AB = CD$. Доказать, что $AP + PD \geqslant BP + PC$ для любой точки $P$ на плоскости.

12. Через точку $O$ внутри треугольника требуется провести прямую, отрезок которой внутри треугольника делится точкой $O$ пополам. Сколько решений имеет задача? (Ответ зависит от точки $O$. Требуется нарисовать, для каких точек задача имеет то или иное число решений.)

13. Провести через заданную точку внутри угла прямую, отсекающую от него треугольник наименьшей площади.

14. Четырёхугольник вписан в окружность. Из середины каждой из его сторон опущена высота на противоположную сторону. Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке.

## Повороты

Симметрию можно рассматривать как поворот на $180°$. Можно рассматривать повороты на меньшие углы: *поворот вокруг точки* $O$ (называемой *центром поворота*) *на угол* $\alpha$ переводит точку $X$ в точку $X'$, для которой $OX = OX'$ и $\angle X'OX = \alpha$, причём вращение происходит против часовой стрелки («в положительном направлении», как говорят). Поворот на тот же угол по часовой стрелке называют «поворотом на $-\alpha$».

В соответствии с этим определением повороты на $+180°$ и на $-180°$ представляют собой центральную симметрию.

1. Доказать, что поворот сохраняет расстояния: если точки $A'$ и $B'$ получаются из точек $A$ и $B$ поворотом на некоторый угол $\alpha$ вокруг некоторой точки $O$, то $AB = A'B'$.

2. (Продолжение) Доказать, что прямые $AB$ и $A'B'$ пересекаются под углом $\alpha$.

3. Доказать, что точки, лежавшие на одной прямой (окружности), после поворота (вокруг данной точки на данный угол) остаются лежать на одной прямой (окружности).



4. Дана точка и две прямые. Построить равносторонний треугольник, одна из вершин которого находится в данной точке, а две другие лежат на данных прямых. Сколько решений может иметь эта задача?

5. Отрезок $AC$ разбит на две части точкой $B$, и на отрезках $AB$ и $BC$ как на сторонах построены равносторонние треугольники $APB$ и $BQC$ (по одну сторону от $AC$). Доказать, что середины отрезков $AQ$ и $PC$ образуют с точкой $B$ равносторонний треугольник.

6. Внутри квадрата $ABCD$ (вершины перечислены по часовой стрелке) взята точка $M$ и проведены отрезки $AM$, $BM$, $CM$ и $DM$. В треугольниках $AMB$, $BMC$, $CMD$ и $DMA$ проведены высоты из точек $A$, $B$, $C$ и $D$ соответственно. Доказать, что они (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

7. На сторонах $AB$ и $BC$ ромба $ABCD$, в котором угол $B$ равен $120°$, взяты точки $M$ и $N$, причём $MB = NC$. Доказать, что треугольник $MND$ равносторонний.

* * *

8. Через заданную точку внутри окружности провести хорду заданной длины.

9. Вписать квадрат в заданный параллелограмм.

10. Символ «инь-янь» выглядит так: на горизонтальном отрезке $AC$ как на диаметре строится круг с центром в $B$; к верхнему полукругу добавляется (нижний) полукруг с диаметром $AB$ и отнимается верхний полукруг с диаметром $BC$. Как разделить полученную фигуру на 7 равных частей?

11. Дан остроугольный треугольник $ABC$. Найти точку $X$, для которой сумма расстояний $AX + BX + CX$ минимальна. (Ответ: из этой точки все стороны верны под углом $120°$.)

## Параллельный перенос

*Направленным отрезком* называют отрезок, у которого один из концов объявлен «началом»; $\overrightarrow{AB}$ обозначает направленный отрезок с началом $A$ и концом $B$.

Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ считаются равными, если они равны по длине, направлены в одну сторону и параллельны (или лежат на одной прямой).

**1.** Даны четыре точки $A$, $B$, $C$ и $D$. Доказать, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ в том и только том случае, когда $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

**2.** (Продолжение) ...и в том и только случае, когда середины отрезков $AD$ и $BC$ совпадают.

**3.** Доказать, что если (для данных шести точек $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$, $C'$) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$, то и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Пусть задан направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Параллельный перенос на $\overrightarrow{AB}$ переводит произвольную точку $X$ в точку $X'$, для которой $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$.

**4.** Доказать, что параллельный перенос (вслед за поворотами и симметриями) сохраняет расстояния, переводит прямые в прямые и окружности в окружности.

**5.** Даны две точки $A$ и $B$ и две прямые $c$ и $d$. Найти на прямых $c$ и $d$ точки $C$ и $D$, для которых $ABCD$ является параллелограммом (вершины которого идут в указанном порядке). Сколько решений может иметь эта задача?

**6.** Деревни А и Б разделены рекой (берега — параллельные прямые). Где надо построить мост (перпендикулярно берегам), чтобы общий путь от А до Б через мост был наименьшим?

**7.** Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка $M$. Доказать, что можно построить четырёхугольник, стороны которого равны $AM$, $BM$, $CM$ и $DM$, а диагонали равны сторонам исходного прямоугольника.

* * *

**8.** Деревни А и Б расположены по разные стороны прямой железной дороги. Где надо построить платформу заданной длины, чтобы суммарное расстояние от А и Б до платформы было наименьшим? (Расстоянием до платформы считается расстояние до ее ближайшей точки.) Сколько решений имеет задача?

**9.** Имеется много одинаковых плиток, имеющих форму неправильного выпуклого четырёхугольника. Доказать, что ими можно замостить плоскость. (Плитки разрешается переворачивать.)

**10.** Даны две параллельные прямые и точка между ними. Построить окружность, проходящую через эту точку и касающуюся обеих прямых.



**11.** Фигура на клетчатой бумаге имеет площадь $N$. Доказать, что её можно сдвинуть параллельно себе так, чтобы она покрыла (**а**) не менее $N$ вершин клеток; (**б**) не более $N$ вершин клеток. (Клетки имеют единичные стороны.)

## Композиции преобразований

Пусть $F$ и $G$ — два преобразования (например, симметрии, повороты и т. п.). Их *композицией* называется преобразование, которое получается, если сначала применить $F$, а потом $G$. Это преобразование обозначается $G \circ F$ (обратите внимание, что преобразования выполняются справа налево). Аналогично определяется композиция трёх и более преобразований.

**1.** Какое преобразование является композицией двух осевых симметрий, оси которых пересекаются?

**2.** Какое преобразование является композицией двух осевых симметрий, оси которых параллельны?

**3.** Какое преобразование является композицией поворотов на $40^\circ$ и $60^\circ$ с одним и тем же центром? Какое преобразование является композицией поворотов на $100^\circ$ и $150^\circ$ с одним и тем же центром?

**4.** Какое преобразование является композицией двух центральных симметрий?

**5.** Какое преобразование является композицией центральной симметрии и параллельного переноса?

**6.** Какое преобразование является композицией трёх центральных симметрий? четырёх центральных симметрий?

**7.** Доказать, что композиция двух поворотов (возможно, с разными центрами) есть поворот, угол которого равен сумме углов каждого из поворотов (с точностью до кратных $360^\circ$) или перенос, если эта сумма равна нулю. (Указание: представьте каждый поворот как композицию двух осевых симметрий; свобода в выборе осей позволяет взять в качестве одной оси прямую, соединяющую центры поворотов.)

**8.** Композиция некоторых трёх поворотов на угол $120^\circ$ (каждый) является тождественным преобразованием (оставляет все точки на месте). Доказать, что центры поворотов лежат в вершинах равностороннего треугольника.

**9.** На сторонах треугольника вне его построены равносторонние треугольники. Доказать, что композиция поворотов на $120^\circ$ вокруг центров этих треугольников (в надлежащем порядке) является тождественным преобразованием. (И, как показывает предыдущая задача, их центры образуют равносторонний треугольник!)

**10.** Какое преобразование является композицией параллельного переноса и поворота?

* * *

11. Доказать, что для данного многоугольника с чётным числом сторон можно построить бесконечно много других, у которых будут те же середины сторон, но что многоугольник с нечётным числом сторон определяется их серединами однозначно.

12. Доказать, что композиция двух поворотов на $90^\circ$ представляет собой центральную симметрию, и что её центр образует с центрами поворотов прямоугольный равнобедренный треугольник.

13. На двух сторонах треугольника вовне его построены квадраты. Доказать, что отрезок, соединяющий их центры, виден из середины третьей стороны треугольника под прямым углом.

14. Доказать, что композиция трёх осевых симметрий, оси которых — биссектрисы треугольника $ABC$, есть осевая симметрия. Найти её ось.

## Симметричные фигуры

Прямая называется *осью симметрии* фигуры, если для любой точки фигуры симметричная ей точка также принадлежит фигуре. Аналогично определяется *центр симметрии.*

**1.** Какие четырёхугольники имеют ось симметрии? Какие четырёхугольники имеют центр симметрии?

**2.** Доказать, что если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии.

**3.** Доказать, что если фигура имеет две оси симметрии, пересекающиеся под углом $60^\circ$, то она имеет и третью ось симметрии.



**4.** Может ли ограниченная фигура (целиком находящаяся внутри некоторого круга) иметь два разных центра симметрии?

**5.** Если фигура имеет центр симметрии, то любая прямая, проходящая через него, делит фигуру на две равновеликие части. А если прямая не проходит через центр симметрии, то та из частей, которая содержит центр симметрии, имеет большую площадь (или такую же).

**6.** Фигура переходит в себя при повороте на $57^\circ$, Следует ли отсюда, что она переходит в себя при повороте на $60^\circ$? на $40^\circ$?

**7.** Может ли 1997-угольник иметь центр симметрии?

* * *

8. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Доказать, что этот шестиугольник имеет центр симметрии.

9. Существует ли (не обязательно ограниченная) фигура, имеющая ровно два центра симметрии?

10. Какое максимальное число осей симметрии может иметь семиугольник?

11. Доказать, что если фигура имеет конечное число осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке, и углы между соседними равны.

12. Доказать, что фигура, имеющая три оси симметрии, не проходящие через одну точку, не может быть ограниченной.

## Классификация движений

Мы рассматривали различные виды преобразований плоскости — симметрии, повороты, перенос и т. п. Вообще преобразованием плоскости называется любое правило, которое для каждой точки плоскости определяет, в какую точку она переходит.

Преобразование называется *движением*, если оно сохраняет расстояния, то есть любые две точки переходят в две точки, находящиеся на том же расстоянии. (В частности, разные точки переходят в разные.)

**1.** Доказать, что если движение оставляет на месте три точки, не лежащие на одной прямой, то оно является тождественным преобразованием (оставляет на месте все точки).

**2.** Доказать, что если движение оставляет на месте две разные точки $A$ и $B$, то оно оставляет на месте все точки прямой $AB$.

**3.** Даны два движения, которые одинаково действуют на трёх точках $A$, $B$ и $C$, не лежащих на одной прямой. Доказать, что эти движения совпадают (т. е. одинаково ведут себя для всех точек).

**4.** Доказать, что движение, оставляющее на месте какие-то две точки, является либо тождественным, либо осевой симметрией.

**5.** Доказать, что движение, оставляющее на месте хотя бы одну точку, является либо осевой симметрией, либо поворотом вокруг этой точки (возможно, на нулевой угол, то есть тождественным преобразованием).

**6.** Придумать движение, которое не является ни поворотом, ни переносом, ни симметрией (осевой или центральной). Как представить его в виде композиции уже известных нам видов движений? (Ответ есть в одной из следующих задач.)

**7.** Говорят, что два движения перестановочны (коммутируют), если их композиции в двух разных порядках дают одно и то же движение. Перестановочны ли два параллельных переноса? два поворота с одним и тем же центром? два поворота с разными центрами? две осевые или центральные симметрии? В каком случае параллельный перенос и осевая симметрия перестановочны?

**8.** Говорят, что движение обращает ориентацию, если оно переводит букву R в букву Я. Если же буква R остается латинской, то говорят, что движение сохраняет ориентацию. Какие из известных вам движений сохраняют ориентацию, а какие меняют её?

**9.** Про два движения известно, сохраняют они ориентацию или обращают. Что можно сказать про их композицию?

**10.** Доказать, что любое движение можно представить в виде композиции параллельного переноса и поворота (и тогда оно сохраняет ориентацию) либо в виде композиции параллельного переноса и осевой симметрии (и тогда оно меняет ориентацию). (Указание. Посмотрим, куда переходит какая-то точка $A$. Можно найти параллельный перенос, переводящий её туда же, и останется сделать поворот или осевую симметрию.)



**11.** (Теорема Шаля) Скользящей симметрией называется композиция осевой симметрии и переноса на отрезок, параллельный оси симметрии (эти два преобразования перестановочны). Показать, что любое движение является либо поворотом, либо переносом, либо скользящей симметрией (частным случаем которой мы считаем осевую симметрию).

**12.** По двум прямым дорогам едут две машины с постоянными и равными скоростями. Доказать, что есть такая точка, от которой в любой момент времени машины находится на одинаковом расстоянии. (Дороги не параллельны.)

**13.** Может ли композиция 1997 осевых симметрий быть поворотом?

* * *

**14.** Доказать, что всякое преобразование плоскости, сохраняющее расстояние, является наложением (для любой точки $A$ существует точка $B$, переходящая в неё при этом преобразовании).

## Движения и координаты

Выберем на плоскости прямоугольную систему координат. Указать, в какую точку переходит точка с координатами $\langle x, y\rangle$ при следующих преобразованиях:

**1.** Осевая симметрия относительно оси $OX$.

**2.** Осевая симметрия относительно оси $OY$.

**3.** Осевая симметрия относительно прямой $x = 2$.

**4.** Осевая симметрия относительно оси $y = x$.

**5.** Центральная симметрия относительно точки $\langle 0, 0\rangle$.

**6.** Центральная симметрия относительно точки $\langle 1, 2\rangle$.

**7.** Поворот на $90^\circ$ относительно точки $\langle 0, 0\rangle$.

**8.** Поворот на $-90^\circ$ относительно точки $\langle 0, 0\rangle$.

**9.** Поворот на $90^\circ$ относительно точки $\langle 1, 2\rangle$.

**10.** Поворот на $45^\circ$ относительно точки $\langle 0, 0\rangle$.

**11.** Параллельный перенос на $\overrightarrow{OA}$, где точка $A$ имеет координаты $\langle 1, 2\rangle$.

**12.** Осевая симметрия относительно прямой $y = 2x$.

**13.** Поворот на $60^\circ$ относительно точки $\langle 0, 0\rangle$.

**14.** С помощью полученных формул проверить, что композиция осевых симметрий относительно осей $OX$ и $OY$ является центральной симметрией, что дважды выполненный поворот на $90^\circ$ является также центральной симметрией.

* * *

15. Действуя аналогично задаче 14, проверьте еще несколько утверждений о композициях преобразований с помощью формул преобразования координат.

## Симметрии

Движение называется *симметрией* фигуры, если она переходит в себя при этом движении. (Здесь слово «симметрия» не означает, что преобразование является осевой или центральной симметрией!)

Множество всех симметрий фигуры называется её *группой симметрий*.

1. Сколько симметрий может иметь треугольник?

2. Нарисовать фигуру, для которой группа симметрий состоит ровно из трёх движений.

3. Подобрать на рис. 22 для каждой картинки слева картинку справа, имеющую такую же группу симметрий. (Картинки предполагаются неограниченно продолженными влево и вправо.)

4. Может ли фигура перейти при движении в свою часть (не совпадающую со всей фигурой)?

* * *

5. Возможно ли такое для ограниченной фигуры?

## Гомотетия

Преобразование *гомотетии* с центром в точке $O$ и коэффициентом $k \neq 0$ переводит каждую точку $A$ в точку $B$, на-



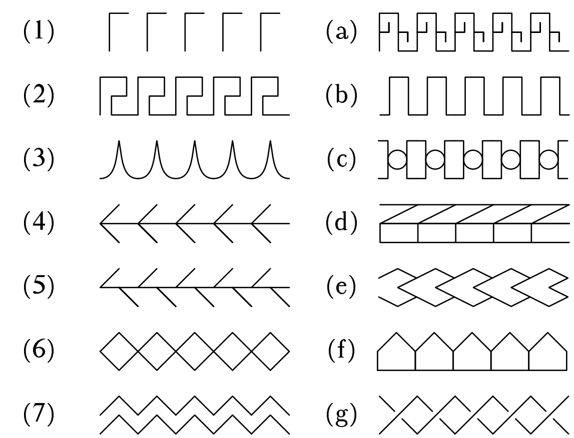


Рис. 22

ходящуюся на прямой $OA$ в $k$ раз дальше от $O$, чем $A$. При положительном $k$ точка $B$ находится с той же стороны от $O$, что и точка $A$; при отрицательном $k$ — с противоположной.

1. Что такое гомотетии с коэффициентом 1 и $-1$? Какое преобразование обратно к гомотетии с коэффициентом $k$? (Если некоторое преобразование переводит точку $X$ в точку $Y$, то *обратное* к нему преобразование переводит $Y$ в $X$.)

2. Доказать, что при гомотетии все расстояния увеличиваются в одно и то же число раз (какое?), прямые переходят в прямые, а окружности в окружности.

3. Даны два параллельных отрезка разной длины. Указать два преобразования гомотетии, переводящие первый отрезок во второй. (Почему существенно, чтобы длины были разными?)

4. Доказать, что в любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

5. Дана окружность и точка внутри неё. Построить хорду, которая делится этой точкой в отношении $1 : 2$. При каком соотношении между радиусом окружности $r$ и расстоянием $a$ от точки до центра окружности это возможно?

**6.** Вписать квадрат в данный треугольник (две вершины должны лежать на одной стороне, две остальные — по одной на каждой из двух оставшихся сторон).

**7.** Доказать, что композиция двух гомотетий с коэффициентами $k_1$ и $k_2$ снова является гомотетией (если $k_1 \cdot k_2 \neq 1$), причём центры всех трёх гомотетий лежат на одной прямой.

**8.** Даны три окружности различных радиусов. Для каждой пары окружностей нашли точку пересечения их общих внешних касательных. Доказать, что эти три точки лежат на одной прямой.

**9.** Доказать, что точки пересечения высот, серединных перпендикуляров и медиан треугольника лежат на одной прямой. В каком отношении одна из этих точек делит отрезок между двумя другими?

**10.** В окружности проведены два радиуса. Построить хорду, которая делится этими радиусами на три равные части.

**11.** Через данную точку внутри угла провести окружность, касающуюся сторон угла.

**12.** Два квадрата имеют параллельные стороны. Доказать, что четыре прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке.

* * *

**13.** Сформулировать аналог задачи 8, использующий общие внутренние касательные наряду с внешними.

**14.** Преобразованием подобия называется преобразование, которое меняет все расстояния в одно и то же число раз. (Это число называется *коэффициентом подобия*.)

**15.** Доказать, что всякое преобразование подобия является композицией движения и гомотетии.

**16.** Доказать, что всякое преобразование подобия с коэффициентом, не равным 1, имеет неподвижную точку.

**17.** Две карты Москвы разного масштаба (отображающие один и тот же участок местности) положили друг на друга. Доказать, что их можно проколоть иголкой так, чтобы оказалось проколотой одна и та же точка (на местности).

**18.** По двум прямым дорогам с постоянными, но разными скоростями едут две машины. Доказать, что можно встать так, чтобы видимый угол между машинами был бы неизменным.



**19.** На стене висят двое часов. Доказать, что прямые, соединяющие концы минутных стрелок в разные моменты времени, проходят через одну точку.

**20.** Если все стороны выпуклого многоугольника отодвинуть на единицу, то получится многоугольник, подобный исходному. Доказать, что в многоугольник можно вписать окружность.

**21.** Доказать, что в любой выпуклый многоугольник можно поместить два непересекающихся многоугольника, подобных исходному с коэффициентом $1/2$.

**22.** Вершины двух правильных $n$-угольников $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ пронумерованы по часовой стрелке, начиная с их общей вершины $A_1 = B_1$. Доказать, что прямые $A_2B_2, A_3B_3, \dots, A_nB_n$ проходят через одну точку.

## Контрольная работа

**1.** Точку $X$, лежащую внутри острого угла $AOB$, симметрично отразили относительно сторон угла, получив точки $X'$ и $X''$. При этом оказалось, что расстояния $X'X''$ и $OX$ равны. Найти угол $AOB$.

**2.** Дана трапеция $ABCD$. Где может находиться центр симметрии, если известно, что образ боковой стороны $AB$ при этой симметрии пересекается со стороной $CD$?

**3.** Стороны квадрата $l_1, l_2, l_3, l_4$ пронумерованы против часовой стрелки. Какое преобразование является композицией осевых симметрий относительно $l_1$, $l_2$, $l_3$ и $l_4$ (выполняемых в этом порядке)?

**4.** Какое преобразование является композицией центральной и осевой симметрий, если центр лежит на оси симметрии? если центр не лежит на оси симметрии?

**5.** Какое преобразование является композицией шести центральных симметрий, центры которых образуют правильный шестиугольник (преобразования выполняются против часовой стрелки)?

**6.** Композиция поворота вокруг точки $O$ на $90^\circ$ и сдвига на отрезок $OX$ (сначала поворот, потом сдвиг) является поворотом с центром в $O_1$. Найти угол этого поворота, расстояние $OO_1$ и угол $O_1OX$.

7. Фигура $F$ имеет форму уголка, составленного из трёх квадратов. Нарисовать множество тех точек $X$, для которых образ $F$ при центральной симметрии относительно $X$ пересекается с $F$.

8. На сторонах пятиугольника построили квадраты и отметили их центры, после чего всё, кроме этих центров, стёрли. Как восстановить пятиугольник?

9. Найти все движения, которые перестановочны с поворотом на $90^\circ$ вокруг данной точки.

10. Единичный квадрат раскрашен в черный и белый цвета, причём никакие две чёрные точки не находятся на расстоянии $0{,}1$. Доказать, что площадь чёрной части квадрата не превосходит (а) $0{,}6$; (б) $0{,}4$.

## Слабо?

1. Двое игроков ставят коней на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга. Кто не может сделать хода, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Океаны покрывают больше половины поверхности Земли. Доказать, что есть две симметричные относительно центра Земли точки, приходящиеся на океан.

3. Фигура на клетчатой бумаге имеет площадь $N$. Доказать, что её можно сдвинуть параллельно себе так, чтобы она покрыла (а) не менее $N$ вершин клеток; (б) не более $N$ вершин клеток. (Клетки имеют единичные стороны.)

4. Выпуклая фигура на клетчатой бумаге (сторона клетки равна 1) имеет площадь больше 4. Один из узлов сетки является центром симметрии. Доказать, что фигура покрывает ещё хотя бы один узел (лемма Минковского).

5. Даны две концентрические окружности. Построить прямую, на которой точки пересечения с этими окружностями высекают три равных отрезка.

6. Построить квадрат, две противоположные вершины которого лежат на данной прямой, а две другие — на сторонах данного угла.

7. Два треугольника симметричны друг другу относительно двух различных прямых. Доказать, что они — равносторонние.



8. Точка $O$ находится внутри выпуклого $n$-угольника, не имеющего параллельных сторон. Доказать, что есть не более $n$ прямых, проходящих через $O$ и делящих площадь многоугольника пополам.

9. Через точку пересечения двух окружностей провести прямую, если задана разность длин хорд, высекаемых на этой прямой окружностями.

10. Даны две точки $A$ и $B$ по одну сторону прямой $l$. Найти такую точку $X$, что в траектории $AXB$ угол падения вдвое больше угла отражения.

11. Доказать, что площадь четырёхугольника со сторонами $a, b, c, d$ не превосходит (а) $(ab+cd)/2$; (б) $(ac+bd)/2$.

12. Может ли ограниченная фигура иметь центр симметрии и ровно одну ось симметрии?

13. Фигура имеет чётное число осей симметрии. Доказать, что некоторые две из них перпендикулярны.

14. Может ли ограниченная фигура иметь ось симметрии и не принадлежащий ей центр симметрии?

15. На отрезке $AB$ имеется $2n$ точек, образующих $n$ симметричных (относительно середины отрезка) пар. Из этих $2n$ точек некоторые $n$ покрашены в синий цвет, остальные в красный. Доказать, что сумма расстояний от красных точек до $A$ равна сумме расстояний от синих точек до $B$.

16. Угол, изготовленный из прозрачного материала, двигают так, что две непересекающиеся окружности касаются его сторон внутренним образом. Доказать, что на нём можно отметить точку, которая описывает дугу окружности.

17. Найти все движения, которые перестановочны с поворотом на $90^\circ$ вокруг данной точки.

18. Две соседние вершины квадрата лежат на окружности радиуса 1. Каково максимально возможное расстояние от других двух вершин квадрата до центра окружности?

19. (а) Окружность пересекает все три стороны треугольника. Доказать, что её радиус больше радиуса вписанной окружности. (б) Доказать, что для любого треугольника радиус описанной окружности по крайней мере вдвое больше радиу-

са вписанной. Для каких треугольников они отличаются ровно вдвое?

**20.** Единичный квадрат раскрашен в черный и белый цвета, причём никакие две чёрные точки не находятся на расстоянии $0{,}1$. Доказать, что площадь чёрной части квадрата не превосходит (а) $0{,}6$; (б) $0{,}4$.

**21.** Вписать в данный треугольник другой, стороны которого параллельны сторонам третьего. (Первый и третий даны, второй надо построить.)

**22.** Дан луч с началом в $O$ и точка $A$, не лежащая на нём. Построить на луче точку $M$, для которой $OM : MA = 1 : 3$.

**23.** Указать фигуру, которая симметрична двум фигурам на рис. 23 (стоящей и лежащей единицам) относительно некоторых прямых.

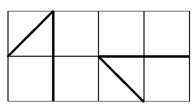

Рис. 23

**24.** Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Доказать, что этот шестиугольник имеет центр симметрии.

**25.** Существует ли (не обязательно ограниченная) фигура, имеющая ровно два центра симметрии?

**26.** Какое максимальное число осей симметрии может иметь семиугольник?

**27.** Доказать, что если фигура имеет конечное число осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке, и углы между соседними равны.

**28.** Доказать, что фигура, имеющая три оси симметрии, не проходящие через одну точку, не может быть ограниченной.

**29.** Доказать, что всякое преобразование плоскости, сохраняющее расстояние, является наложением (для любой точки $A$ существует точка $B$, переходящая в неё при этом преобразовании).

**30.** Деревни А и Б расположены по разные стороны прямой железной дороги. Где надо построить платформу заданной длины, чтобы суммарное расстояние от А и Б до платформы было наименьшим? (Расстоянием до платформы считается расстояние до ее ближайшей точки.) Сколько решений имеет задача?



**31.** Имеется много одинаковых плиток, имеющих форму неправильного выпуклого четырёхугольника. Доказать, что ими можно замостить плоскость. (Плитки разрешается переворачивать.)

**32.** Даны две параллельные прямые и точка между ними. Построить окружность, проходящую через эту точку и касающуюся обеих прямых.

**33.** Доказать, что для данного многоугольника с чётным числом сторон можно построить бесконечно много других, у которых будут те же середины сторон, но что многоугольник с нечётным числом сторон определяется их серединами однозначно.

**34.** Доказать, что композиция двух поворотов на $90^\circ$ представляет собой центральную симметрию, и что её центр образует с центрами поворотов прямоугольный равнобедренный треугольник.

**35.** На двух сторонах треугольника вовне его построены квадраты. Доказать, что отрезок, соединяющий их центры, виден из середины третьей стороны треугольника под прямым углом.

**36.** Доказать, что композиция трёх осевых симметрий, оси которых — биссектрисы треугольника $ABC$, есть осевая симметрия. Найти её ось.

**37.** Четырёхугольник вписан в окружность. Из середины каждой из его сторон опущена высота на противоположную сторону. Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке.

**38.** На прямой выбраны четыре точки $A, B, C, D$, идущие в указанном порядке, причём $AB = CD$. Доказать, что $AP + PD \geqslant BP + PC$ для любой точки $P$ на плоскости.

**39.** На плоскости бывают центральная и осевая симметрии, в пространстве аналогичных им видов симметрий три. Как вы думаете, что это за симметрии?

**40.** Через точку O внутри треугольника требуется провести прямую, отрезок которой внутри треугольника делится точкой O пополам. Сколько решений имеет задача? (Ответ зависит от точки O. Требуется нарисовать, для каких точек задача имеет то или иное число решений.)

**41.** Провести через заданную точку внутри угла прямую, отсекающую от него треугольник наименьшей площади.

**42.** Дан остроугольный треугольник $ABC$. Найти точку $X$, для которой сумма расстояний $AX + BX + CX$ минимальна. (Ответ: из этой точки все стороны верны под углом $120°$.)

**43.** Вписать квадрат в заданный параллелограмм.

**44.** Через заданную точку внутри окружности провести хорду заданной длины.

**45.** Символ «инь-янь» выглядит так: на горизонтальном отрезке $AC$ как на диаметре строится круг с центром в $B$; к верхнему полукругу добавляется (нижний) полукруг с диаметром $AB$ и отнимается верхний полукруг с диаметром $BC$. Как разделить полученную фигуру на 7 равных частей?

## Многочлены

*Многочлены* получаются из чисел и переменных, если их складывать, вычитать и умножать. Раскрывая скобки, каждый многочлен можно преобразовать в сумму *одночленов* (произведений чисел и переменных), после чего привести *подобные* члены (отличающиеся лишь числовыми *коэффициентами*).

**1.** Какие коэффициенты будут при $ab^9$ и $a^8b^2$ в многочлене $(a+b)^{10}$ после раскрытия скобок и приведения подобных?

**2.** Найти коэффициент при $ab^2c^3$ в многочлене $(a + b + c)^6$.

**3.** Найти наибольший коэффициент многочлена $(a+b)^{10}$.

**4.** (Продолжение) Найти сумму всех его коэффициентов.

**5.** Разложить на множители $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$, $a^5 - b^5$, $a^6 - b^6$.

**6.** Разложить на множители $a^3 + b^3$, $a^4 + b^4$, $a^5 + b^5$, $a^6 + b^6$.

**7.** Разложить на множители $(x+y)^{10} - z^{12}$.



**8.** Перемножить $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{19})$.

**9.** Найти $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{19})$ при $x = 3$.

**10.** Доказать, что $x^2 + x + 1 > 0$ при любом $x$.

**11.** Доказать, что $x^2 + xy + y^2 = 0$, только если $x = 0$ и $y = 0$.

* * *

**12.** Найти наибольший коэффициент в многочлене $(a + 2b)^{10}$.

**13.** (Продолжение) Найти сумму всех его коэффициентов.

**14.** Найти сумму всех коэффициентов многочлена $(a+b-c)^{10}$.

**15.** (Продолжение) Найти сумму коэффициентов при одночленах, не содержащих $a$.

**16.** (Продолжение) Найти сумму коэффициентов при одночленах, содержащих $b$.

**17.** Перемножить $(1 - x)^2(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + 20x^{19})$.

**18.** Найти $(1 + 2x + 3^2 + 4x^3 + \ldots + 20x^{19})$ при $x = 2$.

**19.** Может ли $x^2 + 5xy + 7y^2$ быть отрицательным?

**20.** Может ли $2x^2 + 5xy + 3y^2$ быть отрицательным?

**21.** Доказать, что многочлен $x^2y^2 + x^2 - 2xy + 1$ положителен при любых $x$ и $y$. Может ли он быть меньше 0,001?

**22.** Доказать, что если $x+y+z = 0$, то $x^3+y^3+z^3-3xyz = 0$.

**23.** (Продолжение) Разложить на множители многочлен $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

**24.** Доказать, что если $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, то либо все числа $x$, $y$ и $z$ равны, либо их сумма равна нулю.

**25.** Разложить на множители многочлен $x^5 + x + 1$.

**26.** Можно ли разложить на множители многочлен $x^2 + y^2 - 1$ (ни один из множителей не должен быть константой)?

**27.** Может ли в произведении двух многочленов быть меньше одночленов, чем в каждом из них? (Подобные члены считаются за один.)

## Вычисления с корнями

**1.** Вычислить $(1 + \sqrt{2})^3$. (Ответ должен быть в форме $a + b\sqrt{2}$ с целыми $a$ и $b$.)

**2.** Тот же вопрос для $(1 - \sqrt{2})^3$.

**3.** Число $(1 + \sqrt{3})^3 + (1 - \sqrt{3})^3$ — целое. Найти его.

**4.** Тот же вопрос для $(1 + \sqrt{3})^3 \cdot (1 - \sqrt{3})^3$.

**5.** Вычислить $(2 - \sqrt{3})^7 \cdot (2 + \sqrt{3})^7$.

**6.** Даны два числа $\alpha$ и $\beta$. Известно, что сумма $\alpha+\beta$ и произведение $\alpha\beta$ — целые числа. Доказать, что число $\alpha^n+\beta^n$ будет целым при всех $n=1,2,3,\ldots$

7. Доказать, что число $(2+\sqrt{3})^7+(2-\sqrt{3})^7$ — целое, и найти его.

**8.** Найти рациональные числа $a$ и $b$, при которых $1/(\sqrt{2}-1)=a+b\sqrt{2}$.

**9.** Найти рациональные числа $a$ и $b$, при которых $1/(5+2\sqrt{3})=a+b\sqrt{3}$.

**10.** Найти рациональные $a$ и $b$, при которых $1/(\sqrt{5}-\sqrt{2})=a\sqrt{2}+b\sqrt{5}$.

* * *

11. Доказать, что любое число представимо в виде $a+b\sqrt{2}$ (с рациональными $a$ и $b$) не более чем одним способом.

12. Найти рациональные $a,b,c,d$, для которых $1/(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$.

13. Найти рациональные $a,b,c$, при которых $1/(1+\sqrt[3]{2})=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$.

14. Найти $\alpha^2$, $\alpha^4$, $\alpha^8$ при $\alpha=\sqrt{2}-1$. (Ответ должен быть в форме $a+b\sqrt{2}$ с целыми $a$ и $b$.)

15. Доказать, что при некотором целом $n\neq 0$ число $n\sqrt{2}$ отстоит от ближайшего целого числа не более чем на 0,01.

16. Известно, что $(1+\sqrt{2})^k=m+n\sqrt{2}$ для целых $m$ и $n$. Доказать, что $m^2-2n^2=\pm1$.

17. Доказать, что уравнение $m^2-2n^2=1$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

18. Доказать, что уравнение $m^2-3n^2=1$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

19. Число $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ — целое. Найти его.

## Компле́ксные числа

*Комплексные числа* — формальные записи вида $a+bi$, где $a$ и $b$ — вещественные, а $i$ называют мнимой единицей, полагая $i^2=-1$. Эти числа можно складывать и умножать (раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые).

**1.** Вычислить $(2+3i)+(7-i)$, $(2+3i)(7-i)$, $(1+i)(1-i)$, $(2-3i)(3+2i)$ и $2(4+3i)-3(2-i)$.



**2.** Вычислить $(-i)^2$, $i^{10}$.

**3.** Вычислить $(1+i)^{10}$ и $(1-i)^{10}$.

**4.** Вычислить $(1+i)^{101}$.

**5.** Найти два комплексных числа, сумма и произведение которых равны 2.

**6.** Найти $x$, для которого $x(1+i)=1$. (Здесь и далее буква $x$ обозначает комплексное число.)

7. Найти $x$, при котором $x(2+3i)=3-2i$.

**8.** Найти $x$, при котором $x(1+i)=3+4i$.

* * *

9. Найти $x$, при котором $x(2+3i)=5+4i$. (Указание: можно искать $x$ в виде $a+bi$ и составить систему из двух уравнений с неизвестными $a$ и $b$.)

10. Найти сумму $1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{100}$.

11. Вычислить $(\sqrt{3}+i)^{30}$.

12. Найти $x$, для которого $x^2=2$; найти $x$, для которого $x^2=-2$; найти $x$, для которого $x^2=2i$.

13. Найти $x$, для которого $x^2=1+i$.

14. Найти $x$, для которого $x^2+2x+2=0$.

15. Найти все $x=a+bi$, для которых $x^3=1$.

## Сопряжённые числа. Деление.

Обычные числа называют *вещественными*, или *действительными*, чтобы отличить от комплексных. Действительные числа $a$ и $b$ называют *действительной* и *мнимой* частями комплексного числа $z=a+bi$. Обозначение: $a=\operatorname{Re} z$, $b=\operatorname{Im} z$. *Сопряжённым* к числу $z=a+bi$ называется число $\overline{z}=a-bi$ (здесь $a$ и $b$ — вещественные числа).

**1.** Вычислить действительную и мнимую части суммы и произведения чисел $a+bi$ и $c+di$.

**2.** Доказать, что для любого $z$ сумма $z+\overline{z}$ и произведение $z\overline{z}$ действительны (имеют нулевую мнимую часть).

**3.** Доказать, что $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ и что $\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}$.

**4.** Вычислить $(1+i)/(1-i)$ и $(8+i)/(1+2i)$. (Можно либо решать систему уравнений, либо домножить числитель и знаменатель на сопряжённое число.)

**5.** Найти общую формулу для частного $(a+bi)/(c+di)$.

6. Для каких $z$ найдётся такое $w$, что $zw = 1$?

7. Доказать, что если $zw = 0$, то $z = 0$ или $w = 0$.

8. Доказать, что если $z^2 = w^2$, то $z = w$ или $z = -w$.

9. Найти все комплексные числа, для которых $z^2 = 2i$.

10. Доказать, что $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$.

* * *

11. Доказать тождество $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

12. Некоторые целые числа (например, $2 = 1^2 + 1^2$ и $13 = 2^2 + 3^2$) представимы в виде суммы двух точных квадратов, некоторые (например, 7) — нет. Доказать, что если два числа представимы в таком виде, то и их произведение обладает этим свойством.

13. (Продолжение) Доказать, что число $2a$ представимо в таком виде тогда и только тогда, когда представимо число $a$.

14. Доказать, что если сумма и произведение двух комплексных чисел вещественны, то эти числа либо оба вещественны, либо сопряжены.

15. Найти все комплексные числа $z$, для которых $z^2 + z + 1 = 0$.

16. Найти все комплексные числа $z$, для которых $z^3 = 1$.

## Комплексная плоскость

Комплексное число $z = a + bi$ рассматривают как точку на плоскости с координатами $(a, b)$. Ось абсцисс называют *действительной* осью; на ней лежат действительные числа. Ось ординат называют *мнимой* осью; на ней лежат *чисто мнимые* комплексные числа.

1. Какое преобразование плоскости переводит $z$ в $2z$?

2. …переводит $z$ в $z + 1$?

3. …переводит $z$ в $\overline{z}$?

4. …переводит $z$ в $-z$?

5. …переводит $z$ в $-\overline{z}$?

6. …переводит $z$ в $iz$?

7. Где находятся точки $z$, для которых $z + \overline{z} = 1$?

8. Где находятся точки $z$, для которых $z\overline{z} = 1$?

*Модулем* комплексного числа $z$ называется длина отрезка $0z$ (расстояние от начала координат до $z$); *аргументом* этого числа называется угол, образуемый отрезком $0z$ с осью



абсцисс, отсчитываемый против часовой стрелки. (Обозначения: $|z|$ для модуля, $\arg z$ для аргумента.)

9. Доказать, что $|z|^2 = z\overline{z}$.

10. Написать формулу для расстояния между числами $z$ и $w$.

11. Где находятся числа $z$, для которых (а) $|z| = 1$? (б) $|z - 1| = 1$? (в) $|z| = |z + 1|$?

12. Доказать, что $|zw| = |z| \cdot |w|$ для любых комплексных чисел $z$ и $w$.

13. Найти действительную и мнимую части числа $z$, если $|z| = 2$ и $\arg z = 60°$. Найти действительную и мнимую части чисел $z^2$ и $z^3$.

14. Написать формулы для действительной и мнимой части числа с модулем $r$ и аргументом $\alpha$.

* * *

15. Для данного $z$ найти $w$, при котором точки $0$, $z$, $iz$ и $w$ лежат в вершинах квадрата.

16. Доказать, что точки $0$, $1/z$ и $\overline{z}$ лежат на одной прямой.

17. Доказать, что точки $z$, для которых $z + \overline{z} = z\overline{z}$, лежат на окружности, и найти её центр и радиус.

18. Доказать, что точки, для которых число $z/(z-1)$ является чисто мнимым, лежат на окружности, и найти её центр и радиус.

19. Известно, что $|z - 3| \leqslant 2$, $|z + 4i| \leqslant 3$. Найти все такие $z$.

20. Найти комплексное число $\alpha$, при котором преобразование $z \mapsto \alpha z$ есть поворот на $45°$. Чему равен квадрат этого числа?

21. Доказать, что преобразование $z \mapsto (1 + i)z$ увеличивает все расстояния в одно и то же число раз. В какое?

22. Как найти четвёртую вершину параллелограмма на комплексной плоскости, если три его вершины равны $u$, $v$ и $w$? (Указать все возможности.)

23. Где находится точка пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $u$, $v$ и $w$ комплексной плоскости?

24. Записать формулу для преобразования комплексной плоскости, являющегося симметрией относительно прямой $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$.

## Умножение и повороты

1. Доказать, что для любого комплексного $a$ преобразование $z \mapsto az$ увеличивает все расстояния в одно и то же число

раз. В какое?

**2.** Что можно сказать про это преобразование, если число $a$ действительно? ...если $|a| = 1$?

**3.** При каком числе $a$ это преобразование будет поворотом на $30^\circ$ вокруг начала координат?

**4.** Доказать, что преобразование $z \mapsto az$ есть композиция гомотетии с коэффициентом $|a|$ и поворота на угол $\arg a$.

**5.** Доказать, что преобразование поворота на угла $\alpha$ задаётся формулой $z \mapsto z(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

**6.** Куда переходит точка $z = 1$ при повороте на угол $\alpha$, а затем на угол $\beta$? Получить формулы для $\cos(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha+\beta)$.

**7.** Доказать, что при умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.

**8.** Как найти модуль и аргумент частного $z/w$, зная модули и аргументы комплексных числе $x$ и $w$?

**9.** Написать формулы для $\cos(\alpha-\beta)$ и $\sin(\alpha-\beta)$.

**10.** Получить формулы для $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 3\alpha$ и $\sin 3\alpha$ с помощью комплексных чисел, возведя $(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ в куб.

**11.** Доказать, что комплексные числа $z$, для которых $z^3 = 1$, являются вершинами правильного треугольника.

**12.** Доказать, что для любого целого $n > 2$ и для любого комплексного $a$ корни уравнения $z^n = a$ являются вершинами правильного $n$-угольника.

* * *

**13.** При каких $a$ и $b$ преобразование $z \mapsto az + b$ является поворотом на $45^\circ$ вокруг точки $1 = 1 + 0i$?

**14.** Числа $0$ и $z$ являются вершинами правильного треугольника. Где может находиться третья его вершина?

**15.** Числа $0$ и $z$ являются вершинами квадрата. Где могут находиться две другие его вершины?

**16.** Найти все корни уравнения $z^5 = 1$ (в ответе могут остаться квадратные корни, но не должно быть синусов и косинусов).

**17.** Доказать, что сумма всех $n$ корней уравнения $z^n = 1$ равна нулю.

**18.** Найти произведение всех $n$ корней уравнения $z^n = 1$.



**19.** Доказать, что все корни уравнения $z^n = 1$ являются степенями некоторого из них. (Корень с таким свойством называется *первообразным* корнем.)

**20.** Сколько существует первообразных корней степени 12 из единицы?

**21.** Тот же вопрос для корней степени 1001.

**22.** При каких $a$ и $b$ преобразование $z \mapsto az + b$ является поворотом? переносом? осевой симметрией?

**23.** При каких $a$ и $b$ преобразование $z \mapsto a\bar{z} + b$ является осевой симметрией?

## Комплексные числа и геометрия

**1.** Точки $x, y, z$ комплексной плоскости лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда отношение ... вещественно. Вставить пропущенное отношение и доказать.

**2.** Доказать, что множество всех чисел $z$, для которых $(z-1)/(z-2)$ — чисто мнимое, есть окружность, диаметром которой является отрезок с концами 1 и 2

**3.** Доказать, что треугольник с вершинами $0, 1, z$ подобен треугольнику с вершинами $0, 1, 1/z$.

**4.** Доказать, что треугольник с вершинами $0, z, w$ подобен треугольнику с вершинами $0, 1/z, 1/w$.

**5.** Доказать, что точки $z, w, 1/\bar{z}, 1/\bar{w}$ лежат на одной окружности.

**6.** Доказать, что точка $1/z$ пробегает окружность, когда $z$ движется по прямой $\operatorname{Re} z = 1$.

**7.** Доказать, что при отображении $z \mapsto 1/z$ окружности, проходящие через начало координат, переходят в прямые.

* * *

**8.** Точки $x, y, z, w$ комплексной плоскости лежат на одной прямой или окружности тогда и только тогда, когда отношение ... вещественно. Вставить пропущенное отношение и доказать.

**9.** Четырёхугольник имеет вершины $A, B, C, D$, рассматриваемые как точки комплексной плоскости. Через $AB$ обозначим комплексное число, равное разности $B - A$. Доказать, что $AB \cdot CD - BC \cdot DA = AC \cdot BD$.

10. (Продолжение) Вывести отсюда, что произведение диагоналей четырёхугольника не больше суммы произведений его противоположных сторон.

11. (Продолжение) Когда это неравенство обращается в равенство?

12. Определим две операции на комплексных числах: $(z, w) = \operatorname{Re} z\overline{w}$ и $[z, w] = \operatorname{Im} z\overline{w}$. Как изменятся $(z, w)$ и $[z, w]$, если переставить $z$ и $w$ местами?

13. (Продолжение) Доказать, что $(z, w)$ равняется произведению длин отрезков $0z$ и $0w$ на косинус угла между ними.

14. (Продолжение) Доказать, что площадь треугольника $0zw$ равна $(1/2)|[z, w]|$.

15. (Продолжение) Сформулировать простое правило, позволяющее определить, когда $[z, w]$ положительно, отрицательно и равно нулю. (Указание: ответ содержит слова «по часовой стрелке».)

## Окружности и преобразования

*Инверсией* относительно окружности с центром O и радиусом r называется преобразование, при котором точка X переходит в точку X′, лежащую на луче OX, для которой $OX \cdot OX' = r^2$.

1. Какие точки остаются на месте при инверсии? Какие точки никуда не переходят? В какие точки никакая точка не переходит? Что будет, если применить преобразование инверсии дважды?

2. Куда переходит точка $z$ при инверсии с центром 0 и радиусом $r$? (Ответ включает операцию сопряжения комплексных чисел.)

3. Доказать, что при инверсии с центром в точке O прямые, не проходящие через O, переходят в окружности, проходящие через O, и наоборот. (Эта задача по существу уже была.)

4. Доказать, что при инверсии с центром в O окружности, не проходящие через O, превращаются в окружности, не проходящие через O.

5. Доказать, что при инверсии любая окружность или прямая переходит в окружность или прямую.



6. Доказать, что при преобразовании $z \mapsto 1/z$ любая окружность или прямая переходит в окружность или прямую.

7. Доказать, что при преобразовании $z \mapsto (z-a)/(z-b)$ образ любой прямой или окружности (множество, составленное из образов всех её точек) есть прямая или окружность.

8. (Продолжение) Доказать, что при этом преобразовании прообраз любой прямой или окружности (множество точек, которые попадают на эту прямую или окружность после преобразования) есть прямая или окружность.

9. Используя задачу 8, доказать, что при любых комплексных $a$ и $b$ множество тех $z$, для которых $(z-a)/(z-b)$ — чисто мнимое, есть окружность.

10. На плоскости даны две точки A и B. Доказать, что точки, лежащие втрое дальше от A, чем от B, образуют окружность. Как доказать это с использованием задачи 8?

* * *

11. Найти *дробно-линейное преобразование*, то есть преобразование вида $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, где $a, b, c, d$ — комплексные числа, при котором полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ переходит в круг $|z| < 1$.

12. Решить задачу 6, используя сформулированные выше условия, при которых четыре комплексных числа лежат на одной окружности.

13. Доказать, что всякое дробно-линейное преобразование есть композиция поворотов, сдвигов и преобразований вида $z \mapsto 1/z$.

14. Указать дробно-линейное преобразование, при котором единичный круг $|z| < 1$ остаётся на месте, но центр его смещается.

15. Доказать, что при инверсии касающиеся окружности переходят в касающиеся, и вообще угол, под которым пересекаются две окружности или прямые, не меняется.

## Комплексные числа: разное

1. Доказать, что $|z+w| \leqslant |z| + |w|$. При каких условиях это неравенство обращается в равенство?

2. Проверить ассоциативность умножения комплексных чисел, то есть равенство $(uv)w = u(vw)$.

3. Разложить на множители многочлены $z^2+1$ и $z^2+2z+2$. (Множители могут иметь комплексные коэффициенты.)

**4.** Какая кривая является образом прямой $\operatorname{Re} z = 1$ при отображении $z \mapsto iz^2$?

**5.** Записать $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$ как многочлены от $\cos x$. Нарисовать примерные графики этих многочленов на отрезке от $-1$ до $1$.

**6.** Доказать, что при любом целом положительном $n$ можно записать $\cos nx$ как многочлен от $\cos x$.

**7.** Найти формулу для сумм $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$ и $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$.

**8.** Доказать, что при любом $x$ сумма $\cos x + \cos(x+120^\circ) + \cos(x + 240^\circ)$ равна $0$.

**9.** (Продолжение) Та же задача для суммы $\cos x + \cos(x + 72^\circ) + \cos(x + 144^\circ) + \cos(x - 72^\circ) + \cos(x - 144^\circ)$.

**10.** Доказать, что если точки $a, b, c$ являются вершинами равностороннего треугольника, то $a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc$.

**11.** (Продолжение) Верно ли обратное?

**12.** Какие значения может принимать аргумент числа $z$, если $|z - 2i| \leqslant 1$?

**13.** Доказать, что уравнение $z\bar{z} + az + \overline{az} + c = 0$, где $a$ — комплексное число, а $c$ — действительное, задаёт пустое множество (т. е. не имеет решений), точку или окружность. Как определить по $a$ и $c$, что именно?

**14.** Дан правильный многоугольник и точка. Доказать, что сумма квадратов расстояний от заданной точки до вершин многоугольника определяется расстоянием от заданной точки до центра многоугольника (центра описанной около него окружности).

**15.** Найти все числа $z$, для которых $z^{57} = z^{111} = 1$.

**16.** Доказать, что если $1/z_1 + 1/z_2 + \ldots + 1/z_n = 0$ для комплексных чисел $z_1, \ldots, z_n$, то найдутся такие положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что $\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n = 0$.

**17.** На сторонах треугольника с вершинами в точках $u$, $v$, $w$ построены равносторонние треугольники. Найти формулы для их центров (в виде выражений, содержащих комплексные числа $u, v, w$). Доказать, что эти центры образуют равносторонний треугольник.



**18.** Доказать, что всякое преобразование подобия (преобразование, меняющее все расстояния в одно и то же число раз, называемое *коэффициентом подобия*), сохраняющее ориентацию, имеет вид $z \mapsto az + b$.

**19.** Доказать, что всякое преобразование подобия, меняющее ориентацию, имеет вид $z \mapsto a\bar{z} + b$.

**20.** Доказать, что всякое преобразование подобия с коэффициентом, отличным от $1$, имеет ровно одну неподвижную точку.

**21.** Доказать, что число $(3/5) + (4/5)i$ не является корнем $n$-ой степени из $1$ ни при каком целом положительном $n$.

**22.** Доказать, что острый угол прямоугольного треугольника со сторонами $3, 4, 5$ измеряется иррациональным числом градусов.

**23.** *Гауссовым числом* называется комплексное число вида $a + bi$, где $a$ и $b$ — целые числа. Говорят, что одно гауссово число делится на другое, если их частное — также гауссово число. Нарисовать все кратные чисел $1$, $i$, $1 + i$, $3 + 4i$.

**24.** (Продолжение) Гауссово число называется *простым*, если оно не разлагается в произведение двух множителей, отличных от $\pm 1$ и $\pm i$ (эта оговорка необходима, иначе простых чисел бы не было). Найти все простые гауссовы числа $a + bi$, для которых $|a|, |b| \leqslant 10$.

**25.** Комплексное число $z$ лежит на единичной окружности: $|z| = 1$. Доказать, что можно найти такое целое положительное $n$, что $|z^n - 1| < 0{,}0001$.

## Контрольная работа

### Вариант 1

**1.** Нарисовать точки (комплексные числа) $z$, для которых $\operatorname{Re}(z - 1) = \operatorname{Im}(z - 2)$.

**2.** Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника имеет концы в точках $1+i$ и $4+2i$. Указать (две) точки, в которых может находиться вершина прямого угла этого треугольника.

**3.** Нарисовать точки, для которых $\arg \frac{z}{z+1} = 60^\circ$.

**4.** Нарисовать точки $z$, для которых $|(1 + i)z - 3| \leqslant 1$.

5. Решить уравнение $(x+iy)^5 = (x-iy)$ ($x, y$ — действительные числа).

6. Известно, что $z + 1/z = 2\cos 1^\circ$. Найти $z^{60} + (1/z^{60})$.

7. Найти максимум величины $|z|$, если $|(z+1)/z| = a$ (здесь $a$ — фиксированное положительное действительное число).

**Вариант 2**

1. Нарисовать комплексные числа $z$, для которых $\operatorname{Re} iz = \operatorname{Im}(1+i)z$.

2. Две вершины правильного треугольника находятся в точках 2 и $i$. Указать (две) точки, где может находиться его третья вершина.

3. Нарисовать точки $z$, для которых $\arg(\overline{z}(z+1)) = 120^\circ$.

4. Где находятся точки $z$, для которых расстояние между точками $3z$ и $1+iz$ не больше 2?

5. Где находятся точки $z$, для которых $|z-i| = |3-z|$?

6. Точка $z$ обходит окружность радиуса 1 с центром в нуле, делая оборот против часовой стрелки. Найти траекторию точек $2z$, $iz$, $\overline{z}$, $z^2$, $1/z^2$, $1/(z+2)$, $z+1/z$.

7. Точка $z$ движется по окружности с центром в $5i$ радиуса 3. Найти центр и радиус окружности, по которой движется точка $1/z$.

8. Вставить пропущенное выражение в утверждение: «различные точки $u$, $v$ и $w$ являются вершинами прямоугольного треугольника с острым углом $u$ тогда и только тогда, когда число ... вещественно».

9. Даны три ненулевых комплексных числа. Может ли так случиться, что отношение любых двух из них будет иметь отрицательную действительную часть?

10. Тот же вопрос для четырёх чисел.

**Вариант 3**

1. Нарисовать комплексные числа $z$, для которых $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re}(iz)$.

2. Нарисовать точки $z$, для которых $0 < \arg \frac{z-1}{z+1} < 90^\circ$.



3. Точка $z$ движется по единичной окружности с центром в нуле против часовой стрелки. Описать движение точек $z^3$, $z^2 + 1/z^2$, $2/(1+z)$, $3/(2+z)$, $\sqrt{z}$.

4. Указать все значения $z$, при которых точки $1, z, z^2$ являются тремя (различными) вершинами квадрата. (Будьте внимательны — имеется много возможностей!)

5. Известно, что числа $z_1, \ldots, z_{10000}$ удовлетворяют неравенству $|z-2| < 1$. Доказать, что частное каких-либо двух их них (**а**) имеет модуль между 0,99 и 1,01; (**б**) имеет аргумент между $-1^\circ$ и $1^\circ$; (**в**) имеет одновременно модуль между 0,9 и 1,1 и аргумент между $-10^\circ$ и $10^\circ$.

## Множества и операции

*Множества* состоят из *элементов*. Обозначения: $x \in A$ читается «$x$ есть элемент множества $A$»; через $\{a, b, \ldots, c\}$ обозначается множество, состоящее из элементов $a, b, \ldots, c$. (Порядок не учитывается, каждый элемент считается по одному разу, так что $\{5, 7, 11\} = \{7, 11, 5\} = \{11, 11, 5, 7, 5\}$.) *Пустое* множество не содержит элементов и обозначается $\varnothing$.

Два множества *равны*, если содержат одни и те же элементы (все элементы первого являются элементами второго и наоборот). Множество $A$ называют *подмножеством* множества $B$, если все элементы $A$ являются элементами $B$ (запись: $A \subset B$).

1. Сколько различных подмножеств имеет множество из пяти элементов?

2. Закончить фразу: «множество $A$ не является подмножеством множества $B$, если существует ...».

3. Указать все пары «подмножество – множество» среди следующих семи множеств: целые числа, делящиеся на 2, на 3, на 6, на 4, на 9, на 12, на 18. Сколько таких пар?

Пусть даны два множества $A$ и $B$. Их *пересечение* $A \cap B$ состоит из элементов, принадлежащих обоим множествам; *объединение* $A \cup B$ — из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств. *Разность* $A \setminus B$ состоит из элементов $A$, не принадлежащих $B$; *симметрическая разность* $A \triangle B$ — из элементов, принадлежащих ровно одному из множеств $A$ и $B$.

**4.** Заполнить таблицу

| $x \in A$ | $x \in B$ | $x \in A \cap B$ | $x \in A \cup B$ | $x \in A \setminus B$ | $x \in A \triangle B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| нет | нет | | | | |
| нет | да | | | | |
| да | нет | | | | |
| да | да | | | | |

**5.** Дополнить следующую фразу: «множество решений уравнения $f^2(x) + g^2(x) = 0$ является ... множеств решений уравнения $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$» (значения $f(x)$ и $g(x)$ — действительные числа).

**6.** Какие два множества задачи 3 в пересечении дают третье множество из той же задачи? Сколько решений имеет эта задача? (Все три множества должны быть разными.)

**7.** Записать выражение для $A \triangle B$, использующее операции $\cup$, $\cap$ и $\setminus$.

**8.** Какие из равенств (**а**) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$; (**б**) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$; (**в**) $A \cup (B \setminus A) = B$; (**г**) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; (**д**) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ верны для всех $A$, $B$ и $C$?

**9.** Упростить выражение $A \triangle (B \triangle A)$.

**10.** Доказать, что $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ для любых трёх множеств $A$, $B$ и $C$

**11.** Доказать, что $A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$ для любых трёх множеств $A$, $B$ и $C$.

* * *

**12.** Дополнить фразу: «множество решений уравнения ... есть объединение множеств решений уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$».

**13.** Написать выражение для множества, состоящего из тех и только тех элементов, которые принадлежат ровно одному из трёх множеств $A$, $B$ и $C$.

**14.** Доказать, что $A_1 \triangle A_7 \subset (A_1 \triangle A_2) \cup (A_2 \triangle A_3) \cup \ldots \cup (A_6 \triangle A_7)$

**15.** Доказать, что значение выражения $A_1 \triangle A_2 \triangle A_3 \triangle \ldots \triangle A_n$ не зависит от расстановки в нём скобок.



**16.** Какие из четырёх операций $\cup, \cap, \setminus, \triangle$ можно выразить через три оставшиеся?

**17.** (Продолжение) Указать все случаи, в которых одну из четырёх указанных операций можно выразить через две других операции из того же списка. Сколько таких случаев?

**18.** Сколько различных выражений можно составить из букв $A$ и $B$ с помощью операций $\cap, \cup, \setminus$? Тот же вопрос для случая трёх букв $A, B, C$. Тот же вопрос для $n$ букв. (Два выражения считаются одинаковыми, если они обозначают одно и то же множество при всех значениях переменных. Например, выражения $A \cap (B \setminus C)$ и $(A \cap B) \setminus C$ одинаковы.)

**19.** Множество из 3 элементов имеет 8 подмножеств. Изобразить их в виде 8 точек плоскости с соблюдением такого правила: для любых двух подмножеств $A$ и $B$ точки $A$, $B$, $A \cap B$ и $A \cup B$ являются вершинами параллелограмма (возможно, вырождающегося в отрезок или точку). Нарисовать аналогичную картинку для 4 элементов вместо 3.

**20.** Какое максимальное число подмножеств 4-элементного множества можно выбрать, если требуется, чтобы ни одно из выбранных множеств не было бы подмножеством другого?

**21.** (Продолжение) Тот же вопрос для 100-элементного множества.

**22.** Какие из равенств задачи 8 верны хотя бы в одну сторону (левая часть всегда есть подмножество правой или наоборот)?

## Число элементов

Число элементов в множестве $A$ (если оно конечно) обозначают $|A|$.

**1.** Сколько чисел от 1 до 1000 делится на 2? Сколько чисел от 1 до 1000 делится на 3? Сколько чисел от 1 до 1000 делится или на 2, или на 3?

**2.** Доказать, что (**а**) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ для любых конечных множеств $A$, $B$; (**б**) $\max(m, n) = m + n - \min(m, n)$ для любых двух чисел $m$ и $n$; (**в**) $S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$ для любых двух фигур $A$, $B$ на плоскости (здесь $S(F)$ — площадь фигуры $F$); (**г**) $\text{НОК}(m, n) = mn/\text{НОД}(m, n)$ для любых двух целых положительных чисел $m$ и $n$ (здесь НОК — наименьшее общее кратное, НОД — наибольший общий делитель).

**3.** Выбрали четыре множества, каждое из которых содержит 40 элементов, а их объединение содержит не более 100 элементов. Доказать, что пересечение каких-то двух из них имеет не менее 10 элементов. Как сформулировать аналогичную задачу для площадей?

**4.** Объединение 10 фигур имеет площадь $S$. Доказать, что можно выбрать из них 7 так, чтобы их объединение имело площадь не менее $(7/10)S$. Как сформулировать аналогичную задачу для числа элементов?

**5.** Доказать «формулу включений и исключений» для трёх множеств $A, B, C$:

$$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|+|A \cap B \cap C|.$$

* * *

**6.** Сформулировать и доказать аналогичные формулы для большего числа множеств.

**7.** Сформулировать и доказать аналогичные формулы для максимума трёх чисел, для площади объединения трёх фигур и для наибольшего кратного трех чисел.

**8.** Формулу включений и исключений можно доказать с помощью тождества $(1-a)(1-b)(1-c) = 1-a-b-c+ab+ac+bc-abc$. Как? (То же самое рассуждение годится и для большего числа множеств.)

## Вариации на тему Бернулли

**1.** Указать натуральное $n$, для которого $1{,}01^n \geqslant 10$. (Сколько лет надо ждать, чтобы вклад в банке удесятерился, если платят 1% годовых?)

**2.** Каждый год 1% радиоактивного вещества (оставшегося к началу года) распадается. Доказать, что через 30 лет останется более 70% вещества.

**3.** Указать натуральное $n$, при котором $0{,}99^n \leqslant 1/10$.

**4.** Указать натуральное $n$, при котором $\sqrt[n]{10} \leqslant 1{,}01$.

**5.** Указать натуральное $n$, при котором $\sqrt[n]{0{,}1} \geqslant 0{,}99$.

**6.** Доказать, что при неотрицательном целом $n$ и при $h \geqslant 0$ выполнено неравенство $(1+h)^n \geqslant 1+nh$. Какие из предыдущих задач можно решить, сославшись на это неравенство?



**7.** Доказать, что при целом неотрицательном $n$ и при $0 \leqslant h \leqslant 1$ выполнено неравенство $(1-h)^n \geqslant 1-nh$.

**8.** Доказать, что $1{,}01^{2n} \geqslant n^2/10^4$.

**9.** Доказать, что при некотором целом $n > 0$ число $1{,}01^n$ будет больше числа $1000n$.

**10.** При каких натуральных $n$ выполнено неравенство $2^n > n$?

**11.** Тот же вопрос для неравенства $2^n > n^2$.

* * *

**12.** Каждый год 1% радиоактивного вещества (от оставшегося к началу года) распадается. Доказать, что через 30 лет останется менее 80% вещества.

**13.** Доказать, что при целом неотрицательном $n$ и при $0 \leqslant h \leqslant 1$ выполнено неравенство $(1-h)^n \leqslant 1-nh+n^2h^2$.

**14.** Известно, что $a_1, \ldots, a_n > 0$ и что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1/10$. Доказать, что

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) \geqslant 9/10.$$

**15.** (Продолжение) Доказать, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 11/10.$$

**16.** (Продолжение) Доказать, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \leqslant 10/9.$$

**17.** Известно, что $a_1, a_2, \ldots, a_{100} > 0$ и что

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_{100}) \leqslant 100.$$

Доказать, что найдётся такое $i$, что $a_i \leqslant 1/i$.

**18.** Доказать, что

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot99}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot100} < \frac{1}{10}.$$

**19.** Все числа бесконечной последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ положительны и не превосходят 100. Доказать, что найдётся такое $k$, что $a_{k+1}/a_k < 1{,}001$.

**20.** Доказать, что при некотором целом $n > 0$ выполнено неравенство $n^{100}/2^n < 1/1000$.

## Неравенства, оценки, суммы

**1.** Сколько знаков в десятичной записи числа $2^{40}$?

**2.** При каком натуральном $n$ значение дроби $10^n/n!$ будет наибольшим?

**3.** Указать целое положительное $n$, при котором $2^n/n! < 1/1000$.

**4.** Не пользуясь калькулятором, найти 3 знака после запятой в числах $\sqrt{1{,}001}$ и $\sqrt{0{,}999}$.

**5.** Описанный около круга квадрат разрезали на $1000 \times 1000$ равных квадратиков и отобрали те из квадратиков, которые не выходят за пределы круга. Доказать, что площадь полученной фигуры составляет не менее 99% от площади всего круга.

**6.** Найти значение $(3^{100}+4^{100})/(2^{100}+5^{100})$ с точностью до пяти десятичных знаков после запятой.

**7.** Из 50-значного числа извлекли квадратный корень, потом ещё раз, потом опять — и так сделали 50 раз. Доказать, что полученное число записывается как единица, после которой стоит запятая и как минимум 10 нулей.

**8.** В последовательности $2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ каждый следующий член равен сумме двух предыдущих. Доказать, что $n$-й член не меньше $(3/2)^n$.

**9.** Выяснить, существует ли натуральное $n$, при котором выполняется неравенство

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \geqslant 100.$$

(Указание: может ли $1/100+1/101+\ldots+1/n$ быть больше $1/2$?)

**10.** (Продолжение) Тот же вопрос для неравенства

$$1+0{,}99+0{,}99^2+0{,}99^3+\ldots+0{,}99^n \geqslant 100.$$

**11.** (Продолжение) Тот же вопрос для неравенства

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n} \geqslant 100.$$



**12.** (Продолжение) Тот же вопрос для неравенства

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \geqslant 100.$$

**13.** (Продолжение) Тот же вопрос для неравенства

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 100.$$

* * *

**14.** Пусть $a_n$ — число знаков в десятичной записи числа $3^n$. Доказать, что дроби $a_{1000}/1000$ и $a_{2000}/2000$ отличаются не более чем на $1/100$.

**15.** Не пользуясь калькулятором, найти 4 знака после запятой в числах $\sqrt{1{,}001}$ и $\sqrt{0{,}999}$.

**16.** Найти 1000 знаков после запятой в числе $(\sqrt{37}+6)^{1000}$.

**17.** Можно ли поместить в квадрат несколько непересекающихся кругов так, чтобы их суммарная площадь составляла бы более 99% площади всего квадрата?

**18.** Последовательность строится так: два первых её члена — произвольные положительные числа, а каждый следующий равен сумме двух предыдущих. Найти отношение 10-го члена к 9-му с точностью до двух десятичных знаков после запятой.

**19.** Последовательность строится так: первое число равно 1, а каждое следующее число $y$ получается из предыдущего $x$ по формуле $y = (x+(2/x))/2$. Доказать, что её 5-й член отличается от $\sqrt{2}$ менее чем на одну миллионную.

**20.** Доказать, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

**21.** (Продолжение) Показать, что левая часть этого неравенства увеличивается с ростом $n$.

**22.** Последовательность чисел строится так: первое число равно 1, каждое следующее число $y$ получается из предыдущего $x$ по формуле $y = x+1/x^2$. Найдётся ли в этой последовательности член, больший 100?

**23.** Последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$ строится по правилу $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 1/x_n$. Доказать, что $x_{n^2} \geqslant n$.

**24.** (Продолжение) Доказать, что $x_{100} > 14$.

**25.** (Продолжение) Найти целую часть $x_{100}$.

**26.** Выяснить, существует ли натуральное $n$, при котором выполняется неравенство

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}} \geqslant 100.$$

**27.** Доказать что при любом $n$ сумма

$$\sin 1 + \frac{\sin 2}{2} + \frac{\sin 3}{3} + \ldots + \frac{\sin n}{n}$$

не превосходит 10. (Углы измеряются в радианах.)

## Малые изменения

**1.** Два положительных числа изменили — каждое не более чем на 1% от его прежнего значения. Могла ли их сумма измениться более чем на 10%? более чем на 2%? Те же вопросы для их разности и для их произведения.

**2.** Число $x$ изменили не более чем на 0,01. Доказать, что его синус (то есть синус угла в $x$ радиан) изменился не более чем на 0,01.

**3.** (Продолжение) Верны ли аналогичные утверждения для косинуса и для тангенса?

**4.** Три стороны правильного треугольника изменили не более чем на 1% каждую. Доказать, что его площадь изменилась не более чем на 3%.

**5.** Число $x$ изменили не более чем на 0,1. Могло ли значение $x^2$ измениться более чем на 10? Тот же вопрос для значения $\sqrt{x}$.

**6.** Доказать, что при $|x| < 0{,}001$ погрешность приближённой формулы $(1+x)^2 \approx 1 + 2x$ не превосходит 1% от $|x|$. (Погрешностью приближённой формулы называется разница между левой и правой частями.)

**7.** (Продолжение) Та же задача для приближённой формулы $1/(1-x) \approx 1 + x$.

**8.** (Продолжение) Доказать, что при $|x| < 0{,}001$ погрешность приближённой формулы $1/(1-x) \approx 1 + x + x^2$ не превосходит 1% от $x^2$.



* * *

**9.** Три стороны правильного треугольника изменили не более чем на 1% каждую. Доказать, что радиус вписанной окружности изменился не более чем на 10%.

**10.** Три стороны правильного треугольника изменили не более чем на 1% каждую. Доказать, что радиус описанной окружности изменился не более чем на 10%.

**11.** Три стороны треугольника изменили не более чем на 1% каждую. Могла ли его площадь измениться более чем на 3%?

**12.** Число $x$ изменили не более чем на 0,01. Могло ли значение $\sin x^2$ измениться более чем на 1?

**13.** Доказать, что при $|x| < 0{,}001$ погрешность приближённой формулы $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ не превосходит 1% от $x$.

**14.** Придумать приближённую формулу для $\sqrt[3]{1+x}$ (для малых $x$) и оценить её погрешность при $|x| < 0{,}001$.

**15.** Показать, что при больших $x$ есть приближённая формула $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \approx 1/(2\sqrt{x})$: при $x > 1000$ погрешность не превосходит 1% от правой части формулы.

**16.** Доказать, что при $x$ от 0 до $\pi/2$ выполнены неравенства $\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$. Вывести из этого, что при $|x| < 0{,}01$ погрешность приближённой формулы $\sin x \approx x$ не превосходит 1% от $x$. (Углы измеряются в радианах.)

**17.** (Продолжение) Доказать, что при $|x| < 0{,}001$ погрешность приближённой формулы $\cos x \approx 1 - x^2/2$ не превосходит 1% от $x^2$. (Углы измеряются в радианах.)

## Математический анализ: разные задачи

**1.** Точки прямой раскрашены в два цвета: чёрный и белый (есть и те, и другие). Доказать, что есть две точки разного цвета на расстоянии меньше 0,01.

**2.** Все члены последовательности $x_1, x_2, \ldots$ лежат на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что можно найти отрезок длиной 1/1000, содержащий бесконечно много членов последовательности.

**3.** Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ называется *невозрастающей*, если $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots$, и *неубывающей*, если $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$ Показать, что из любой бесконечной последовательности можно выбросить часть членов так, чтобы осталась бесконечная неубывающая или невозрастающая последовательность.

**4.** Существует ли последовательность с таким свойством: любой интервал $(a, b)$ (где $a < b$) содержит бесконечно много членов этой последовательности?

5. Может ли последовательность не иметь ни наибольшего, ни наименьшего члена?

**6.** Доказать, что из 11 бесконечных десятичных дробей можно всегда выбрать две, которые совпадают в бесконечном числе разрядов.

7. Все члены последовательности $x_1, x_2, \ldots$ лежат на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что можно выбросить часть членов так, чтобы осталась бесконечная последовательность $y_1, y_2, \ldots$, для которого $|y_2 - y_1| \leqslant 1/2$, $|y_3 - y_2| \leqslant 1/4$ и вообще $|y_{i+1} - y_i| \leqslant 1/2^i$.

**8.** На плоскости выбрано 100 различных точек. Доказать, что можно провести прямую таким образом, чтобы на ней не лежало ни одной точки, по одну сторону было 43 точки, а по другую — 57 точек.

**9.** Найти коэффициенты $a$ и $b$, если известно, что прямая $y = ax + b$ проходит через точку $(1, 1)$ и имеет единственную общую точку с параболой $y = x^2$. Нарисовать прямую и параболу на одном чертеже.

**10.** Найти коэффициенты $a$ и $b$, если известно, что прямая $y = ax + b$ проходит через точку $(2, 1/2)$ и имеет единственную общую точку с гиперболой $y = 1/x$. Нарисовать прямую и гиперболу на одном чертеже.

* * *

11. Будем (в этой задаче) обозначать сумму цифр натурального числа $a$ через $s(a)$. Пусть даны два натуральных числа $a$ и $b$, причём $a < b$ и $s(a) < s(b)$. Показать, что на отрезке от $a$ до $b$ можно найти натуральное число с любой наперёд заданной суммой цифр в интервале от $s(a)$ до $s(b)$.

**12.** Даны последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$; $b_1, b_2, \ldots$; $c_1, c_2, \ldots$ Доказать, что можно найти два номера $i$ и $j$, для которых $i < j$, и при этом $a_i \leqslant a_j$, $b_i \leqslant b_j$ и $c_i \leqslant c_j$.

**13.** Функция $f$ ставит в соответствие каждому действительному числу $x$ некоторое действительное число $f(x)$, причём $|f(y) - f(x)| \leqslant (y - x)^2$ для всех $x$ и $y$. Что можно сказать о функции $f$?



**14.** Часть плоскости, находящаяся между графиком гиперболы $y = 1/x$ и осью абсцисс, разделена на куски вертикальными прямыми с абсциссами $1, a, a^2, a^3, \ldots$ (где $a > 1$ — некоторое число). Доказать, что площади всех кусков равны.

**15.** (Продолжение) Будет ли часть плоскости, ограниченная графиком гиперболы $y = 1/x$, осью абсцисс и прямой $x = 1$, иметь конечную или бесконечную площадь?

**16.** (Продолжение) Используя предыдущую задачу, доказать, что сумма $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$ может быть больше 1000.

**17.** (Продолжение) Сформулировать и решить аналогичные задачи для кривой $y = 1/(x\sqrt{x})$.

**18.** Пусть $S_1$ — площадь фигуры, ограниченной графиком $y = x^2$, осью абсцисс и прямой $x = 1$. Пусть $S_2$ — площадь фигуры, ограниченной графиком $y = \sqrt{x}$, осью абсцисс и прямой $x = 1$. Найти $S_1 + S_2$.

**19.** Доказать, что не всякое целое положительное число, большее 1000, можно представить в виде $2^x + 3^y + 4^z + 5^u + 6^v + w$, где $x, y, z, u, v$ — целые положительные числа, а $w$ — целое положительное число, меньшее 1000.

## Задачи устного экзамена

Экзамен проводился по следующей схеме. Каждый школьник в начале экзамена получал 4 задачи из некоторого набора. Любую задачу можно было рассказать (один раз), получив за её решение плюс или минус, либо отказаться от задачи, получив за неё ноль. В любом случае задача заменялась на новую; таким образом, в течение всего экзамена у школьника было 4 нерешённых задачи.

Часть задач была взята из листочков первых двух лет. Кроме того, предлагались следующие задачи:

**1.** Композиция $n$ симметрий равна композиции $m$ симметрий. Что можно сказать про $m$ и $n$?

**2.** Точки $A$ и $B$ находятся в противоположных четвертях перекрестка двух дорог. Найти кратчайший маршрут из $A$ в $B$, если дороги можно переходить только перпендикулярно.

**3.** В угол $\alpha$ между двумя зеркалами влетел солнечный луч и не попал в вершину. Доказать, что он вылетит обратно. При каких $\alpha$ он вылетит в противоположном направлении?

**4.** Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех квадратов натуральных чисел.

**5.** Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

**6.** Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех кубов натуральных чисел.

**7.** Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

**8.** Найти целые $m$ и $n$, не равные нулю, такие, что $|m+n\sqrt{5}|<0{,}001$.

**9.** Найти целые $m$ и $n$, не равные нулю, такие, что $|m+n\sqrt{7}|<0{,}001$.

**10.** Найти сумму $k$-х степеней всех корней $n$-й степени из единицы.

**11.** Найти сумму

$$1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\ldots+(n+1)2^n.$$

**12.** При каких $z, w \in \mathbb{C}$ расстояние между точками $z$ и $w$ больше расстояния между $z^2$ и $w^2$?

**13.** Найти сумму $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+99\cdot 100$.

**14.** Найти сумму

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 100}.$$

**15.** Найти сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}.$$

**16.** Найти все такие $z \in \mathbb{C}$, что $z$, $z^2$, $z^3$ и $z^4$ образуют квадрат.

**17.** Какое наибольшее значение может принимать сумма $|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-e|+|e-a|$, если числа $a, b, c, d, e$ лежат на отрезке $[0,1]$?



**18.** Найти минимум выражения $a^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(1-c)^2$.

**19.** Существуют ли такие числа $x$ и $y$, что $\sin y-\sin x=(y-x)/57$?

**20.** Доказать, что если треугольник не является равносторонним, то существует другой треугольник той же площади и меньшего периметра.

**21.** Доказать, что если треугольник не является равносторонним, то существует другой треугольник того же периметра и большей площади.

**22.** Сколько существует троек целых чисел $\{a,b,c\}$, для которых $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 10$?

**23.** Доказать, что количество троек целых чисел $\{a,b,c\}$, для которых $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 10$, равно количеству троек целых чисел $\{a,b,c\}$, для которых $0<a<b<c<14$.

**24.** На каждом шаге кузнечик прыгает вправо или влево на 1 см по прямой. Он сделал 17 шагов и сдвинулся вправо на 9 см. Сколькими способами он мог это сделать?

**25.** Найти максимальное значение произведения $ab$, если $a$ и $b$ — неотрицательные действительные числа и, кроме того, $a+2b\leqslant 1$.

**26.** Все шесть координат вершин треугольника — целые числа, и его площадь равна $S$. Доказать, что число $2S$ — целое.

**27.** По кругу написано несколько чисел, и каждое есть среднее арифметическое двух соседей. Доказать, что все числа равны.

**28.** Есть 10 целых чисел. Всегда ли из них можно выбрать несколько чисел, сумма которых делится на 7?

**29.** Есть 10 целых чисел. Всегда ли из них можно выбрать 5 чисел, сумма которых делится на 7?

**30.** Могут ли в последовательности Фибоначчи два числа, стоящие через одно, оба делиться на 17?

**31.** Доказать, что если число $a^2+b^2$ делится на 7, то $a^2+b^2$ делится на 49 ($a$ и $b$ — целые числа).

**32.** Может ли в прямоугольном треугольнике с целыми сторонами гипотенуза быть чётной, а один из катетов — нечётным?

**33.** Можно ли построить угол в $7^\circ$, имея угол в $37^\circ$?

**34.** На какое максимальное число частей могут делить плоскость 17 окружностей?

**35.** Какой остаток даёт число $1^2+2^2+3^2+\ldots+57^2$ при делении на 7?

**36.** Бывают ли такие три отрезка, что любые два из них несоизмеримы?

**37.** Найти число знаков в десятичной записи числа $3^{100}$ с ошибкой не более чем в 10%.

**38.** Сколько чисел от 1 до 1000 взаимно просто с числом 1001?

**39.** Найти сумму $1+3+5+7+\ldots+999$.

**40.** Всегда ли среди 100 целых чисел можно найти две различные группы с одинаковой суммой?

**41.** Всегда ли среди 100 шестизначных чисел можно найти две непересекающиеся группы с одинаковой суммой?

**42.** Доказать, что в любой строке треугольника Паскаля сумма членов с чётными номерами (считая от начала строки) равна сумме членов с нечётными номерами.

**43.** Доказать, что в треугольнике Паскаля есть бесконечно много строк, в которых все числа нечётны.

**44.** Доказать, что любое целое число рублей, более 400, можно заплатить купюрами по 17 рублей и 19 рублей (без сдачи).

**45.** По кругу стоят 7 чисел, сумма любых трёх подряд идущих больше 5. Доказать, что сумма всех чисел больше 11.

**46.** Известно, что $a^2+b^2+c^2=9$, $a+b+c=5$. Найти $ab+bc+ac$.

**47.** На окружности помечено 10 точек. Сколькими способами можно провести 5 непересекающихся хорд с вершинами в этих точках?

**48.** Окружность радиуса $2\pi$ нарисована на клетчатой бумаге со стороной 1. Какое максимальное число клеток она может пересекать? (Считаются лишь пересечения с внутренностью клетки.)



**49.** Можно ли провести прямую на клетчатой бумаге, которая проходит ровно через один узел?

**50.** Можно ли провести прямую на клетчатой бумаге, которая проходит ровно через два узла?

**51.** Можно ли провести прямую на клетчатой бумаге, которая не подходит ни к одному узлу ближе чем на $1/10$ стороны клетки?

**52.** Может ли окружность проходить через 12 точек плоскости с целыми координатами?

# Задачи 1998 – 1999 года

Начиная с этого года, дополнительные задачи не выносились в конец листка, а просто отмечались звёздочками. Среди этих задач есть и весьма трудные, которые решили лишь немногие сильные школьники. Экзамен в этом году был теоретическим (в билете было два вопроса и задачи); в теоретическую часть входили некоторые темы лекций (см. главу «Популярные лекции по математике»). Мы приводим в конце главы примерную программу экзамена.

## Взаимно-однозначные соответствия. Счётные множества

Если между элементами (конечных) множеств $A$ и $B$ можно установить *взаимно однозначное соответствие* (каждому элементу одного соответствует ровно один элемент другого), то множества содержат равное число элементов.

**1.** На окружности выбрано 100 точек. Доказать, что число 57-угольников с вершинами в выбранных точках равно количеству 43-угольников с вершинами в выбранных точках.

**2.** Доказать, что количество последовательностей из нулей и единиц длины 100, в которых число единиц нечётно, равно количеству последовательностей из нулей и единиц длины 100, в которых число единиц чётно. Какому тождеству для биномиальных коэффициентов соответствует это утверждение?

**3.** Для каждого целого положительного числа $n$ подсчитаем число его целых положительных делителей. Доказать, что это число нечётно тогда и только тогда, когда $n$ — точный квадрат.

**4.*** Координатная плоскость разбита на клетки размера $1 \times \times 1$ (углы клеток имеют целые координаты). (а) Доказать, что число путей (по сторонам клеток) длины 18 из точки $(1, 0)$ в точку $(10, 9)$, имеющих хотя бы одну общую точку с диагональю $y = x$, равно числу всех путей длины 18 из точки $(1, 0)$ в точку $(9, 10)$. (б) Найти число путей длины 18 из точки $(1, 0)$ в точку $(10, 9)$, проходящих целиком в обла-



сти $y < x$. (**в**) Найти количество различных последовательностей из 10 нулей и 10 единиц, в которых любой начальный отрезок содержит не меньше нулей, чем единиц. Какую долю составляют они среди всех последовательностей из 10 нулей и 10 единиц?

**5.** Доказать, что число способов разрезать $n$-угольник на треугольники, проведя непересекающиеся диагонали, равно числу способов расстановок скобок в произведении $n - 1$ сомножителей (без изменения их порядка). Например, пятиугольник можно разрезать на треугольники пятью способами, и в произведении $abcd$ есть пять расстановок скобок: $(ab)(cd)$, $(a(bc))d$, $((ab)c)d$, $a((bc)d)$, $a(b(cd))$. (Указание: сомножители можно писать на сторонах, а произведения — на диагоналях.)

**6.*** Найти формулу для числа способов в задаче 5.

Взаимно однозначное соответствие можно устанавливать и между бесконечными множествами. Если для данных двух множеств это возможно, множества называют *равномощными* (имеющими равную *мощность*).

**7.** Установить взаимно однозначное соответствие (а) между множеством целых чисел и множеством чётных целых чисел; (б) между множеством целых чисел и множеством неотрицательных целых чисел; (**в**) между множеством простых чисел и множеством составных натуральных чисел; (г) между множеством целых чисел и множеством точек на плоскости, обе координаты которых целые.

**8.** Установить взаимно однозначное соответствие (а) между отрезками разной длины (например, $[0, 1]$ и $[2, 4]$ на числовой оси); (б) между интервалом $(0, 1)$ и лучом $(1, +\infty)$ на числовой оси; (**в**) между интервалом $(0, 1)$ и всей числовой осью $\mathbb{R}$; (г) между окружностью и границей квадрата; (д) между кругом и квадратом (внутренности включаются).

**9.** Установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех бесконечных последовательностей нулей и единиц и множеством всех подмножеств натурального ряда.

**10.** Установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех бесконечных последовательностей нулей и единиц и множеством всех бесконечных последовательностей, составленных из цифр $0, 1, 2, 3$.

**11.*** Тот же вопрос, если вместо цифр $0, 1, 2, 3$ рассматривать цифры $0, 1, 2$.

**12.*** Указать многочлен $P(x, y)$, устанавливающий взаимно однозначное соответствие между множеством пар неотрицательных целых чисел и множеством неотрицательных целых чисел.

Множество называется *счётным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел (другими, словами, если его элементы можно перенумеровать).

**13.** Доказать, что любые два счётных множества равномощны.

**14.** Доказать, что любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

**15.** Доказать, что всякое бесконечное подмножество счётного множества счётно.

**16.** Доказать, что объединение двух непересекающихся счётных множеств счётно.

**17.** Доказать, что объединение любых двух счётных множеств счётно.

**18.** Доказать, что объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно.

**19.** Доказать, что (а) множество всех пар $(m, n)$ натуральных чисел (точек на плоскости, обе координаты которых натуральные) счётно; (б) множество рациональных чисел (отношений целых чисел) счётно; (в) множество всех периодических десятичных дробей счётно; (г) множество всех конечных последовательностей нулей и единиц счётно; (д) множество всех конечных последовательностей, элементами которых являются целые числа, счётно.

**20.** Число корней многочлена степени $n$ не превосходит $n$. Используя этот факт, доказать, что множество *алгебраических* чисел, то есть чисел, являющихся корнями ненулевых многочленов с целыми коэффициентами, счётно.

**21.** Доказать, что если $A$ бесконечно, а $B$ конечно или счётно, то $A \cup B$ равномощно $A$.



**22.** Установить взаимно однозначное соответствие между интервалом $(0, 1)$ и полуинтервалом $[0, 1)$.

**23.** Доказать, что интервал (на числовой оси), отрезок, вся числовая ось и окружность равномощны.

**24.** Доказать, что множество всех точек плоскости равномощно множеству всех прямых на плоскости.

**25.** Доказать, что открытый круг (круг без границы) равномощен кругу с границей.

**26.** Доказать, что множество всех точек плоскости равномощно множеству всех точек квадрата.

**27.** Доказать, что множество иррациональных чисел равномощно множеству всех действительных чисел.

**28.** Доказать, что $[0, 1] \cup [2, 3]$ равномощно $[0, 1]$.

**29.** (Определение бесконечности по Дедекинду) Доказать, что множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно своей части (не совпадающей со всем множеством).

**30.*** Выбрано некоторое множество интервалов на прямой, причём известно, что любые два интервала из этого множества не имеют общих точек. Доказать, что это множество конечно или счётно.

**31.*** На плоскости нарисовано некоторое множество непересекающихся восьмёрок (они не имеют общих точек, но одна может целиком лежать внутри другой). Доказать, что это множество конечно или счётно.

**32.*** Доказать, что множество точек плоскости, у которых координата $x$ целая, равномощно прямой.

**33.*** Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц несчётно, найдя способ для любого счётного множества последовательностей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ указать последовательность, отличающуюся от всех $\alpha_i$.

**34.*** (а) Построить взаимно однозначное соответствие между интервалом $(0, 1)$ и лучом $(1, +\infty)$, сохраняющее порядок (бóльшие числа соответствуют бóльшим). (б) Можно ли сделать это для множеств $(0, 1)$ и $[0, 1)$? (в) для множеств $\mathbb{Z}$ (целые числа) и $\mathbb{Q}$ (рациональные числа)? (г) для множеств $\mathbb{Q}$ и $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$? (д) для множества рациональных чисел и множества конечных десятичных дробей (то есть чисел вида $m/10^n$ при целых $m$ и $n$)?

**35.*** Можно ли построить взаимно однозначное соответствие между точками прямой и плоскости, если требуется, чтобы расстояния между соответствующими парами точек отличались не более чем в 10 раз?

**36.*** Существует ли взаимно однозначное соответствие $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, при котором $f(5n+1) = 3f(n)+1$ для всех $n$?

**37.*** Доказать, что всякая функция $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ может быть представлена в виде суммы $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, где каждая из трёх функций $f_1, f_2, f_3$ является взаимно однозначным соответствием $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.

**38.*** Установить взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, сохраняющее порядок. Как вы думаете, можно ли сделать то же самое для $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

**39.*** Доказать, что нельзя изобразить на карте участок местности (считаем Землю шаром) так, чтобы расстояния между точками на карте были в одно и то же число раз меньше расстояний между соответствующими точками на местности. (Два варианта: расстояния на местности могут измеряться по прямой или по поверхности сферы; в обоих случаях это невозможно.)

## Контрольная работа (21 сентября 1998 года)

**1.** Сколько существует различных взаимно однозначных соответствий между двумя множествами из $n$ элементов. (Два соответствия различны, если одному и тому же элементу ставят в соответствие разные.)

**2.** Доказать, что всякое счётное множество можно разбить на три непересекающихся счётных множества.

**3.** Разбить отрезок на счётное число равномощных друг другу частей.

**4.** Счётно ли множество бесконечных последовательностей нулей и единиц, в которых число нулей конечно?

**5.** Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству всех бесконечных последовательностей натуральных чисел.



**6.** Установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех лучей и множеством всех окружностей положительного радиуса (на плоскости).

**7.** Доказать, что всякое множество непересекающихся кругов на плоскости счётно.

**8.** Любое ли множество непересекающихся букв Т счётно?

## Последовательности

Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ называется *ограниченной сверху*, если существует её *верхняя грань* — такое число $c$, что все члены последовательности не превосходят $c$. Символическая запись этого условия ($\exists c$ означает «существует $c$», $\forall i$ означает «для всех $i$»):

$$\exists c\ \forall i\ (a_i \leqslant c).$$

**1.** Сформулировать определение ограниченной снизу последовательности. Сформулировать определение последовательности, не ограниченной сверху (не используя слова «не»).

Говоря об *ограниченной* последовательности, имеют в виду последовательность, ограниченную и сверху, и снизу.

**2.** Может ли ограниченная последовательность не иметь ни наибольшего, ни наименьшего члена? (Наибольший (наименьший) член — тот, который является верхней (нижней) гранью.)

**3.** Является ли последовательность $a_n = 10^n/n!$ ограниченной?

**4.** Тот же вопрос для последовательности $a_n = 1{,}01^n$.

**5.** $\ldots a_n = n^2/2^n$.

**6.** $\ldots a_n = \sqrt[n]{n!}$.

**7.** $\ldots a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}$, где $a_0 = 0$.

**8.*** $\ldots a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

**9.*** $\ldots a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$.

**10.*** $\ldots a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

**11.** Ограничена ли последовательность, заданная формулами $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1/a_n$?

**12.** Доказать, что сумма и произведение ограниченных последовательностей ограничены: если последовательности $a_n$ и $b_n$ ограничены, то и последовательности $c_n = a_n + b_n$ и $d_n = a_n b_n$ ограничены. Верны ли аналогичные утверждения для разности и частного?

Будем называть множество $M$ «ловушкой» для последовательности $a_0, a_1, \ldots$, если все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера, лежат в $M$. Будем называть множество $M$ «кормушкой» для этой последовательности, если оно содержит бесконечно много членов последовательности.

**13.** Может ли ловушка не быть кормушкой? может ли кормушка не быть ловушкой? Можно ли утверждать, что один из отрезков $[0, 1]$ и $[1, 2]$ является ловушкой, если известно, что отрезок $[0, 2]$ является ловушкой? Можно ли утверждать, что один из отрезков $[0, 1]$ и $[1, 2]$ является кормушкой, если известно, что отрезок $[0, 2]$ является кормушкой?

**14.** Володя считает, что последовательность ограничена тогда и только тогда, когда существует отрезок, являющийся её ловушкой. Прав ли он?

Символическая запись: множество $M$ является ловушкой для последовательности $a_0, a_1, \ldots$, если

$$\exists N\ (\forall n > N)\ (a_n \in M).$$

**15.** (а) Записать аналогичным образом определение кормушки. (б) Закончить фразу: «множество $M$ не является ловушкой для последовательности в том и только том случае, когда...» (не используя слов «не существует» или «не для всех»).

**16.** Существует ли последовательность, для которой любой интервал является кормушкой? для которой любой интервал является ловушкой?

**17.** Доказать, что для любой ограниченной последовательности существует отрезок длины 1, который является её кормушкой.

**18.** Доказать, что для всякой ограниченной монотонной последовательности существует отрезок длины 1, являющийся её ловушкой.



Если из последовательности выбросить некоторые члены, сохранив порядок оставшихся, получится её *подпоследовательность*.

**19.** Доказать, что у любой бесконечной последовательности есть монотонная (невозрастающая или неубывающая) бесконечная подпоследовательность.

**20.*** Доказать, что у всякой последовательности длины $n^2 + 1$ существует монотонная подпоследовательность длины $n + 1$, но у последовательности длины $n^2$ может не быть монотонной подпоследовательности длины $n + 1$.

**21.** Существует ли такая последовательность целых чисел, что любая другая последовательность целых чисел является её подпоследовательностью?

**22.*** Существует ли такая последовательность целых чисел, что любое целое положительное число представимо в виде разности двух членов этой последовательности, причём единственным способом?

**23.** Последовательность $x_0, x_1, \ldots$ такова, что $|x_{n+1} - x_n| \leqslant 1/2^n$ при всех $n$. Может ли эта последовательность не быть ограниченной? Тот же вопрос, если $|x_{n+1} - x_n| \leqslant 1/n$.

**24.** Закончить определение: последовательность точек на плоскости называется ограниченной, если...

**25.*** Квадратная таблица $100 \times 100$ заполнена числами. За один шаг можно изменить знак у всех чисел одной строки или у всех чисел одного столбца. Доказать, что с помощью нескольких таких операций можно добиться, чтобы суммы чисел во всех строках и суммы чисел во всех столбцах были неотрицательными.

## Пределы

Говорят, что последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *имеет предел* 0 (стремится к нулю, сходится к нулю, является бесконечно малой), если для любого положительного числа $\varepsilon$ интервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$ является ловушкой. Обозначение: $a_n \to 0$ (или $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$).

**1.** Записать это определение символически:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \exists N \ldots$$

**2.** Продолжить фразу: «Последовательность $a_0, a_1, \ldots$ не стремится к нулю, если...», не используя слова «не».

**3.** Доказать, что последовательность $a_n = 1/n$ стремится к нулю, указав, как находить $N$ по $\varepsilon$ (см. задачу 1).

**4.** Доказать, что последовательность $a_n = 1/n^2$ стремится к $0$.

**5.** Тот же вопрос для последовательности $a_n = 1/2^n$.

**6.** $\ldots a_n = 0{,}99^n$.

**7.** $\ldots a_n = n/2^n$.

**8.** $\ldots a_n = n^{10}/2^n$.

**9.** $\ldots a_n = 2^n/n!$.

**10.** $\ldots a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

**11.** $\ldots a_n = (\sin n)/n$.

**12.** Может ли сходящаяся к $0$ последовательность перестать сходиться к $0$, если переставить её члены?

**13.** Последовательности $a_0, a_1, \ldots$ и $b_0, b_1, \ldots$ стремятся к $0$. Доказать, что их сумма и разность, заданные формулами $c_i = a_i \pm b_i$, также стремятся к нулю.

**14.** Последовательность $a_0, a_1, \ldots$ стремится к $0$, а последовательность $b_0, b_1, \ldots$ ограничена. Доказать, что произведение $c_i = a_i b_i$ стремится к нулю.

**15.** Известно, что последовательность неотрицательных чисел стремится к нулю. Доказать, что последовательность квадратных корней из них также стремится к нулю.

**16.** Закончить определение предела последовательности: «последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *имеет предел* $a$, если для любого $\varepsilon > 0$ ...». Обозначение: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся* (к этому пределу).

**17.** Доказать, что у последовательности может быть только один предел.

**18.** Найти предел последовательности $a_n = (n-1)/n$.



**19.** Доказать, что последовательность $1, -1, 1, -1, \ldots$ не имеет предела.

**20.** Найти предел последовательности $\sqrt[n]{2}$.

**21**.* Найти предел последовательности $\sqrt[n]{n}$.

**22.** Найти предел последовательности, заданной соотношением $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, если $x_0 > 0$.

**23.** Сходящаяся последовательность имеет бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных членов. Доказать, что её предел равен $0$.

**24.** Доказать, что если последовательность $x_n$ имеет ненулевой предел и все её члены отличны от нуля, то последовательность $y_n = 1/x_n$ ограничена.

**25.** Закончить фразу: «Последовательность $x_0, x_1, \ldots$ имеет предел $a$ тогда и только тогда, когда её можно представить в виде $x_i = a + y_i$, где...».

**26.** Может ли сходящаяся последовательность перестать быть сходящейся, если изменить конечное число её членов?

**27.** Может ли сходящаяся последовательность начать сходиться к другому пределу, если изменить все её члены с нечётными номерами?

**28.** Может ли сходящаяся последовательность иметь расходящуюся (т. е. не сходящуюся) подпоследовательность?

**29.** Доказать, что сходящаяся последовательность всегда ограничена.

**30.** Доказать *теорему о двух милиционерах*: если $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ при всех $n$ и последовательности $a_0, a_1, \ldots$ и $c_0, c_1, \ldots$ (милиционеры) имеют один и тот же предел (отделение) то последовательность $b_0, b_1, \ldots$ также сходится к этому пределу.

**31**.* Сходится ли последовательность $10^n/2^{(n^2)}$ к нулю?

**32.** Сходится ли последовательность $x_n = \sin n$?

**33.** Сходится ли последовательность $x_n = \sin(1/n)$?

**34.** Сходится ли последовательность $x_n = \cos(1/n)$?

**35.** Сходится ли последовательность $x_n = (1/n)\sin n$?

**36**.* Сходится ли последовательность $x_n = n\sin(1/n)$?

**37**.* Может ли сходящаяся последовательность не иметь ни наибольшего, ни наименьшего членов?

**38.** Последовательность состоит из положительных членов, при этом сумма любого числа её членов не превосходит $1$. Доказать, что она стремится к $0$.

**39.** Найти предел последовательности $a_n = (1 + 1/n^2)^n$.

**40**.* Найти предел последовательности, заданной соотношением $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$, если $x_0 > 0$.

**41**.* Найти предел последовательности $x_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.

**42**.* Доказать, что последовательность, для которой $x_0 = 1$ и $x_{n+1} = (x_n + 3/x_n)/2$, сходится.

**43**.* Первые два члена $x_0$ и $x_1$ последовательности положительны, а каждый следующий равен сумме двух предыдущих: $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$. Доказать, что последовательность отношений $y_n = x_{n+1}/x_n$ имеет предел.

## Аксиома полноты и её следствия

Число $c$ называют *верхней гранью* числового множества $X$, если все элементы этого множества не превосходят $c$. Символическая запись: $(\forall x \in A)(x \leqslant c)$. Аналогично определяется *нижняя грань*.

**1.** Какие числа являются верхними и нижними гранями множества $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$?

Следующее свойство действительных чисел мы принимаем без доказательства:

*Аксиома полноты*. Пусть $L$ и $R$ — два числовых множества, причём любой элемент первого не превосходит любого элемента второго ($l \leqslant r$ для всех $l \in L$ и $r \in R$). Тогда существует число $c$, разделяющее $L$ и $R$, то есть являющееся верхней гранью $L$ и нижней гранью $R$.

**2.** Пусть $L$ и $R$ — множества действительных чисел, для которых $l < r$ при всех $l \in L$ и $r \in R$. Можно ли утверждать, что найдётся $c$, при котором $l < c < r$ для всех $l \in L$ и $r \in R$?

**3**.* Утверждение, аналогичное аксиоме полноты, можно сформулировать для любого упорядоченного множества. Верно ли оно для (а) целых чисел; (б) рациональных чисел; (в) бесконечных последовательностей нулей и единиц (упорядоченных *лексикографически*: одна последовательность меньше другой, если до некоторого позиции они совпадают, а в этой позиции у первой стоит нуль, а у второй — единица).



**4.** (Существование точной верхней грани) Пусть $L$ — ограниченное сверху множество. Доказать, что среди всех его верхних граней существует наименьшая. Она называется *точной верхней гранью* и обозначается $\sup L$ (supremum).

По аналогичным причинам любое ограниченное снизу множество $R$ имеет *точную нижнюю грань* $\inf R$ (infimum).

**5**.* Часто аксиома полноты формулируется так: любое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань. Доказать, что эта формулировка равносильна приведённой выше.

**6.** Доказать, что всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел. (Указание: верхняя грань множества значений ограниченной возрастающей последовательности является её пределом.)

Многие из (молчаливо) принятых нами без обоснования утверждений можно вывести из аксиомы полноты.

**7**.* (Аксиома Архимеда) Доказать, что множество натуральных чисел не ограничено сверху: для всякого числа существует большее его натуральное. (Указание: множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел вместе с каждым числом содержит на единицу большее; такое множество не может иметь точной верхней грани.)

**8**.* Доказать, что существует $\sqrt{2}$, то есть действительное число $\alpha > 0$, для которого $\alpha^2 = 2$. (Указание: рассмотрим множество положительных рациональных чисел, квадрат которых меньше $2$, и возьмём его точную верхнюю грань.)

**9.** (Лемма о вложенных отрезках) Доказать, что любая последовательность вложенных отрезков

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

(каждый следующий отрезок есть часть предыдущего) имеет общую точку (принадлежащую всем отрезкам).

**10.** Доказать, что множество действительных чисел несчётно: для любой последовательности действительных чисел $x_0, x_1, x_2, \ldots$ можно указать число, не совпадающее ни с одним из $x_i$.

**11.*** Последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ такова, что $|x_{i+1} - x_i| \leqslant 1/i^2$. Доказать, что она сходится.

Последовательность называется *фундаментальной*, если она имеет отрезки-ловушки сколь угодно малой длины: для всякого $\varepsilon > 0$ существует отрезок длины не более $\varepsilon$, являющийся её ловушкой.

**12.** Более традиционно такое определение фундаментальной последовательности:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \exists N\ (\forall k, l > N)\ (|x_k - x_l| \leqslant \varepsilon).$$

Показать, что это определение равносильно только что приведённому.

**13.** (а) Доказать, что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна. (б) Доказать, что всякая фундаментальная последовательность ограничена. (в) Доказать, что если фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность, то она и сама сходится (к тому же пределу). (Как мы увидим, из аксиомы полноты следует, что всякая фундаментальная последовательность сходится.)

**14.** Последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ такова, что $|x_{i+1} - x_i| \leqslant 1/i^2$. Доказать, что она фундаментальна.

**15.** Используя аксиому полноты, показать, что всякая фундаментальная последовательность сходится.

**16.** Доказать, что всякая ограниченная последовательность имеет фундаментальную (и, следовательно, сходящуюся) подпоследовательность.

**17.*** Дать определения сходящейся и фундаментальной последовательности точек плоскости. Всякая ли фундаментальная последовательность на плоскости сходится?

**18.*** Сформулировать и доказать аналог леммы о вложенных отрезках на плоскости.

**19.*** Говорят, что последовательность интервалов $I_1, I_2, I_3, \ldots$ образует *покрытие* множества $M$, если всякая точка этого множества входит в (хотя бы) один из интервалов $I_n$. (а) Можно ли указать покрытие интервала бесконечной последовательностью других интервалов, в котором ни один из интервалов нельзя выбросить (оставив покрытие покрытием)? (б) Тот же вопрос для покрытия отрезка бесконечной последовательностью интервалов.



**20.** Точка $a$ называется *предельной точкой* последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$, если любой интервал, содержащий $a$, содержит бесконечно много членов этой последовательности. (а) Записать это определение с помощью кванторов. (б) Доказать, что число $a$ является предельной точкой последовательности тогда и только тогда, когда некоторая её подпоследовательность сходится к $a$. (в) Доказать, что всякая ограниченная последовательность имеет предельную точку.

**21.*** Существует ли последовательность, предельными точками которой являются числа $1, 1/2, 1/3, \ldots$ (и только они)?

**22.*** (а) Имеется множество отрезков, любые два из которых имеют общую точку. Можно ли утверждать, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам? (б) Тот же вопрос для интервалов на прямой. (в) Тот же вопрос для кругов на плоскости. (г) Тот же вопрос для прямоугольников на плоскости (стороны параллельны осям координат; прямоугольник рассматривается вместе со внутренностью).

**23.*** На плоскости имеется конечное множество кругов, причём любые три круга из этого множества имеют общую точку. Следует ли из этого, что существует точка, принадлежащая всем кругам?

**24.*** (Продолжение) Тот же вопрос для бесконечного множества кругов.

## Разные задачи о пределах

**1.** Последовательность $x_n$ сходится к $a$; последовательность $y_n$ сходится к $b$. Доказать, что последовательности $x_n + y_n$ и $x_n - y_n$ сходятся к $a + b$ и $a - b$ соответственно.

**2.** Последовательность $x_n$ сходится к $a$, последовательность $y_n$ сходится к $b$. Доказать, что последовательность $x_n y_n$ сходится к $ab$. (Указание: удобно записать $x_n$ и $y_n$

как $a + \alpha_n$ и $b + \beta_n$.)

**3.** Последовательность $x_n$ сходится к $a \neq 0$. Доказать, что почти все её члены (все, кроме конечного числа) отличны от $0$ и что последовательность $y_n = 1/x_n$ сходится к $1/a$.

**4.** Последовательность $x_n$ сходится к $a$; последовательность $y_n$ сходится к $b$, причём $b \neq 0$. Доказать, что последовательность $x_n/y_n$ сходится к $a/b$.

**5.** Найти предел последовательности $(2n^2+n+3)/(3n^2-n-2)$. (Указание: это легко сделать почти без вычислений, пользуясь предыдущими задачами.)

**6.** Что можно сказать о сходимости последовательностей $x_n + y_n$ и $x_n y_n$, если (а) одна из последовательностей $x_n$ и $y_n$ сходится, а другая расходится? (б) обе расходятся?

**7.** (а) Дать определение стремящейся к бесконечности последовательности и доказать, что $x_0, x_1, \ldots$ стремится к бесконечности (запись: $x_i \to \infty$) тогда и только тогда, когда последовательность $y_i = 1/x_i$ сходится к нулю. (б) Дать определение стремящейся к $+\infty$ последовательности.

**8.** Известно, что последовательность $x_n$ имеет предел. (а) Доказать, что последовательность $y_n = x_{n+1} - x_n$ сходится к нулю. (б) Верно ли обратное? (**в**) Что можно сказать про последовательность $x_{n+1}/x_n$?

**9.** Что можно сказать о последовательностях $x_n + y_n$, $x_n - y_n$, $x_n y_n$ и $x_n/y_n$, если известно, что последовательности $x_n$ и $y_n$ стремятся к $+\infty$?

**10.*** Доказать, что $0{,}99^n$ сходится к $0$, можно так: сначала (с помощью аксиомы полноты) установить, что предел существует, а затем — что он равен $0$. Провести это рассуждение подробно.

**11.** Последовательность $a_n$ состоит из положительных чисел. Предположим, что последовательность отношений соседних членов $a_{n+1}/a_n$ имеет предел $\alpha$. Что можно сказать о последовательности $a_n$, если известно, что (а) $\alpha < 1$; (б) $\alpha = 1$; (**в**) $\alpha > 1$?

**12.** Доказать, что при любом целом положительном $c$ и при любом $a > 1$ последовательность $n^c/a^n$ сходится к $0$ (геометрическая прогрессия растёт быстрее любой степени).



**13.** Доказать, что при любом $a > 0$ последовательность $a^n/n!$ сходится к $0$ (факториал растёт быстрее геометрической прогрессии).

**14.** Какое из чисел $2^{n\sqrt{n}}$ и $n!$ больше при больши́х $n$?

**15.** Найти предел последовательности $\sqrt[n]{n^c}$ (здесь $c$ — фиксированное положительное целое число).

**16.** Найти предел последовательности $\sqrt[n]{2^n + 3^n}$.

**17.** Найти предел последовательности $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$.

**18.*** Найти предел последовательности $\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n$.

**19.*** Найти предел последовательности $\sqrt[3]{n^3 + n} - n$.

**20.** Последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ из неотрицательных чисел сходится к числу $a$. Доказать, что $a$ неотрицательно и $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$.

**21.** (Продолжение) Тот же вопрос для $\sqrt[3]{x_n}$.

**22.** Последовательность чисел $x_0, x_1, \ldots$ сходится к числу $a$. Доказать, что последовательность $\sin x_0, \sin x_1, \ldots$ сходится к числу $\sin a$. Верны ли аналогичные утверждения для косинуса и тангенса?

**23.** Последовательность $x_n$ определена так: $x_0 = 0$, а $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$. Найти её предел (если он есть).

**24.*** (Продолжение) Тот же вопрос, если $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$.

**25.** Последовательность $x_n$ определена так: $x_0 = 1$, а $x_{n+1} = \sin x_n$. Найти её предел (если он есть).

**26.*** Тот же вопрос, если $x_0 = 1$, а $x_{n+1} = \cos x_n$.

**27.** Каждый следующий член последовательности на единицу больше трети предыдущего. Доказать, что последовательность сходится и найти её предел.

**28.** Функция $f$ с действительными аргументами и значениями такова, что $|f(y) - f(x)| \leqslant 0{,}99|y - x|$ для всех $x$ и $y$. Доказать, что при любом $a$ последовательность $a$, $f(a)$, $f(f(a))$, $f(f(f(a)))$,... сходится и что её предел $\alpha$ является неподвижной точкой функции $f$, то есть $f(\alpha) = \alpha$.

**29.*** Последовательность $x_n$ точек отрезка $[0, 1]$ определена соотношением $x_{n+1} = f(x_n)$, где $f$ — функция, график которой изображён на рис. 24. При каких $x_0$ эта последовательность имеет предел и чему равен этот предел? (Дать ответ для каждого из двух вариантов рисунка.)

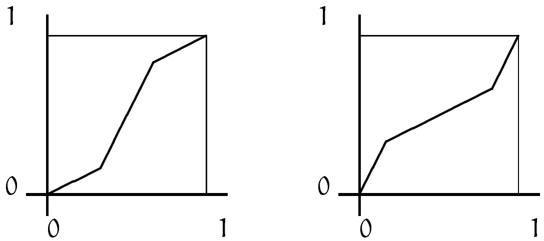

Рис. 24

**30.** Первые два члена последовательности равны $a$ и $b$, а каждый следующий есть среднее арифметическое двух предыдущих. Доказать, что последовательность сходится, и найти её предел.

**31.*** Последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ состоит из положительных чисел, и каждый член последовательности равен сумме двух предыдущих. Доказать, что предел $x_{n+1}/x_n$ существует, и найти его.

**32.*** Последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ определена рекуррентным соотношением $x_{n+1} = 1 + 1/x_n$; при этом $x_0 = 2$. Доказать, что эта последовательность сходится, и найти её предел.

**33.*** Пусть $n_0, n_1, n_2, \ldots$ — произвольная последовательность целых положительных чисел. Доказать, что последовательность

$$n_0,\ n_0 + \frac{1}{n_1},\ n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2}},\ n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3}}},\ \ldots$$

имеет предел (который называют значением *бесконечной цепной дроби*).

**34.** Известно, что последовательность $x_0, x_1, \ldots$ сходится к 1 и все её члены отличны от 1. Найти предел последовательности $(x_n^5 - 1)/(x_n - 1)$.

**35.** (Продолжение) Тот же вопрос для последовательности $(\sqrt{x_n} - 1)/(x_n - 1)$.



**36.*** (Продолжение) Тот же вопрос для последовательности $(\sin x_n - \sin 1)/(x_n - 1)$.

**37.*** Последовательность неотрицательных чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такова, что $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ для любых $m, n \geqslant 0$. Доказать, что последовательность $a_n/n$ имеет предел.

**38.*** Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ имеет предел $a$. Доказать, что последовательность средних арифметических $y_i = (x_1 + \ldots + x_i)/i$ также имеет предел $a$. Верно ли обратное?

**39.*** Доказать, что последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$, $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$ и $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ сходятся. Как связаны их пределы?

**40.*** (Задача о беспризорниках и каше) По кругу написаны $n$ чисел. За один шаг каждое из чисел заменяют на среднее арифметическое двух его соседей, и так делают бесконечно много раз. Посмотрим на числа, стоящие в фиксированной точке круга в последовательные моменты времени. Можно ли утверждать, что эта последовательность сходится?

**41.*** (Продолжение) На гранях куба написаны числа. За один шаг каждое из чисел заменяют на среднее арифметическое его четырёх соседей. Можно ли утверждать, что для любой грани последовательность написанных на ней чисел имеет предел?

**42.*** Найти предел последовательности $(1^{10} + 2^{10} + \ldots + n^{10})/n^{11}$.

## Ряды

*Сумма* бесконечного ряда $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$ определяется как предел *частичных сумм* $s_n = x_1 + \ldots + x_n$. Если этот предел существует, ряд называют *сходящимся*; если нет — *расходящимся*.

**1.** При каких $x$ сходится ряд $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$? Какова его сумма?

**2.*** При каких $x$ сходится ряд $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$? Какова его сумма?

**3.*** При каких $x$ сходится ряд $1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + 4!x^4 + \ldots$? Какова его сумма?

**4.** Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n(n+1)) = 1/(1\cdot 2) + 1/(2\cdot 3) + \ldots$

**5.** Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2+8n+15)$.

**6.** Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n(n+1)(n+2))$.

**7.** Указать $N$, при котором сумма первых $N$ членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ отличается от его суммы не более чем на $1/1000$.

**8.** Ряд состоит из положительных членов, но не сходится. Доказать, что найдётся частичная сумма этого ряда, большая 10.

**9.** (а) Доказать, что ряд $1-1/2+1/3-1/4+1/5-1/6+\ldots$ сходится. (б) Сформулировать и доказать общее утверждение про сходимость знакопеременных рядов с убывающими по модулю членами.

**10.** Найти сумму ряда $1/1^5-1/2^5+1/3^5-\ldots$ с точностью до 1%.

**11.** Может ли сходящийся ряд стать расходящимся, если его члены сгруппировать (сложить) по два? Может ли расходящийся ряд стать при этом сходящимся?

**12.** Сходящийся ряд состоит из неотрицательных членов. Доказать, что при любой перестановке членов он останется сходящимся и сумма не изменится.

**13.** Доказать, что члены сходящегося ряда стремятся к нулю. Верно ли обратное?

**14.** Ряд $a_1+a_2+\ldots$ состоит из неотрицательных членов, причём $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$. Доказать, что он сходится или расходится одновременно с рядом $a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\ldots$

**15.** При каких $s>0$ ряд $1/1^s+1/2^s+1/3^s+\ldots$ сходится? (Его сумма обозначается обычно $\zeta(s)$ и называется *дзета-функцией Римана.*)

**16.** Сходится ли ряд $\sum(1/n\log n)$?

**17.** Сходится ли ряд $\sum(1/n\log^2 n)$?

**18.*** Сходится ли ряд $\sum(1/n\log n\log\log n)$?

**19.** Ряд $x_1+x_2+\ldots$ называют *абсолютно сходящимся*, если ряд из модулей $|x_1|+|x_2|+|x_3|+\ldots$ сходится. Доказать, что всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

**20.** (Продолжение) Привести пример сходящегося, но не абсолютно сходящегося ряда.



**21.*** Доказать, что при перестановке и группировке членов абсолютного сходящегося ряда он остаётся абсолютно сходящимся и сумма его не меняется.

**22.*** В произведении двух абсолютно сходящихся рядов

$$(a_1+a_2+\ldots)(b_1+b_2+\ldots)$$

раскрыли скобки (расположив попарные произведения в каком-то порядке). Доказать, что получится абсолютно сходящийся ряд и его сумма будет равна произведению сумм исходных рядов.

**23.*** Доказать, что если ряд сходится, но не абсолютно, то перестановкой его членов можно получить ряд с любой заданной наперёд суммой.

**24.** Доказать, что ряд $1+x+x^2/2!+x^3/3!+\ldots$ абсолютно сходится при любом $x$.

**25.*** (Продолжение) Обозначим сумму этого ряда через $\exp(x)$. Доказать, что $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$ при всех $x$ и $y$.

**26.*** Доказать, что $\exp(1)=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$. (Это число называется *основанием натуральных логарифмов* и обозначается $e$.)

**27.*** Доказать, что $\exp(x)=e^x$ (а) для положительных целых $x$; (б) для любых целых $x$; (в) для любых рациональных $x$.

**28.*** Доказать, что функция exp монотонна, т. е. $\exp(x) < \exp(y)$ при $x<y$ (числа $x$ и $y$ могут быть и отрицательными).

**29.*** (а) Определить сумму ряда из комплексных чисел. Какие ряды естественно назвать абсолютно сходящимися? Доказать, что они сходятся. (б) Определить $\exp(z)$ для комплексного $z$ и доказать, что $\exp(z)$ при чисто мнимом $z$ лежит на единичной окружности.

**30.*** Из ряда $\sum 1/n$ выбросили все члены, в которых в десятичной записи знаменателя есть цифра 7. Сходится ли полученный ряд?

**31.*** Известно, что ряды $\sum a_n^2$ и $\sum b_n^2$ сходятся. Следует ли отсюда, что ряд $\sum a_n b_n$ сходится?

**32.**$^\star$ (а) Известно, что ряд $\sum a_n$ сходится. Следует ли отсюда, что ряд $\sum a_n^2$ сходится? (б) Известно, что ряд $\sum a_n^2$ сходится. Следует ли отсюда, что ряд $\sum a_n$ сходится? (**в**) Известно, что ряд $\sum a_n^2$ сходится. Следует ли отсюда, что ряд $\sum a_n^4$ сходится? (г) Известно, что ряд $\sum a_n$ сходится. Следует ли отсюда, что ряд $\sum a_n^3$ сходится?

**33.**$^\star$ Ряд $\sum a_n$ состоит из положительных членов и расходится. Доказать, что ряд $\sum b_n$, где $b_n = a_n/(a_1+\ldots+a_n)$, также расходится.

**34.**$^\star$ (а) Доказать, что ряд $\sum(\sin nx)/n$ сходится при любом $x$. (б) При каких комплексных $z$ сходится ряд $\sum z^n/n$? (Как связаны эти вопросы?)

## Непрерывные функции

Функция непрерывна в точке $a$, если в близких к $a$ точках она принимает близкие к $f(a)$ значения. Формально говоря, функция $f\colon M \to \mathbb{R}$, определённая на некотором множестве $M \subset \mathbb{R}$, *непрерывна в точке* $a \in M$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ с таким свойством: во всякой точке $x \in M$, отстоящей от $a$ менее чем на $\delta$, значение $f(x)$ отличается от $f(a)$ менее чем на $\varepsilon$:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in M)[(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon].$$

**1.** Доказать непрерывность и указать способ отыскивать $\delta$ по $\varepsilon$, если: (**а**) $f(x) = 1$ и $a = 2$; (**б**) $f(x) = x$ и $a = 2$; (**в**) $f(x) = x^2$ и $a = 2$; (**г**) $f(x) = 1/x$ и $a = 2$; (**д**) $f(x) = \sqrt{x}$ и $a = 2$; (**е**) $f(x) = \sqrt{x}$ и $a = 0$; (**ж**) $f(x) = \sin x$ и $a = 1$.

**2.** Закончить фразу, не употребляя слова «не»: «функция $f$ *разрывна* (не является непрерывной) в точке $a$, если ...»

**3.**$^\star$ Пусть функция $f$ определена на множестве целых чисел: $M = \mathbb{Z}$. В каких случаях она будет непрерывной согласно приведённому определению?

**4.** Доказать, что следующее определение непрерывности эквивалентно исходному: функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a$, если для всякой последовательности $x_0, x_1, \ldots$ точек $M$, сходящейся к $a$, последовательность $f(x_0), f(x_1), \ldots$ сходится к $f(a)$.



**5.** (а) В каких точках непрерывна *функция Дирихле*, равная 1 в иррациональных точках и 0 в рациональных? (б) Тот же вопрос для *функции Римана*, которая равна 0 в иррациональных точках и равна $1/q$ в рациональной точке $p/q$ (если дробь $p/q$ несократима).

**6.** Привести пример функции, определённой на всей прямой и (а) разрывной в целых точках и непрерывной в остальных; (б) непрерывной в целых точках и разрывной в остальных.

**7.**$^\star$ Доказать, что для любого счётного множества действительных чисел можно построить возрастающую функцию, разрывную во всех точках этого множества и непрерывную во всех остальных.

**8.**$^\star$ Может ли определённая на всех прямой возрастающая функция быть разрывной во всех точках?

**9.**$^\star$ Может ли функция быть непрерывной во всех рациональных точках и разрывной во всех иррациональных?

**10.** Две функции $f$ и $g$ определены на множестве $M$ и непрерывны в точке $a \in M$. Доказать, что их сумма, разность, произведение и частное (если знаменатель отличен от нуля в точке $a$) также непрерывны в этой точке.

**11.** Функция $f$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$, принимает значения в множестве $Y \subset \mathbb{R}$ и непрерывна в точке $a \in X$. Функция $g$ определена на множестве $Y$ и непрерывна в точке $b = f(a)$. Доказать, что *композиция* $g \circ f$, то есть функция $x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x))$, непрерывна в точке $a$.

**12.** Будет ли функция $\sqrt{\sin x - (2+\operatorname{tg} x)/((2-\operatorname{tg} x)^2)}$ непрерывной во всех точках своей области определения?

**13.** Функция $f$ определена и непрерывна на отрезке. Доказать, что $f$ ограничена на этом отрезке. Почему аналогичное рассуждение нельзя провести для интервала?

**14.** (Продолжение) Функция $f$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Доказать, что она достигает максимума: найдётся такая точка $m \in [a,b]$, что $f(x) \leqslant f(m)$ для всех $x \in [a,b]$.

**15.**$^\star$ Утверждение задачи 14 можно получить как следствие задачи 13, рассмотрев функцию $1/(f-\sup f)$. Провести это рассуждение подробно.

**16.*** Назовём функцию $f$ ограниченной в окрестности точки $a$, если найдётся интервал, содержащий $a$, на котором $f$ ограничена. (а) Привести пример функции, определённой на всей прямой и не ограниченной ни на каком интервале. (б) Доказать, что всякая определённая на отрезке локально ограниченная (ограниченная в окрестности любой точки отрезка) функция ограничена на всём отрезке.

**17.** Функция $f$ непрерывна на отрезке и принимает в его концах значения разных знаков. Доказать, что она имеет корень на этом отрезке.

**18.** Доказать, что существует корень любой целой положительной степени из любого положительного числа.

**19.** Доказать, что всякий многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами имеет действительный корень.

**20.*** Доказать, что квадратный трёхчлен $ax^2+bx+c$, для которого $a+b+c>0$ и $a-b+c<0$, имеет (действительный) корень.

**21.** Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

**22.** Доказать, что всякая строго возрастающая непрерывная функция, определённая на отрезке, является взаимно однозначным соответствием между двумя отрезками и обратная функция также непрерывна.

**23.*** Доказать, что любое монотонное взаимно однозначное соответствие между двумя отрезками непрерывно (в обе стороны).

**24.*** (а) Дать определение непрерывности для функций, определённых на плоскости. (б) Доказать, что любой многочлен на комплексной плоскости непрерывен. (в) Доказать, что для любого многочлена найдётся точка на комплексной плоскости, где его абсолютная величина минимальна. (г) Доказать, что в этой точке многочлен неизбежно равен нулю (основная теорема алгебры).

**25.** Как надо доопределить функцию $\sin x/x$ при $x=0$, чтобы она стала непрерывной всюду?



**26.*** Функция $f$ называется *равномерно непрерывной* на множестве $M$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что образы любых двух точек $M$, отстоящих менее чем на $\delta$, отстоят менее чем на $\varepsilon$. (а) Записать это определение символически. (б) Очевидно, равномерно непрерывная на множестве $M$ функция непрерывна во всех точках множества $M$. Показать, что обратное утверждение неверно. (в) Будет ли функция $x\mapsto x^2$ равномерно непрерывной? (г) Тот же вопрос для функции $x\mapsto\sqrt{x}$ (определённой на множестве неотрицательных чисел). (д) Тот же вопрос для функции $x\mapsto\sin(x^2)$. (е) Показать, что всякая непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна.

**27.** Доказать, что если две непрерывные функции определены на всей прямой и совпадают во всех рациональных точках, то они совпадают всюду.

**28.*** Функция $f$ определена и непрерывна на всей прямой, при этом $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Доказать, что эта функция есть умножение на константу.

**29.** *Показательная функция* $x\mapsto a^x$ (при любом $a>0$) обладает такими свойствами: $a^0=1$, $a^1=a$, $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$. Кроме того, при $a>1$ она монотонно возрастает, при $a=1$ постоянна, а при $a<1$ убывает. Считая эти свойства известными, доказать, что показательная функция непрерывна (а) в точке $0$; (б) во всех точках прямой.

**30.*** (Продолжение) (а) Доказать, что указанные в предыдущей задаче свойства определяют показательную функцию однозначно. (б) Пользуясь лишь этими свойствами, доказать, что $6^x=2^x3^x$ при всех $x$.

**31.*** Дать определение непрерывной на окружности функции. Доказать, что для любой непрерывной на окружности функции найдутся две диаметрально противоположные точки, в которых она принимает равные значения.

**32.** Доказать, что любой многоугольник можно разделить вертикальной прямой на две равновеликие (равные по площади) части.

**33.*** На плоскости нарисовано два многоугольника (возможно, пересекающихся). Доказать, что найдётся прямая, которая делит каждый из них на две равновеликие части.

**34**.* Дать определение непрерывности для функции, определённой на подмножестве плоскости. Доказать, что всякая непрерывная на квадрате функция ограничена и достигает максимума.

**35**.* Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Доказать, что уравнение $f(f(x)) = x$ имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение $f(x) = x$ имеет решение.

**36**.* Определённая на отрезке функция называется *выпуклой вниз*, если хорда, соединяющая любые две точки графика, лежит выше графика. Доказать, что всякая выпуклая вниз функция непрерывна.

**37**.* Доказать, что если непрерывная на отрезке функция удовлетворяет неравенству $f((x+y)/2) \leqslant (f(x)+f(y))/2$, то она выпукла вниз.

## Пределы функций

Пусть функция $f$ определена на множестве $M \subset \mathbb{R}$ и принимает действительные значения. Пусть $a$ — действительное число (принадлежащее $M$ или нет). Говорят, что $f(x)$ *имеет предел* $A$ *при* $x$, *стремящемся к* $a$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся окрестность точки $a$, во всех точках которой (кроме, быть может, самой точки $a$) значения функции отличаются от $A$ меньше чем на $\varepsilon$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)[(x \neq a \text{ и } |x-a| < \delta) \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon].$$

Запись: $A = \lim_{x \to a} f(x)$.

**1**. Закончить предложение: функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in M$ тогда и только тогда, когда предел ...

**2**.* Напротив, можно формально определить предел через непрерывность: функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ имеет предел $A$ в точке $a$, если она становится непрерывной в точке ... (закончить определение).

**3**. Говорят, что точка $a$ является *предельной точкой* множества $M$, если сколь угодно близко к $a$ имеются точки множества $M$, отличные от $a$. Доказать, что в этом случае предел $\lim_{x \to a} f(x)$ определён однозначно (если существует): два разных числа не могут быть пределами одновременно.



**4**. Закончить предложение (и доказать): функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ имеет предел $A$ в точке $a$, если и только если для любой последовательности точек $M$, сходящейся к $a, \ldots$

**5**. Сформулировать и доказать утверждения о пределе суммы, разности, произведения и частного.

**6**.* Известно, что $\lim_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim_{y \to b} g(y) = c$. Почему формально нельзя утверждать, что в этом случае $\lim_{x \to a} g(f(x)) = c$? (Считаем, что $f$ и $g$ — функции, определённые на всех действительных аргументах.)

**7**. Найти предел $(\sin x)/x$ при $x \to 0$.

**8**. ... $(\sin x)/x$ при $x \to 2$.

**9**.* ... $(1-\cos x)/x^2$ при $x \to 0$.

**10**.* ... $(\sin x - \operatorname{tg} x)/x^3$ при $x \to 0$.

**11**.* ... $(\arcsin x)/x$ при $x \to 0$.

**12**. ... $(x^{10} - a^{10})/(x-a)$ при $x \to a$.

**13**. ... $((2+3x)^{10} - 2^{10})/x$ при $x \to 0$.

**14**. ... $(\sqrt{x} - \sqrt{a})/(x-a)$ при $x \to a$.

**15**. ... $(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a})/(x-a)$ при $x \to a$.

**16**.* ... $(\sin x - \sin a)/(x-a)$ при $x \to a$.

**17**.* ... $\sin 3x/\sin 5x$ при $x \to 0$.

**18**. Дать определение предела функции $f$ «при $x$, стремящемся к $a$ справа». (Иногда это обозначают $x \to a+0$; аналогично $x \to a-0$ обозначает, что $x$ стремится к $a$ слева.) Доказать, что монотонная (невозрастающая или неубывающая) функция всегда имеет пределы справа и слева. В каком случае эти пределы совпадают?

**19**.* Доказать, что монотонная функция, определённая на всей прямой, непрерывна везде, за исключением не более чем счётного числа точек.

**20**. Дать определение предела $f(x)$ при $x \to +\infty$. Найти предел $\lim_{x \to +\infty} x^{100}/2^x$.

**21**.* Доказать, что $\lim_{x \to +\infty}(1+1/x)^x$ существует и равен числу $e$ (пределу последовательности $(1+1/n)^n$).

**22**. Найти предел $\sqrt{x^2+x} - x$ при $x \to +\infty$.

**23**. Найти предел $\sin x/x$ при $x \to +\infty$.

**24.*** Найти предел $(\log_2 x)/x$ при $x \to +\infty$.
**25.*** Найти предел $(1 + x/3)^{1/x}$ при $x \to 0$.
**26.*** Найти предел $x \log_2 x$ при $x \to 0$.
**27.*** Найти предел $\sqrt[x]{2}$ при $x \to +\infty$.
**28.*** Найти предел $\sqrt[x]{x}$ при $x \to +\infty$.
**29.*** Найти предел $(\cos x)^{1/x^2}$ при $x \to 0$.
**30.*** Функция $f$ определена и непрерывна на всей прямой. Можно ли утверждать, что $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, если известно, что последовательность $f(x), f(x+1), f(x+2), \ldots$ сходится к $0$ для любого $x$ ?
**31.*** Тот же вопрос, если для любого $x > 0$ последовательность $f(x), f(2x), f(3x), \ldots$ сходится к $0$.

## Асимптотические обозначения

Пусть $f$ и $g$ — две функции, определённые в окрестности точки $a$. Говорят, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$, если найдётся такое число $c$, что $|f(x)| \leqslant c|g(x)|$ при всех $x$, достаточно близких к $a$. (Читается: «эф от икс есть о большое от же от икс».) Говорят, что $f(x) = o(g(x))$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся окрестность точки $a$, в которой $|f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$. (Читается: «эф от икс есть о малое от же от икс».)

**1.** Записать эти определения формально: $f(x)=O(g(x)) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \exists c(\exists \delta > 0)\ldots$; $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \ldots$

Смысл этих определений: $f(x)=O(g(x))$ значит, что вблизи $a$ значение $f(x)$ не сильно больше $g(x)$ (превосходит $g(x)$ не более чем в ограниченное число раз); $f(x) = o(g(x))$ означает, что вблизи $a$ значение $f(x)$ бесконечно мало по сравнению с $g(x)$.

Используя эти обозначения, можно сказать, что функция $f$ непрерывна в точке $a$, если $f(x) = f(a) + o(1)$ при $x \to a$.

**2.** Какие из следующих утверждений верны: **(а)** $\sin x = O(x)$ при $x \to 0$; **(б)** $\sin x = o(x)$ при $x \to 0$; **(в)** $\cos x = O(x)$ при $x \to 0$; **(г)** $\cos x = O(1)$ при $x \to 0$; **(д)** $\cos x = 1+o(x)$ при $x \to 0$; **(е)** $\sin x = O(x)$ при $x \to 1$; **(ж)** $\sin x = o(x)$ при $x \to 1$; **(з)** $\sin x = o(x)$ при $x \to +\infty$; **(и)** $x^2 = O(2^x)$ при $x \to +\infty$. **(к)** $1/x = O(\sin x)$ при $x \to +\infty$.



**3.*** Гражданин пошёл в сберкассу платить за квартиру, но вместо этого положил деньги на счёт с 5% годовых. Можно ли утверждать, что его долг (включая пеню в 1% исходной суммы за каждый день просрочки) будет о-малым от суммы на счёте при стремлении времени к бесконечности?

**4.*** Можно ли утверждать, что $f(x) = o(h(x))$ при $x \to a$, если **(а)** $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = o(h(x))$ при $x \to a$; **(б)** $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$ при $x \to a$; **(в)** $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$ при $x \to a$; **(г)** $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = o(h(x))$ при $x \to a$?

**5.** Известно, что $f(x) = O(x^4)$ и $g(x) = o(x^3)$ при $x \to 0$. Что можно сказать про $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ и $f(g(x))$?

**6.*** Известно, что $f(x) = O(x^4)$ и $g(x) = O(1)$ при $x \to 0$. Что можно сказать про $f(g(x))$ и $g(f(x))$?

**7.** Доказать, что $1/(1 + x) = 1 - x + O(x^2)$ при $x \to 0$.
**8.** $\ldots 1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + O(x^4)$ при $x \to 0$.
**9.** $\ldots \sqrt{1 + x} = 1 + x/2 + O(x^2)$.
**10.** Найти аналогичную формулу для $\sqrt{9 + x}$.
**11.** Найти разложение функции $f(x) = 1/(1-2x+x^2)$ по степеням $x$ при $x \to 0$ вплоть до членов четвёртого порядка, то есть найти значения коэффициентов $a, b, c, d, e$, для которых

$$\frac{1}{1 - 2x + x^2} = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + o(x^4)$$

при $x \to 0$.

**12.** Доказать, что разложение по степеням $x$ однозначно: если

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + o(x^k) = \\ = b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k + o(x^k)$$

при $x \to 0$, то $a_i = b_i$ при всех $i = 0, \ldots, k$

**13.** Доказать, что $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1/(2\sqrt{x}) + o(1/x)$ при $x \to +\infty$.
**14.** $\ldots \sin x = x + o(x)$ при $x \to 0$.

**15.** . . . $\sin x - \operatorname{tg} x = O(x^3)$ при $x \to 0$.

**16.** . . . $\sin x = x + O(x^3)$ при $x \to 0$.

**17.** . . . $\cos x = 1 - x^2/2 + O(x^4)$ при $x \to 0$.

**18.** . . . $\operatorname{ctg} x = 1/x + o(1)$ при $x \to 0$

**19.** Показать, что максимальное отклонение дуги длиной $x$ единичной окружности от стягивающей её хорды есть $O(x^2)$ при $x \to 0$.

**20.*** Предполагая, что формула $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + ax^2 + O(x^3)$ (при $x \to 0$) верна для некоторой константы $a$, найти значение $a$.

**21.*** (Продолжение) Доказать, что при этом $a$ формула действительно верна.

**22.*** Указать $a$ и $b$, при которых формула $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + ax^2 + bx^3 + O(x^4)$ верна (при $x \to 0$).

**23.*** Разложить $\sin x$ в окрестности точки $\pi/3$ по степеням $(x - \pi/3)$ вплоть до четвёртой (другими словами, разложить $\sin(\pi/3 + x)$ по степеням $x$ с точностью до $o(x^4)$).

**24.*** Указать $a$, при котором $\sqrt[3]{1+x} = 1 + ax + O(x^2)$.

Во многих задачах полезны разложения (при $x \to 0$)

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots \quad \text{и} \quad \cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots$$

(которые можно оборвать в любом месте); как мы увидим дальше, их легко получить по формуле Тейлора или из ряда $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

**25.*** Найти разложение вплоть до $x^4$ для $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$.

**26.*** (Продолжение) для $\sin(\sin x)$ вплоть до $x^4$.

**27.*** (Продолжение) для $\arcsin x$ вплоть до $x^4$. (Можно предполагать, что такое разложение существует — это будет следовать из общих теорем.)

**28.*** Разложить по степеням $x$ (с точностью $o(x^2)$) (а) расстояние от точки $(0,2)$ до точки $(0,x)$; (б) расстояние от точки $(-1,1)$ до точки $(0,x)$; (в) длину ломаной $(-1,1)-(0,x)-(2,2)$; (г) длину ломаной $(-1,1)-(0,x)-(1,2)$. Как объяснить, почему в одних случаях коэффициент при $x$ равен нулю, а в других — нет?



**29.*** Треугольник имеет стороны $a, b, c$. Одну из сторон удлинили на $x$; пусть $S(x)$ — площадь получившегося треугольника со сторонами $a, b, c + x$. Разложить $S(x)$ по степеням $x$ с точностью $o(x)$. В каком случае коэффициент при $x$ равен 0?

**30.*** Пусть $X$ — некоторая фигура на плоскости. Рассмотрим $\varepsilon$-окрестность $X$ (состоящую из тех точек, которые отстоят не более чем на $\varepsilon$ от некоторой точки множества $X$). Разложить площадь этой окрестности по степеням $\varepsilon$ для различных фигур, в том числе круга, отрезка, окружности, квадрата, круга с круглой дыркой, круга с двумя круглыми дырками, участка гладкой кривой и др. В каких случаях получающиеся формулы точны при малых $\varepsilon$?

**31.*** Показать, что для некоторых $a$ и $b$ верна формула $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/n^2 = a + b/n + O(1/n^2)$ и найти $b$. (Найти $a$ гораздо сложнее — как мы увидим, оно равно $\pi^2/6$.)

**32.*** Последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ определена соотношением $x_{n+1} = \sin x_n$; при этом $x_0 = 1$. Показать, что $x_n = O(1/\sqrt{n})$.

**33.*** Уравнение $\operatorname{tg} x = x$ имеет бесконечно много решений; перенумеруем неотрицательные его решения в порядке возрастания: $x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots$ Тогда можно написать формулу $x_n = n\pi + a + b/n + c/n^2 + d/n^3 + o(1/n^3)$. Найти $a, b, c, d$.

**34.*** (а) при анализе алгоритма выяснилось, что время его работы $T(n)$ на входах длины $n$ (определённое для целых положительных $n$) удовлетворяет соотношению $T(n) = T([n/2]) + T([n/3]) + O(n)$ (квадратные скобки обозначают целую часть). Показать, что $T(n) = O(n)$. (б) Что можно сказать о $T(n)$, если $T(n) = 2T([n/2]) + O(n)$?

**35.*** В окрестности точки $(1,1)$ кривая $x^5 + x + y^5 + y = 4$ совпадает с графиком некоторой функции $y = f(x)$; при этом $f(1+h) = 1 + ah + bh^2 + o(h)$ для некоторых $a$ и $b$. Считая это известным, найти $a$ и $b$.

**36.*** При каком $n$ предел $(\sin \operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg} \sin(x))/x^n$ при $x \to 0$ существует и отличен от 0?

**37.*** Найти предел

$$\frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \arcsin x}$$

при $x \to 0$.

## Пределы с экспонентой

При любом $a > 0$ функция $x \mapsto a^x$ определена и непрерывна при всех $x$; при этом $a^{x+y} = a^x a^y$ и $a^0 = 1$. При $a > 1$ эта функция возрастает, при $a < 1$ — убывает (при $a = 1$ она постоянна).

Число $e$ определяется как предел последовательности $(1 + 1/n)^n$; значение $e^x$ обозначается также $\exp x$. Обратная к $x \mapsto a^x$ функция обозначается $\log_a x$ (*логарифм по основанию* $a$); она определена (и непрерывна) при $a > 0$ и $a \neq 1$. Логарифм по основанию $e$ называется *натуральным* и обозначается $\ln$.

**1.*** Показательную функцию $x \mapsto a^x$ можно построить так: сначала определить её для целых $x$, затем для рациональных ($a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$), а затем (по непрерывности или по монотонности) для всех действительных $x$. Провести это построение подробно и доказать для построенной функции указанные в начале листка свойства.

**2.** Доказать, что предел $(1 + 1/x)^x$ при $x \to +\infty$ равен $e$.

**3.** Найти предел $(1 + x)^{1/x}$ при $x \to 0$.

**4.** Найти предел $(1 + 2x)^{1/x}$ при $x \to 0$.

**5.** Найти предел $(1 - x)^{1/x}$ при $x \to 0$.

**6.** Найти предел $(1 + x^2)^{1/x}$ при $x \to 0$.

**7.** Найти предел $(1 + x)^{1/x^2}$ при $x \to 0$.

**8.*** Найти предел $(1 + \sin x)^{1/x}$ при $x \to 0$.

**9.*** Найти предел $(\cos x)^{1/x^2}$ при $x \to 0$.

**10.** Доказать, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

(другими словами, $\ln(1 + x) = x + o(x)$ при $x \to 0$).



**11.** Доказать, что

$$\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

(другими словами, $e^y = 1 + y + o(y)$ при $y \to 0$).

**12.*** Предполагая, что $e^x = 1 + x + ax^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$, найти $a$. (Указание: $e^{2x} = e^x e^x$.)

**13.*** Доказать, что при $x \to 0$

$$\exp x = 1 + x + x^2/2 + \ldots + x^n/n! + O(x^{n+1})$$

($\exp x$ определяется как сумма ряда $1 + x + x^2/2 + \ldots + x^n/n! + \ldots$).

**14.*** (Продолжение) Считая, что $\ln(1 + x) = ax + bx^2 + o(x^2)$, найти $a$ и $b$.

**15.** Найти предел $(2^x - 1)/x$ при $x \to 0$.

**16.** Найти предел $\log_2(1 + x)/x$ при $x \to 0$.

**17.** Найти предел $(\exp(a + h) - \exp(a))/h$ при $h \to 0$ (и постоянном $a$).

**18.** Найти предел $(\ln(a + h) - \ln(a))/h$ при $h \to 0$ (и постоянном $a$).

**19.** Доказать, что если $a_n \to a$, $b_n \to b$ и $a > 0$, то $a_n^{b_n} \to a^b$. (Указание: логарифм и экспонента непрерывны.)

**20.** Найти предел $a^x/x^n$ при $x \to +\infty$ (где $a > 1$, $n > 0$).

**21.** Найти предел $x \ln x$ при $x \to 0$.

**22.*** Доказать, что для некоторого $\gamma$ имеет место равенство

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1).$$

**23.*** (Продолжение) Доказать, что

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{a}{n} + O(1/n^2)$$

для подходящего $a$ и найти это $a$.

**24.*** Найти предел при $n \to \infty$ суммы

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

**25.*** Найти сумму ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

**26.*** Доказать, что $\ln(n!) = n \ln n + o(n \ln n)$.

**27.*** Доказать более точную оценку: $\ln(n!) = n \ln n + O(n)$.

**28.*** Доказать ещё более точную оценку: $\ln(n!) = n \ln n - n + O(\ln n)$.

**29.*** Доказать ещё более точную оценку: $\ln(n!) = n \ln n - n + (1/2) \ln n + c + o(1)$. Другими словами,

$$n! = (n/e)^n \sqrt{Cn}(1 + o(1)).$$

Можно доказать, что $C = 2\pi$ (формула Стирлинга), а идя дальше, разложить $o(1)$ по степеням $1/n$.

**30.*** Числа $a_1, a_2, \ldots$ положительны и меньше 1. Доказать, что следующие три свойства равносильны: (1) ряд $a_1 + a_2 + \ldots$ расходится; (2) произведение $(1+a_1) \cdot (1+a_2) \cdot \ldots \times (1 + a_n)$ стремится к бесконечности при $n \to \infty$; (3) произведение $(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n)$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

**31.*** (Продолжение) Вывести отсюда, что гармонический ряд $\sum (1/i)$ расходится.

**32.*** (Продолжение) Доказать, что ряд $1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + \ldots$ (обратные к простым числам) расходится.

## Производная

*Производной* функции $f$ в точке $a$ называется предел отношения $(f(x) - f(a))/(x - a)$ при $x \to a$. Если он существует, функция называется *дифференцируемой* в точке $a$. Производная функции $f$ в точке $a$ обозначается $f'(a)$.

**1.** Найти производные (в произвольной точке $a$) функций: (**а**) $x \mapsto 2x$; (**б**) $x \mapsto x^2$; (**в**) $x \mapsto 1/x$; (**г**) $x \mapsto \sqrt{x}$; (**д**) $x \mapsto x^n$ для целых положительных $n$; (**е**) $x \mapsto x^n$ для любых целых $n$; (**ж**) $x \mapsto \sin x$; (**з**) $x \mapsto \cos x$; (**и**) $x \mapsto e^x$; (**к**) $x \mapsto \ln x$.

**2.** Доказать, что функция $f$ имеет производную $A$ в точке $a$ тогда и только тогда, когда $f(a + h) = f(a) + Ah + o(h)$ при $h \to 0$.



**3.** Доказать, что всякая дифференцируемая в точке $a$ функция непрерывна в $a$, но обратное неверно.

*Замечание.* Определению $f'(a)$ можно придать смысл, если точка $a$ принадлежит области определения функции $f$ и является для неё предельной точкой. Однако обычно предполагают, что $f$ определена в некоторой окрестности точки $a$ (на интервале, содержащем $a$).

**4.** Доказать правила дифференцирования суммы функций и произведения функций: (**а**) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$; (**б**) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. (Удобно использовать задачу 2.)

**5.** (Производная сложной функции) Пусть функция $f$ определена в окрестности точки $a$ и дифференцируема в $a$; пусть функция $g$ определена в окрестности точки $b = f(a)$ и дифференцируема в $b$. Тогда функция $h(x) = g(f(x))$ определена в окрестности точки $a$, дифференцируема в точке $a$ и $h'(a) = g'(f(a))f'(a)$. (Указание: использовать задачу 2.)

**6.** (**а**) Функция $f$ определена в окрестности точки $a$ и дифференцируема в точке $a$, причём $f(a) \neq 0$. Найти производную функции $x \mapsto 1/f(x)$. (Можно воспользоваться предыдущей задачей.) (**б**) Найти производную частного $x \mapsto g(x)/f(x)$ в точке $a$, если функции $f$ и $g$ определены в окрестности $a$ и дифференцируемы в $a$, причём $f(a) \neq 0$.

**7.** Найти производные функций: (**а**) $x \mapsto (x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$; (**б**) $x \mapsto \sin 2x = 2 \sin x \cos x$ (двумя способами); (**в**) $x \mapsto \operatorname{tg} x$; (**г**) $x \mapsto \sin(\sin x)$); (**д**) $x \mapsto a^x$ (для любого $a > 0$); (**е**) $x \mapsto \log_a x$ (для любого $a > 0$, кроме 1); (**ж**) $x \mapsto \exp(2 \ln x)$; (**з**) $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha$ — произвольное число; функция рассматривается при $x > 0$); (**и**) $x \mapsto x^x$ $(x > 0)$.

**8.** Функция $f$ определена, непрерывна и строго монотонна на некотором интервале. Доказать, что если она дифференцируема в точке $a$ этого интервала и $f'(a) \neq 0$, то обратная функция $g$ дифференцируема в точке $f(a)$, и найти $g'(f(a))$.

**9.*** (Продолжение) Что можно сказать о $g'(f(a))$, если $f'(a) = 0$?

**10.** Найти производные функций (**а**) $x \mapsto \arcsin x$; (**б**) $x \mapsto \arccos x$; (**в**) $x \mapsto \operatorname{arctg} x$.

**11.*** Найти производную функции $x \mapsto \arcsin(\cos x)$.

**12.** *Второй производной* функции $f$ называется производная её производной, то есть производная функции $f'\colon x \mapsto f'(x)$. Написать формулу для второй производной произведения $h(x) = f(x)g(x)$, то есть выразить $h''(a)$ через значения функций $f$ и $g$ и их производных в точке $a$.

**13.*** (Продолжение) Написать аналогичную формулу для $h^{(5)}(a)$ (пятой производной).

**14.*** Найти вторую производную функции $h(x) = f(g(x))$ (считая известными значения функций $f$ и $g$ и их производных).

**15.*** Найти вторую производную обратной функции, считая известными значения самой функции, а также её первой и второй производной.

**16.*** Указать какую-либо функцию $f$, не равную нулю тождественно, для которой (**а**) $f'(x) = (x+3)^2$; (**б**) $f'(x) = (5x+3)^2$; (**в**) $f'(x) = f(x)$; (**г**) $f'(x) = -f(x)$; (**д**) $f''(x) = -f(x)$.

**17.** Что получится, если $n$ раз продифференцировать («дифференцировать» означает «брать производную») многочлен степени $n$?

**18.** Доказать, что для многочлена $P$ степени $n$ справедлива *формула Тейлора*:

$$P(a+h) = P(a) + P'(a)h + \frac{P''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

(Указание: $P(a+h)$ при фиксированном $a$ есть многочлен от $h$.)

**19.** Объяснить смысл описания производной как «мгновенной скорости изменения функции», как «отношения бесконечно малого приращения функции к приращению аргумента» и как «тангенса угла наклона касательной» (которая в свою очередь описывается как «предельное положение секущей»).

**20.** Найти уравнение касательной к эллипсу $x^2 + 2y^2 = 3$ в точке $(1, 1)$.

**21.*** (Продолжение) Две перпендикулярные касательные к этому эллипсу пересекаются в точке $X$. Доказать, что расстояние от $X$ до начала координат не зависит от выбора касательных (и равно $3/\sqrt{2}$).



**22.*** (**а**) Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для касательных к параболе, проведённых из одной точки. (**б**) Квадрат касательной к окружности равен произведению отрезков секущих. Сформулировать аналогичное утверждение для параболы.

**23.*** Две параболы $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$ и имеют общую касательную, касающуюся парабол в точках $C$ и $D$. Доказать, что прямая $AB$ делит отрезок $CD$ пополам.

**24.*** Для площади круга радиуса $r$ есть формула $S(r) = \pi r^2$; производная $S'(r) = 2\pi r$ даёт формулу для длины окружности. Для объёма шара радиуса $r$ есть формула $V(r) = (4/3)\pi r^3$; производная $V'(r) = 4\pi r^2$ даёт формулу для площади сферы. Объяснить наблюдаемое явление.

## Теоремы о производной

**1.** Пешеход шёл 8 минут с переменной скоростью и прошёл более 800 м. Можно ли утверждать, что найдется промежуток длиной в минуту, за который пешеход прошёл более 100 м?

**2.*** (Продолжение) Можно ли утверждать, что найдётся промежуток в три минуты, за который пешеход прошёл более 300 м?

**3.** (Теорема о конечном приращении) Функция $f$ дифференцируема во всех точках интервала $I$, и её производная не превосходит (по модулю) некоторого числа $c$. Доказать, что для любых точек $x$ и $y$ этого интервала выполнено неравенство

$$|f(y) - f(x)| \leqslant c|y - x|$$

(«если мгновенная скорость не превосходит $c$, то и средняя скорость не превосходит $c$»).

**4.** Доказать, что если две функции определены на интервале и имеют одну и ту же производную ($f'(x) = g'(x)$ для любой точки $x$ этого интервала), то они отличаются на константу: $f(x) = g(x) + C$ для некоторого числа $C$ и для всех $x$.

**5.** Функция $f$ определена на всей прямой, причём $|f(y) - f(x)| \leqslant (y-x)^2$ при всех $x, y$. Что можно сказать про эту функцию?

**6.*** Функция $f$ определена и дифференцируема на всей прямой, при этом $f'(x) = f(x)$ при всех $x$. Доказать, что $f(x) = ce^x$ при некотором $c$ и при всех $x$.

Точка $a$ называется точкой *локального максимума* функции $f$, если найдётся некоторая окрестность точки $x$, в которой функция $f$ определена и все её значения не превосходят $f(a)$. Если все они (кроме значения в точке $a$) строго меньше $f(a)$, то говорят о *строгом локальном максимуме*.

**7.** Доказать, что у любой функции не более чем счётное число точек строгого локального максимума.

**8.*** (Продолжение) Для точек локального максимума (не обязательно строгого) этого сказать нельзя: у постоянной функции всякая точка будет точкой локального максимума. Доказать, что множество *значений* любой функции во всех её точках локального максимума не более чем счётно.

**9.** (Принцип Ферма) Доказать, что если функция дифференцируема в точке локального максимума, то её производная в этой точке равна нулю.

**10.** (Теорема Ролля) Функция $f$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех точках интервала $(a, b)$, причём $f(a) = f(b)$. Доказать, что найдётся точка $c \in (a, b)$, для которой $f'(c) = 0$.

**11.** (Теорема Лагранжа) Функция $f$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех точках интервала $(a, b)$, причём $f(a) = f(b)$. Доказать, что найдётся точка $c \in (a, b)$, для которой $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b-a)$. (Существует точка, в которой мгновенная скорость равна средней, а касательная параллельна секущей.)

**12.*** Верен ли аналог теоремы Лагранжа для движения по плоскости? Тот же вопрос для теоремы о конечном приращении.

**13.** Вывести теорему о конечном приращении из теоремы Лагранжа.



**14.** Функция $f$ определена и дифференцируема на интервале $I$. Доказать, что $f$ является неубывающей (т. е. $f(x) \leqslant f(y)$ при $x \leqslant y$) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in I$.

**15.** (Продолжение) Верно ли аналогичное утверждение про (строго) возрастающие функции и функции с всюду положительной производной?

**16.** Известно, что функции $f$ и $g$ определены и непрерывны на отрезке $[0, 1]$ и дифференцируемы внутри него, причём $f'(x) \leqslant g'(x)$ для всех $x \in [0, 1]$ и $f(0) = g(0)$. Доказать, что $f(1) \leqslant g(1)$.

**17.*** Функция $f$ определена и дифференцируема на всей прямой, при этом $|f'(x)| \leqslant |x|$ и $f(0) = 1$. Какие значения может принимать $f(10)$?

**18.*** Функция $f$ определена и дифференцируема на всей прямой, при этом $|f'(x)| \leqslant |f(x)|$ и $f(0) = 1$. Какие значения может принимать $f(10)$?

**19.** (**а**) Функция $f$ определена в окрестности нуля и дифференцируема в нуле, причём $f(0) = 0$ и $f'(0) = 0$. Доказать, что $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$. (**б**) Функция $f$ определена и дифференцируема в окрестности нуля, дважды дифференцируема в нуле, причём $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ и $f''(x) = 0$. Доказать, что $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$. (**в**) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для старших производных.

**20.** Используя предыдущую задачу, доказать, что $\sin x = x - x^3/6 + o(x^4)$ при $x \to 0$.

**21.** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано) Если функция $f$ определена и дифференцируема $n-1$ раз в окрестности точки $a$ и имеет $n$-ю производную в $a$, то

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + (f''(a)/2!)h^2 + \ldots + (f^{(n)}(a)/n!)h^n + o(h^n)$$

при $h \to 0$.

**22.** (Достаточное условие максимума) Функция $f$ дифференцируема на интервале $I$, её производная равна $0$ в точке $a \in I$, положительна слева от $a$ и отрицательна справа от $a$. Доказать, что в этом случае максимум функции на интервале $I$ достигается в точке $a$.

**23.** Найти минимальное значение функции $x \mapsto x \ln x$ на интервале $(0, 1)$.

**24.*** Известно, что $a, b > 0$, $a^b = b^a$ и $a \neq b$. Доказать, что одно из чисел $a$ и $b$ меньше $e$, а другое — больше. Доказать, что для любого числа $a \in (1, e)$ найдётся единственное $b > e$, при котором $a^b = b^a$.

**25.** Функция $f$ дифференцируема в окрестности точки $a$, дважды дифференцируема в $a$, причём $f'(a) = 0$ и $f''(a) > 0$. Доказать, что точка $a$ является точкой строгого локального минимума.

**26.*** (Теорема Коши) Пусть функции $f$ и $g$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале $(a, b)$ и $f(a) \neq f(b)$. Тогда найдётся такая точка $c \in (a, b)$, что

$$\frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)}$$

(отношение средних скоростей равно отношению мгновенных) или $f'(c) = g'(c) = 0$.

**27.*** (Правило Лопиталя раскрытия неопределённости вида $0/0$) Функции $f$ и $g$ определены и дифференцируемы в окрестности некоторой точки $a$, причём $f(a) = g(a) = 0$. Пусть $g'(x) \neq 0$ при $x \neq a$ и существует предел $f'(x)/g'(x)$ при $x \to a$, равный некоторому числу $c$. Доказать, что предел $f(x)/g(x)$ при $x \to a$ также существует и равен $c$.

**28.** Функция $f$ определена и дважды дифференцируема на интервале $I$, содержащем $0$, причём $f(0) = f'(0) = 0$, а $|f''(x)| \leqslant M$ при всех $x \in I$. Доказать, что $|f(x)| \leqslant (M/2)x^2$.

**29.** (Продолжение) Сформулировать аналогичное утверждение для старших производных.

**30.** (Формула Тейлора) Функция $f$ определена и $n+1$ раз дифференцируема в окрестности точки $a$, причём её $(n+1)$-я производная (во всех точках этой окрестности) не превосходит по модулю числа $M$. Доказать, что погрешность приближённой формулы



$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + (f''(a)/2!)h^2 + \ldots + (f^{(n)}(a)/n!)h^n$$

не превосходит $(M/(n+1)!)h^{n+1}$ (если точка $a+h$ лежит в упомянутой окрестности).

**31.** (Продолжение) Доказать, что $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots$ и $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots$ при всех $x$.

**32.** (Продолжение) Используя формулу Тейлора, доказать, что $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$ при всех $x$.

**33.*** Доказать, что $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots$, если $|x| < 1$. (При $x = 1$ это тоже верно, как мы видели; при остальных $x$ ряд расходится.)

**34.*** (Бином Ньютона с произвольным показателем) Доказать, что

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

для любого (не обязательно целого) $\alpha$, если $|x| < 1$.

**35.*** Функция $f$ дифференцируема $n$ раз на всей прямой и её $n$-я производная всюду равна нулю. Что можно сказать о функции $f$?

**36.*** Функция $f$ дифференцируема на всей прямой; уравнение $f(x) = 0$ имеет $k$ решений. Доказать, что уравнение $f'(x) = 0$ имеет по крайней мере $k - 1$ решение.

**37.*** («Малочлены») Многочлен от одной переменной имеет не более 100 ненулевых коэффициентов (но может включать сколь угодно большие степени). Доказать, что он имеет не более 1000 корней.

**38.*** Доказать, что $n$-я производная функции $x \mapsto e^{-1/x}$ (рассматриваемой для положительных $x$) имеет предел $0$ при $x \to 0$.

## Контрольная работа

**1.** Даны два ряда с неотрицательными членами $\sum a_n$ и $\sum b_n$. Верно ли, что (а) если оба они расходятся, то и ряд $\sum \min(a_n, b_n)$ расходится; (б) если оба они сходятся, то и ряд $\sum \max(a_n, b_n)$ сходится?

**2.** Тот же вопрос для рядов с монотонно убывающими членами.

**3.** Доказать, что для любого многоугольника на плоскости существует прямая, делящая его на многоугольники равных площади и периметра.

**4.** В каких случаях будет непрерывна функция, определенная на множестве $M = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$?

**5.** Верно ли, что всякая равномерно непрерывная на интервале функция ограничена на нём? А на прямой?

Найти пределы функций:

**6.** $\cos 5x/\cos 7x$ при $x \to \pi/2$;

**7.** $(x+7)^{3/2} - (x+5)^{3/2}$ при $x \to +\infty$.

**8.** $x(\operatorname{ctg} x)$ при $x \to 0$.

**9.** Используя известные свойства показательной функции ($a^{x+y} = a^x a^y$, $a^0 = 1$, $a^1 = a$, непрерывность, монотонность), доказать, что $(a^x)^y = a^{xy}$ при всех $a > 0$ и при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

## Многочлены с одной переменной

Если многочлен содержит только одну переменную, его обычно записывают в порядке убывания степеней: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Числа $a_n, \ldots, a_0$ называют *коэффициентами* многочлена; при этом (если $a_n \neq 0$) число $n$ называют *степенью* многочлена, $a_n$ — *старшим коэффициентом*, $a_0$ — *свободным членом*.

**1.** (а) Многочлен $P(x)$ имеет степень 5, а многочлен $Q(x)$ имеет степень 7. Что можно сказать про степени многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$? (б) Тот же вопрос, если степени обоих многочленов равны 7.

**2.** (а) Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют старшие коэффициенты 5 и 7. Что можно сказать про старшие коэффициенты многочленов $P(x)+Q(x)$ и $P(x)Q(x)$? (б) Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют свободные члены 5 и 7. Что можно сказать про свободные члены многочленов $P(x)+Q(x)$ и $P(x)Q(x)$?

**3.** Каждый из многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ содержит по два (ненулевых) члена. Сколько ненулевых членов может быть в их произведении? Указать все варианты.



Многочлен с одной переменной $x$ обозначают $P(x)$, $Q(x)$ и т. п. Если подставить вместо переменной число $a$, то получится число, которое обозначают $P(a)$, $Q(a)$ и т. п. Если $P(a) = 0$, то $a$ называют *корнем* многочлена $P$.

**4.*** (а) Число $P(0)$ — свободный член многочлена $P$. Записать аналогичным образом сумму коэффициентов многочлена $P$. (б) Сумма коэффициентов многочлена $P(x)$ равна 5, а сумма коэффициентов многочлена $Q(x)$ равна 7. Что можно сказать про сумму коэффициентов многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$?

**5.** Произвольный многочлен $P(x)$ умножили на $x - 1$. Могут ли у получившегося многочлена все коэффициенты быть положительны?

**6.*** У многочлена $P(x)$ сумма коэффициентов при чётных степенях равна сумме коэффициентов при нечётных степенях. Многочлен $Q(x)$ также обладает таким свойством. Можно ли утверждать, что это свойство выполнено для многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$? А если про коэффициенты многочлена $Q$ ничего не известно?

**7.*** (а) Найти многочлен второй степени, имеющий корни 1 и 2. (б) Найти многочлен третьей степени, имеющий корни 1, 2 и 3.

**8.** Числа $a$ и $b$ таковы, что многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ имеет корень 2. Найти один из корней многочлена $x^3 + bx^2 + ax + 1$.

**9.** Доказать, что корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$ и $c \neq 0$ можно найти по формуле

$$x_{12} = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Применима ли эта формула, если одно из чисел $a$ и $c$ равно нулю?

**10.*** (а) Найти многочлен $P(x)$, для которого $P(n+1) - P(n) = n$ при всех $n$. Как с его помощью вычислить сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + n$? (б) Найти многочлен $P(x)$, для которого $P(x+1) - P(x) = x^2$. (в) Вычислить сумму $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

**11.** Обозначим через $P(Q(x))$ многочлен, который получится, если в $P(x)$ вместо $x$ подставить $Q(x)$. (Например, если $P(x) = x^2$, а $Q(x) = x+1$, то $P(Q(x)) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$, а $Q(P(x)) = x^2 + 1$. Каковы степени многочленов $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$, если степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны $m$ и $n$ соответственно?

**12.** Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют целые коэффициенты, причём каждый из них имеет хотя бы один нечётный коэффициент. Доказать, что у произведения $P(x)Q(x)$ также есть хотя бы один нечётный коэффициент.

**13.*** Найти коэффициенты при $x^2$, $x$ и 1 (свободный член) многочлена

$$(\ldots((x-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2$$

(10 скобок).

**14.** Доказать, что в произведении $(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{10})(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{10})$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов не останется нечётных степеней $x$.

**15.** Все коэффициенты многочлена — целые числа в диапазоне от $-9$ до 9. Доказать, что он не может иметь корня, большего 10.

**16.*** Многочлен $P(x)$ принимает только неотрицательные значения. Доказать, что его степень чётна.

**17.*** Для произвольного многочлена $P(x)$ рассмотрим последовательность $P(0), P(1), P(2), \ldots$ его значений в целых точках. $P(x)$. Составим последовательность разностей, написав под каждыми двумя числами их разность (получится последовательность $P(1)-P(0), P(2)-P(1), \ldots$). Аналогичным образом составим последовательность вторых разностей и т. п. Доказать, что рано или поздно получится последовательность из одних нулей.

**18.*** (**а**) Доказать тождество $P(x)-2P(x+1)+P(x+2) = 0$. для любого многочлена $P(x)$ первой степени. (**б**) Доказать тождество $P(x)-3P(x+1)+3P(x+2)-P(x+3) = 0$ для любого многочлена $P(x)$ степени не выше 2. (**в**) Сформулировать и доказать аналогичное тождество для многочленов бóльших степеней.



## Рациональные функции

**1.** Упростить выражение

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

**2.** Найти числа $a$ и $b$, при которых (для всех $x$)

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

**3.** Найти числа $a$, $b$ и $c$, при которых

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

**4.*** Найти числа $a, b, c, d$, при которых

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x+b} + \frac{c}{x+d}.$$

**5.*** Существуют ли числа $a, b, c, d$, при которых

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{a}{x+b} + \frac{c}{x+d}$$

для всех $x$?

**6.*** Существуют ли числа $a, b, c, d, e, f$, при которых

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+b} + \frac{c}{x+d} + \frac{e}{x+f}$$

для всех $x$?

**7.** Найти сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 100}.$$

**8.** Найти сумму

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{98\cdot99\cdot100}.$$

**9.** Из числа $x$ получают новое число $f(x)$ по формуле $f(x)=x/(x-1)$. Доказать, что двукратное применение этого правила возвращает к исходному числу: $f(f(x))=x$.

**10.** Проверить, что при любом значении $t$ точка с координатами $(2t/(t^2+1),(t^2-1)/(t^2+1))$ лежит на окружности единичного радиуса с центром в нуле.

**11.*** Как с помощью этих формул искать пифагоровы треугольники (прямоугольные треугольники с целыми сторонами) и рациональные точки на окружности?

**12.*** Какие тригонометрические формулы соответствуют утверждению задачи 10? Каков геометрический смысл параметра $t$?

**13.** Нарисовать график функции $y=1/x$. (Он называется *гиперболой*.)

**14.** Нарисовать график функции $y=1/x^2$.

**15.** Нарисовать график функции $y=1/(x(x-1))$.

**16.** Нарисовать график функции $y=x/(x-1)$.

**17.** Нарисовать график функции $y=1/(x^2+1)$.

**18.** Нарисовать график функции $y=1/(x^2-1)$.

**19.** Нарисовать график функции $y=(x^2+1)/x$.

**20.** Графики $y=1/x$ и $y^2-x^2=1$ получаются друг из друга композицией поворота и гомотетии. Найти угол поворота и коэффициент гомотетии.

Функции вида $f(x)=(ax+b)/(cx+d)$ (здесь $a$, $b$, $c$, и $d$ — некоторые числа) называют *дробно-линейными*.

**21.** Доказать, что графики любых двух дробно-линейных функций подобны. В каком случае коэффициент подобия равен 1?

**22.** Найти касательную к гиперболе $y=1/x$, проходящую через точку $\langle 2,1/2\rangle$ (касательная — прямая, имеющая с гиперболой только одну общую точку).

**23.*** Имеет ли график $y=x+1/x$ оси симметрии?



**24.*** Описать все дробно-линейные функции, для которых $f(f(x))=x$.

**25.*** Существуют ли дробно-линейные функции $f$, для которых $f(f(f(x)))=x$, за исключением функции $f(x)=x$?

**26.** Двойное отношение четырёх точек $p,q,r,s$ на числовой оси определяется как

$$\frac{r-p}{r-q}:\frac{s-p}{s-q}.$$

(а) Как изменится двойное отношение, если переставить какие-то две точки? (б) Доказать, что дробно-линейная функция сохраняет двойное отношение: если $f(x)=(ax+b)/(cx+d)$, то двойное отношение точек $p,q,r,s$ равно двойному отношению точек $f(p),f(q),f(r),f(s)$ **(в)** На плоскости выберем две прямые, на каждой произвольно фиксировано начало отсчёта и единица измерения. Выберем точку $O$, не лежащую на этих прямых, и для каждой точки $X$ на первой прямой рассмотрим её проекцию $Y$ на вторую прямую (точки $O,X,Y$ лежат на одной прямой). Доказать, что координата точки $Y$ является дробно-линейной функцией координаты точки $X$. (г) Из двух предыдущих утверждений вытекает, что двойное отношение четырёх точек на прямой сохраняется при центральной проекции. Как доказать это геометрически?

## Деление с остатком

Рассмотрим *рациональные дроби с одной переменной*, то есть отношения многочленов $P(x)/Q(x)$. Как и обычные дроби, они делятся на «правильные» и «неправильные». Правильными считаются те, у которых степень числителя меньше степени знаменателя, неправильными — остальные.

Неправильную дробь можно преобразовать в сумму многочлена и правильной дроби. Например,

$$\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}.$$

**1.** Выполнить такое преобразование для дроби $x^2/(x-2)$.

**2.** . . . для дроби $x^3/(x-1)$.
**3.** . . . для дроби $x^4/(x-1)$.
**4.** . . . для дроби $x^4/(x+1)$.
**5.** . . . для дроби $x^4/(x+2)$.
**6.** . . . для дроби $x^3/(x^2-1)$.
**7.** . . . для дроби $x^3/(x^2+x)$.
**8.** . . . для дроби $x^3/(2x+3)$.
**9.** . . . для дроби $x^{10}/(x+2)$.
**10.** . . . для дроби $x^{10}/(x^2+2)$.

**11.** Записать решения задач 1 – 10 в виде «деления уголком», следуя такому образцу:

$$
\begin{array}{rr|l}
x^2 & & x-2 \\ \cline{3-3}
\underline{x^2-2x} & & x+2 \\
2x & & \\
\underline{2x-4} & & \\
4 & &
\end{array}
$$

Если дробь $P(x)/D(x)$ представлена в виде суммы многочлена и правильной дроби,

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

то $Q(x)$ называют *частным* от деления $P(x)$ на $D(x)$, а $R(x)$ — остатком. При этом выполняются такие свойства: во-первых, $P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$; во-вторых, степень $R(x)$ меньше степени $D(x)$ или $R(x) = 0$.

**12.** Степень делимого равна 100, степень делителя равна 43. Какими могут быть степени частного и остатка?

**13.** Как изменятся частное и остаток, если делимое и делитель умножить на $(x-1)$?

**14.*** Доказать, что деление многочленов с остатком всегда выполнимо, и притом единственным образом.

**15.** Какой остаток получится, если делить $x^{1000}-1$ на $x^{17}-1$?

**16.** Многочлен $P(x)$ даёт остаток $x+7$ при делении на $x^2-1$. Какой остаток даст он при делении на $x+1$?



**17.** При каких $n$ и $k$ многочлен $x^n-1$ делится на многочлен $x^k-1$ без остатка?

**18.** Найти остаток от деления $(x^2+x+1)^{100}$ на $x^2+1$.

**19.** Найти остаток от деления $x^{57}$ на $x^4+x^3+x^2+x+1$.

**20.** Придумать многочлен, который при делении на $x^2+1$ даёт остаток $x+1$, а при делении на $x^2+2$ даёт остаток $x-1$.

**21.** (а) Все коэффициенты делимого и делителя — целые. Можно ли утверждать, что все коэффициенты частного и остатка — целые? (б) Все коэффициенты делимого и делителя — рациональные. Можно ли утверждать, что все коэффициенты частного и остатка — рациональные?

**22.** При делении многочлена $P(x)$ на $x^2-1$ был получен остаток $x+1$, а при делении многочлена $Q(x)$ — остаток $x-1$. Какой остаток будет при делении многочленов $P(x)+Q(x)$ и $P(x)Q(x)$ при делении на $x^2-1$?

**23.*** При делении многочлена $P(x)$ на $x^2+1$ получился остаток $a+bx$ (здесь $a$ и $b$ — некоторые числа); при делении $Q(x)$ получился остаток $c+dx$. Какой остаток будет при делении на $x^2+1$ многочленов $P(x)+Q(x)$ и $P(x)Q(x)$? Что напоминают вам эти формулы?

**24.*** Делится ли многочлен $x^{100}+3x^{70}-5$ на многочлен $x^5+x^3-2$ без остатка?

## Корни и множители

**1.** Доказать, что остаток при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$ (где $a$ — некоторое число), равен $P(a)$.

**2.*** Как вычислить значение многочлена степени $n$ с заданными коэффициентами в заданной точке $x$, сделав не более $n$ операций умножения?

**3.** Доказать, что многочлен $P(x)$ делится нацело на двучлен $x-a$ (здесь $a$ — некоторое число) в том и только том случае, когда $a$ — корень многочлена $P$, то есть когда $P(a)=0$.

**4.** Известно, что числа $a$ и $b$ являются корнями многочлена $P(x)$, причём $a \neq b$. Доказать, что $P(x)$ делится на $(x-a)(x-b)$.

**5.** Доказать, что многочлен степени $n$ не может иметь более $n$ различных корней.

**6.** Известно, что многочлен $P(x)$ даёт при делении на $(x-1)$ остаток 3, а при делении на $(x+1)$ — остаток 5. Найти остаток от деления $P(x)$ на $(x^2-1)$.

**7.** Найти числа $a$ и $b$, если известно, что многочлен $x^{100} + x^{99} + ax + b$ делится на $x^2 - 1$.

**8.** (**а**) График многочлена $P(x)$ симметричен относительно оси ординат. Доказать, что многочлен $P(x)$ не содержит нечётных степеней (коэффициенты при них равны 0). (**б**) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для многочленов, не содержащих чётных степеней.

**9.** Какое максимальное число точек пересечения могут иметь графики $y = P(x)$ и $y = Q(x)$, если степени многочленов $P$ и $Q$ равны соответственно $p$ и $q$?

**10.*** Какое максимальное число точек пересечения могут иметь графики $y = P(x)$ и $x = Q(y)$, если степени многочленов $P$ и $Q$ равны соответственно $p$ и $q$?

**11.** Найти многочлен степени 3, если известно, что он имеет корни 1 и 2, а старший коэффициент и свободный член равны 1.

**12.*** Доказать, что не существует (не равного тождественно нулю) многочлена от двух переменных $P(x, y)$, для которого $P(t, \sin t) = 0$ при всех $t$.

**13.** Доказать, что через любые три точки с различными абсциссами проходит единственный график квадратного трёхчлена (функции вида $y = ax^2 + bx + c$; возможно, $a = 0$).

**14.*** Многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $1 + i$. Доказать, что он делится на многочлен $x^2 - 2x + 2$.

**15.** Доказать, что многочлены $x^5 + 5x + 2$ и $x^5 + 3x - 3$ не имеют общих корней.

**16.*** Многочлены $x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x - 5$ и $x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 4x - 10$ имеют общий корень. Найти его.

Говорят, что число $a$ является для многочлена $P(x)$ *корнем кратности не менее* $k$, если $P(x)$ делится на $(x-a)^k$. Максимальное такое $k$ называют *кратностью* корня.



**17.** Доказать, что если для многочлена $P(x)$ число $\alpha$ является корнем кратности не менее 2, а число $\beta$ является корнем ($\alpha \neq \beta$), то $P(x)$ делится без остатка на $(x-\alpha)^2(x-\beta)$. (Решение этой и следующей задач упрощается, если пользоваться однозначностью разложения на множители для многочленов, но можно без этого обойтись.)

**18.*** Доказать, что если для многочлена $P(x)$ число $\alpha$ является корнем кратности не менее $k$, а число $\beta$ является корнем кратности не менее $l$ ($\alpha \neq \beta$), то $P(x)$ делится на $(x-\alpha)^k(x-\beta)^l$.

**19.*** Доказать, что число корней многочлена, если каждый считать столько раз, какова его кратность, не превосходит степени многочлена.

**20.** Многочлен $P(x) = x^2 + px + q$ имеет два различных корня $\alpha$ и $\beta$. (**а**) Выразить $p$ и $q$ через эти корни (*формулы Виета* для квадратного трёхчлена). (**б**) Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы числа $\alpha^2$ и $\beta^2$.

**21.** Многочлен $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ имеет три различных корня $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. (**а**) Выразить $p$, $q$ и $r$ через эти корни (*формулы Виета*). (**б**) Выразить $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ через $p$, $q$ и $r$. (**в**) Составить кубическое уравнение, корнями которого были бы числа $\alpha^2$, $\beta^2$ и $\gamma^2$.

**22.** Прямая пересекает график $y = x^3$ в трёх точках. Две из них имеют абсциссы $a$ и $b$. Найти абсциссу третьей точки. (Как сделать это с помощью формул Виета?)

**23.*** Кубическое уравнение $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ с целыми коэффициентами имеет три корня $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Доказать, что число $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ — целое при любом $n = 1, 2, 3, \ldots$

**24.*** Как выглядят формулы Виета для многочленов высших степеней?

**25.*** Как выглядят формулы Виета для многочленов с кратными корнями?

**26.*** Найти сумму и произведение всех комплексных корней уравнения $z^n = 1$ с помощью формул Виета.

**27.** Доказать, что произведение расстояний от точки до вершин правильного $n$-угольника не изменится, если повернуть $n$-угольник вокруг центра.

**28.*** Вычислить произведение

$$\cos 0\cdot\cos(\pi/n)\cdot\cos(2\pi/n)\cdot\ldots\cdot\cos((n-1)\pi/n)\cdot\cos((n\pi)/n).$$

**29.** Остатки от деления многочлена $P(x)$ на $(x-a)$, $(x-b)$ и $(x-c)$ равны соответственно $a^2$, $b^2$ и $c^2$. Найти остаток от деления этого многочлена на $(x-a)(x-b)(x-c)$.

**30.** Доказать, что любой многочлен степени не выше 3 однозначно представляется в виде $a+b(x-1)+c(x-1)^2+ + d(x-1)^3$.

**31.** Доказать, что любой многочлен степени не выше 3 однозначно представляется в виде $a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+ + d(x-1)(x-2)(x-3)$.

**32.** (а) Указать многочлен $P(x)$, для которого $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ и $P(4) = 1$. Какова наименьшая возможная степень такого многочлена? (б) Доказать, что для любых чисел $a, b, c, d$ можно найти многочлен степени не выше 3, для которого $P(0) = a$, $P(1) = b$, $P(2) = c$ и $P(3) = d$.

**33.** Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — различные числа. Доказать, что для любых чисел $y_1, \ldots, y_n$ существует единственный многочлен $P(x)$ степени меньше $n$, для которого $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2, \ldots, P(x_n) = y_n$.

## Многочлены и целые числа

**1.** Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целый корень $a$. Доказать, что его свободный член делится на $a$.

**2.*** Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет два целых корня $a$ и $b$. Доказать, что его свободный член делится на $ab$.

**3.** Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(7) = 5$, а $P(11) = 7$?

**4.** Доказать, что многочлен с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1, не имеет рациональных, но не целых корней.

**5.** (а) Доказать, что квадратный корень из целого числа либо целый, либо иррациональный. (б) Тот же вопрос для корня произвольной целой положительной степени.



**6.** Решить уравнение $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$. (Указание: оно имеет целый корень.)

**7.** Несократимая дробь $\alpha = p/q$ является корнем многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами. Доказать, что $p$ является делителем его свободного члена, а $q$ — делителем старшего коэффициента.

**8.*** (Продолжение) Доказать, что многочлен $P(x)$ в этом случае можно представить в виде $P(x) = (qx-p)R(x)$, где $R(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

**9.** (а) Указать многочлен с целыми коэффициентами, который имеет корень $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. (б) Доказать, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррационально.

**10.*** Доказать, что число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ иррационально.

**11.** Доказать, что если число $2+\sqrt{3}$ является корнем многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, то число $2-\sqrt{3}$ также является его корнем, и многочлен $P(x)$ делится без остатка на многочлен $x^2-4x+1$.

**12.*** Доказать, что если число $\sqrt[3]{2}$ является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то этот многочлен делится без остатка на многочлен $x^3-2$.

**13.** (а) Известно, что многочлен $P(x)$ принимает целые значения при всех целых $x$. Можно ли утверждать, что он имеет целые коэффициенты? (б) При каких $a$, $b$ и $c$ квадратный трёхчлен $ax^2+bx+c$ принимает целые значения при всех целых $x$?

**14.*** (а) Дано целое $k \geqslant 0$. Указать многочлен $P(x)$ наименьшей степени, для которого $P(1)=P(2)=\ldots=P(k-1)=0$, а $P(k) = 1$. (б) Как связан этот многочлен (будем обозначать его $P_k(x)$) с биномиальными коэффициентами? (в) Доказать, что многочлен $P_k(x)$ принимает целые значения во всех целых точках. (г) Пусть $Q(x)$ — произвольный многочлен, который принимает целые значения во всех целых точках. Доказать, что его можно представить в виде $c_0+c_1P_1(x)+\ldots+c_kP_k(x)$ при некотором $k$ и некоторых целых $c_1, \ldots, c_k$.

## Многочлены и комплексные числа

**1.** Указать многочлен с действительными коэффициентами, имеющий комплексный корень $3+4i$.

**2.** Доказать, что если комплексное число $z$ является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то и сопряжённое число $\overline{z}$ также является его корнем, причём той же кратности.

**3.** (а) Найти многочлен второй степени с корнями $2+i$ и $3-i$ (коэффициенты могут быть комплексными). (б) Найти многочлен с действительными коэффициентами, имеющий два указанных корня (и, возможно, другие корни).

**4.** Верна ли формула для корней квадратного уравнения, если коэффициенты являются комплексными числами?

*Основная теорема алгебры* утверждает, что всякий многочлен с комплексными коэффициентами, не являющийся константой, разлагается на линейные множители.

**5.** Доказать, что всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение множителей первой или второй степени с действительными коэффициентами.

**6.** Указать это разложение для многочленов $x^4+1$ и $x^6-x$.

**7.** Доказать, что многочлен нечётной степени с вещественными коэффициентами имеет вещественный корень.

**8.** Найти многочлен наименьшей степени с вещественными коэффициентами, имеющий корни $1-i$, $3+i$ и $2$.

**9.*** Доказать, что если многочлен с целыми коэффициентами имеет корень $a+bi$ ($a$ и $b$ — целые), то его свободный член делится на $a^2+b^2$.

**10.** Доказать, что значение квадратного трёхчлена (с комплексными коэффициентами) в центре правильного треугольника на комплексной плоскости равно среднему арифметическому его значений в вершинах треугольника.

**11.*** Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для многочленов произвольной степени.

**12.*** Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами неотрицателен при всех действительных значениях $x$. Доказать, что его можно представить в виде суммы квадратов нескольких многочленов с действительными коэффициентами.



## Контрольная работа

**1.** (Лемма Гаусса) В произведении двух многочленов с целыми коэффициентами все коэффициенты делятся на простое число $p$. Доказать, что все коэффициенты одного из исходных многочленов тоже делятся на $p$.

**2.** Многочлен $x^3+2x^2+3x+5$ имеет корни $x_1, x_2, x_3$. Найти коэффициенты многочлена третьей степени со старшим коэффициентом 1 и корнями $x_1+x_2, x_2+x_3, x_1+x_3$.

**3.** (а) Доказать, что существует единственный многочлен $P_n(x)$, для которого $\cos nx = P_n(\cos x)$ при всех $x$. (б) Найти его старший коэффициент и свободный член.

**4.** Разложить на множители многочлены (а) $x^3+x^2+x+1$; (б) $x^4+x^3+x^2+x+1$.

**5.** Многочлен с целыми коэффициентами равен единице в трех различных целых точках. Доказать, что он не имеет целых корней.

**6.** Найти все рациональные корни многочлена $6x^5-x^4-6x^3+5x^2-13x-12$.

**7.** Какие многочлены представимы в виде $P(x)(x^2-1)+Q(x)(x^2+x)$?

**8.** (а) Любой действительный корень многочлена $P$ является корнем многочлена $Q$. Следует ли из этого, что $P$ делит $Q$? (б) Любой комплексный корень многочлена $P$ является корнем многочлена $Q$. Следует ли из этого, что $P$ делит $Q$?

## Перестановки

*Перестановкой* чисел $1, 2, \ldots, n$ называется взаимно однозначное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на себя. Перестановки записывают в виде таблиц; например, перестановка $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 1$, $4 \mapsto 2$ записывается как $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; В верхней строке числа обычно располагают в порядке возрастания; под ними пишутся их образы, так что произвольная перестановка $\sigma$ чисел $1, 2, \ldots, n$ запишется как $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

*Произведение* перестановок определяется как композиция отображений: $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$. Перестановки $\sigma$ и $\tau$ *коммутируют*, если $\sigma\tau = \tau\sigma$. *Единичная перестановка* (обозначается id) — это тождественное отображение, при котором все элементы остаются на месте. *Обратная* к перестановке $\sigma$ перестановка определяется соотношением $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \mathrm{id}$.

**1.** Найти произведение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**2.** Указать две некоммутирующие перестановки.

**3.** (**а**) Сколько существует перестановок чисел $1, 2, \ldots, 5$? Сколько из них оставляют число 1 на месте? (**б**) Сколько из них переводят 1 в 5? (**в**) Для скольких из них $\sigma(1) < \sigma(2)$? (**г**) Для скольких из них $\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(3)$?

**4.*** (Продолжение) Для скольких их них выполнено равенство (**а**) $\sigma^2 = \mathrm{id}$? (**б**) $\sigma = \sigma^{-1}$? (**в**) $\sigma^2 = \sigma^{-1}$?

**5.*** Пусть имеется некоторая последовательность поворотов граней кубика Рубика. Доказать, что, повторяя ее достаточно много раз, мы рано или поздно вернёмся к исходному положению.

**6.*** Программа кодирует текст на русском языке, заменяя (взаимно-однозначно) каждую букву на некоторую другую. Вася говорит, что не нуждается в программе декодирования, поскольку вместо этого можно применить программу кодирования несколько раз. Прав ли он?

**7.*** Доказать, что любая перестановка имеет конечный порядок: применяя её много раз, мы когда-нибудь получим тождественную перестановку.

**8.** Найти все возможные порядки перестановок множества из $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ элементов (*порядок* — это минимальное число применений перестановки, которое даёт тождественную перестановку).

Перестановку, при которой $a_1 \mapsto a_2 \mapsto a_3 \mapsto \ldots \mapsto \mapsto a_{k-1} \mapsto a_k \mapsto a_1$ (а остальные элементы остаются на месте), называют *циклом длины* $k$ и обозначают $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Циклы длины 2 называют *транспозициями*.



**9.** Пусть $\sigma = (123)$, $\tau = (34)$. Чему равно $\tau\sigma\tau^{-1}$?

**10.** Два цикла $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ коммутируют, если они не пересекаются (среди $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_m$ нет общих элементов). Указать другой пример коммутирующих циклов.

**11.*** Описать все случаи, в которых циклы коммутируют.

**12.** (**а**) Доказать, что каждая перестановка представима в виде произведения попарно непересекающихся циклов, причем единственным (с точностью до порядка циклов) образом. (**б**) Найти это разложение для перестановок из задачи 1. (**в**) Как, используя это, решить задачу 7?

**13.** Сколько различных перестановок встречается среди степеней перестановки $(12345)(678)$?

**14.** Доказать, что порядок любой перестановки $n$ элементов делит $n!$. Может ли он быть равен $(n!)$?

**15.*** Сколько существует перестановок чисел $1, \ldots, 8$, которые представляются в виде произведения непересекающихся циклов длины 5 и длины 3?

**16.*** На книжной полке в беспорядке стоит собрание сочинений из $n$ томов. За один шаг разрешается обменять любые два тома местами. Доказать, что за $n-1$ шагов всегда можно восстановить порядок. Можно ли это сделать (и сколько шагов может потребоваться), если разрешается менять местами только соседние (стоящие рядом на полке) тома? только тома с соседними (отличающимися на 1) номерами?

**17.*** (Продолжение) Доказать, что начав с какой-то расстановки книг, можно вернуться к исходному положению лишь после чётного числа обменов.

**18.** Доказать, что каждая перестановка представима в виде произведения транспозиций.

**19.** (Продолжение) Доказать, что в предыдущей задаче можно обойтись только транспозициями $(1, 2)$, $(2, 3)$, …, $(n-1, n)$.

**20.** (**а**) Доказать, что произведение нечётного числа транспозиций не может быть единичной перестановкой. (**б**) Доказать, что все перестановки делятся на два типа: одни представимы в виде произведения чётного числа транспозиций, но не в виде произведения нечётного числа транспозиций (они называются *чётными*), другие — наоборот (они называются *нечётными*).

21. Назовём *беспорядком* в перестановке $\sigma$ пару $(i, j)$, для которой $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$. Доказать, что чётность перестановки определяется чётностью числа беспорядков.

22.* Что произойдёт с многочленом

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) \ldots (x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})$$

(произведение $(x_j - x_i)$ по всем $j > i$), если в нём поменять местами $x_1$ и $x_2$? сделать циклическую замену $x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n \to x_1$? сделать произвольную перестановку переменных?

23. Доказать, что любая чётная перестановка представима в виде произведения циклов длины 3.

24.* Доказать, что можно единственным способом разбить перестановки на чётные и нечётные так, чтобы произведение двух чётных или двух нечётных было чётно, а произведение чётной и нечётной (в любом порядке) было нечётно.

25. Доказать, что чётных перестановок столько же, сколько нечётных.

26.* Как определить, будет ли заданная перестановка $n$ элементов чётной или нечётной, сделав $O(n)$ действий? (Подсчёт числа беспорядков требует порядка $n^2$ действий.)

27.* (а) Доказать, что в игре «15» нельзя вернуть на место переставленные 14 и 15 (не вынимая фишек из коробочки, а только двигая их). (б) Сколько классов неэквивалентных (не сводящихся друг к другу движением фишек) позиций есть в этой игре?

28.* На $n$ катушках намотано $n$ магнитных лент красным концом (ракордом) наружу, а белым — внутрь. Есть дополнительная катушка и магнитофон, позволяющий перемотать ленту с одной катушки на другую (при этом внутри оказывается другой конец). Можно ли добиться, чтобы все ленты оказались белым концом наружу и пустой осталась та же дополнительная катушка? Можно ли добиться, чтобы при этом каждая лента осталась на своей катушке?



29.* Пусть $\sigma_1$ и $\sigma_2$ — две перестановки, фигурирующие в задаче 1 в качестве сомножителей. Найдётся ли такая перестановка $\tau$, что $\tau\sigma_1\tau^{-1} = \sigma_2$?

30. Пусть $\sigma$ — произвольная перестановка. Доказать, что перестановки $\sigma$ и $\tau\sigma\tau^{-1}$ раскладываются в произведение циклов одних и тех же длин.

31.* Дана перестановка $\sigma{=}(123)(67)(89)$ множества $\{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$. Сколько перестановок $\tau$ с ней коммутируют?

32.* Пусть $\sigma$ и $\tau$ — перестановки из задачи 1. Найдётся ли такая перестановка $\rho$, что $\sigma\rho = \rho\tau$?

33.* Дана произвольная перестановка $mn$ элементов, записанных в таблицу $m \times n$. Доказать, что её можно представить в виде композиции трёх перестановок, в которой первая и третья происходят по столбцам (новое положение любого элемента находится в том же столбце, что и старое), а вторая — по строкам.

34.* В словах, составленных из букв R и S, разрешается вычёркивать и дописывать (в любом месте) группы RRR и SS, а также заменять RRS на SR и наоборот. Сколько неэквивалентных (не переводимых друг в друга такими заменами) слов существует?

35.* (Продолжение) Тот же вопрос, если слова составлены из букв $a$ и $b$, разрешается вычёркивать и добавлять $aa$ и $bb$, а также заменять $aba$ на $bab$.

## Группы

Пусть $G$ — множество с операцией $*$ (каждой паре $f, g$ элементов $G$ поставлен в соответствие элемент $f * g$; порядок важен!). Множество $G$ называется *группой*, если

1) $(f * g) * h = f * (g * h)$ для любых $f, g, h \in G$;

2) существует *единичный элемент* $e \in G$, для которого $e * g = g * e = g$ при любом $g \in G$;

3) для любого элемента $g \in G$ существует *обратный элемент* $g^{-1} \in G$, для которого $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$.

Операцию $*$ иногда называют «умножением», и вместо $g * h$ пишут просто $gh$.

Группы, в которых $g * h = h * g$ для любых $g, h \in G$, называются *коммутативными* или *абелевыми*. (Иногда при этом групповую операцию называют «сложением».)

**1.** Выяснить, являются ли группами следующие множества (с указанными операциями) и какие из этих групп коммутативны: (а) натуральные числа с операцией сложения; (б) целые числа с операцией сложения; (**в**) ... с операцией умножения; (г) рациональные числа с операцией умножения; (д) остатки по модулю 5 с операцией сложения; (е) ... с операцией умножения; (**ж**) ненулевые остатки по модулю 5 с операцией умножения; (**з**) то же для модуля 10; (**и**) векторы на плоскости с операцией сложения; (**к**) ... только векторы с положительными координатами; (**л**) ... с целыми координатами; (**м**) комплексные числа с операцией умножения; (**н**) ... только ненулевые комплексные числа; (о) по модулю равные 1; (**п**) по модулю равные 2; (**р**) движения плоскости (с операцией композиции); (**с**) ... сохраняющие ориентацию; (**т**) ... не сохраняющие ориентации; (**у**) повороты; (**ф**) переносы; (**х**) перестановки чисел $1, \ldots, n$ с операцией умножения; (**ц**) ... только чётные перестановки; (**ч**) циклы длины 3; (**ш**) скорости в теории относительности (числа в интервале от $-1$ до 1, складываемые по формуле $u * v = (u + v)/(1 + uv)$; за единицу скорости выбрана скорость света); (**щ**) фигуры (множества точек) на плоскости с операцией симметрической разности ($A * B = A \triangle B$ состоит из точек, принадлежащих ровно одной из фигур $A$ и $B$).

**2.** Доказать, что произведение $n$ сомножителей не зависит от расстановки скобок. (Аккуратное рассуждение требует индукции по $n$.)

**3.** Доказать (а) правило сокращения: если $x * y = x * z$, то $y = z$; (б) что в группе не может быть двух единичных элементов; (**в**) что у каждого элемента есть единственный обратный.

Если групповая операция записывается как умножение, то обратный элемент обозначается $a^{-1}$.

**4.** Как найти $(ab)^{-1}$, зная $a^{-1}$ и $b^{-1}$?



**5.** Определить $a^n$ (где $a$ — элемент группы, $n$ — целое число) и проверить равенство $a^{m+n} = a^m a^n$.

**6.** Доказать, что для любого элемента $a$ конечной группы найдётся целое положительное $n$, для которого $a^n$ равно $e$ (единичному элементу).

Наименьшее число $n$ с таким свойством называется *порядком* элемента $a$; оно является периодом последовательности $\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0 = e, a^1 = a, a^2, a^3, \ldots$ и обозначается пор$(a)$.

**7.*** Доказать, что пор$(fg)$ = пор$(gf)$.

**8.*** В группе выбраны три элемента $a$, $b$, $c$. Сколько различных может быть среди чисел пор$(abc)$, пор$(acb)$, пор$(bac)$, пор$(bca)$, пор$(cab)$, пор$(cba)$?

**9.** Пусть пор$(g) = 57$. Чему равно пор$(g^6)$? Сформулировать и доказать общее утверждение.

**10.*** Доказать, что если порядок любого элемента группы (кроме единицы) равен 2, то группа коммутативна.

**11.** Найти все элементы конечного порядка (а) в группе ненулевых комплексных чисел (по умножению); (б) в группе движений плоскости.

**12.** Пусть $a$ — фиксированный элемент конечной группы $G$. Доказать, что операция «левого умножения» на $a$ (переводящая $x$ в $ax$) является перестановкой элементов группы и состоит из циклов одинаковой длины. Будет ли операция «правого умножения» на $a$ состоять из циклов той же длины?

**13.** (Продолжение) Доказать, что порядок любого элемента конечной группы делит порядок (число элементов) группы.

**14.** Доказать *малую теорему Ферма*: если целое число $a$ взаимно просто с целым положительным числом $n$, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$. (Здесь $\phi(n)$ — количество чисел от 1 до $n$, взаимно простых с $n$.)

**15.*** Существует ли бесконечная группа, любой элемент которой имеет конечный порядок?

Если любой элемент группы является (положительной или отрицательной) степенью элемента $a$, элемент $a$ называется *образующей* группы, а группа называется *циклической*.

**16.** Бывают ли нециклические группы из 1, 2, 3, 4, 5 и 6 элементов?

**17.** Будет ли группа ненулевых остатков от деления на 11 (с операцией умножения) циклической?

Подмножество $H$ группы $G$ называют *подгруппой*, если оно само является группой относительно той же операции, то есть содержит единицу, произведение любых двух своих элементов и обратный к любому своему элементу.

**18.** Какие имеются подгруппы в группе остатков по модулю 10 (с операцией сложения)?

**19.** ...в группе перестановок трёх элементов?

**20.** Верно ли, что пересечение подгрупп — подгруппа? А объединение?

**21.** Доказать, что любая подгруппа группы $\mathbb{Z}$ целых чисел (по сложению) имеет вид $n\mathbb{Z}$, то есть состоит из всех кратных некоторого числа $n$.

**22.*** Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — подгруппа аддитивной группы вещественных чисел. Доказать, что либо $X$ состоит из всех кратных некоторого числа $x$, либо $X$ всюду плотна в $\mathbb{R}$ (пересекается с любым интервалом). Какой из двух случаев имеет место для множества чисел вида $m + n\sqrt{2}$ (где $m, n \in \mathbb{Z}$)?

**23.** Множество элементов $gh$, где $g$ — фиксированный элемент $G$, а $h$ пробегает все элементы $H$, называется *левым смежным классом* $G$ по $H$ и обозначается $gH$. Доказать, что (а) все смежные классы содержат одно и то же количество элементов; (б) любые два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают.

**24.** (Теорема Лагранжа) Пусть $G$ — конечная группа, $H$ — ее подгруппа. Доказать, что порядок $H$ делит порядок $G$. (Указание: $G$ разбивается на смежные классы.) Как вывести отсюда, что порядок группы делится на порядок любого её элемента?

**25.*** Описать все конечные подгруппы группы движений плоскости.

**26.*** Сколько элементов циклической группы порядка $n$ имеют порядок $k$?



**27.*** Пусть $n$ — целое положительное число. Доказать, что сумма чисел $\varphi(d)$ для всех делителей $d$ числа $n$ равна $n$. (Например, при $n = 6$ имеем $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(6) = 1 + 1 + 2 + 2 = 6$.)

**28.*** Доказать, что любая группа простого порядка является циклической.

**29.*** Подмножество $H$ конечной группы $G$ замкнуто относительно умножения (произведение любых двух элементов из $H$ лежит в $H$). Доказать, что $H$ — подгруппа.

**30.*** В конечной группе квадрат любого элемента равен единице. Каков может быть порядок этой группы?

## Векторы

**1.** Даны два вектора $a = \overrightarrow{OA}$ и $b = \overrightarrow{OB}$. Выразить через них вектор $\overrightarrow{OC}$, если точка $C$ делит отрезок $AB$ в отношении $5 : 7$.

**2.** На плоскости фиксированы три точки $O, A, B$. Где находятся концы векторов $\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$, (а) если $\lambda + \mu = 1$? (б) ...и $\lambda, \mu \geqslant 0$?

**3.** На плоскости заданы четыре точки $O, A, B, C$. *Барицентрическими координатами* точки $X$ относительно треугольника $ABC$ называются числа $(\lambda, \mu, \nu)$, для которых $\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC}$ и $\lambda + \mu + \nu = 1$. (а) Показать, что если точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой, то барицентрические координаты любой точки $X$ определены однозначно и не зависят от выбора точки $O$. (б) Указать геометрическую интерпретацию барицентрических координат в терминах площадей. (в) Точка $D$ имеет барицентрические координаты $(1, 2, -2)$ относительно треугольника $ABC$. Каковы барицентрические координаты точки $C$ относительно треугольника $ABD$?

**4.*** Указать физическую интерпретацию барицентрических координат (барицентр — центр тяжести).

**5.** В пространстве фиксированы четыре точки $O, A, B, C$. Где находятся концы векторов $\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC}$, если $\lambda + \mu + \nu = 1$?

**6.** Где может находиться точка $X$, если $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, точка $A$ находится внутри квадрата, а точка $B$ — внутри треугольника (см. рис. 25)?

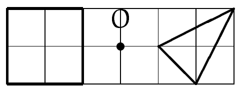


Рис. 25

**7**.* Даны три вектора $a, b, c$ на плоскости. Доказать, что найдутся такие целые числа $k, l, m$, не равные одновременно 0, что вектор $ka + lb + mc$ имеет длину меньше 0,001.

**8**.* На плоскости даны 100 векторов, по длине не превосходящие 1. Доказать, что сложить некоторые из векторов со знаком «+», а другие со знаком «−», чтобы сумма по длине не превосходила 1/1000. (Сумма должна содержать хотя бы один вектор; вектор не может входить и со знаком «+», и со знаком «−», но может вовсе не входить в сумму.)

**9**.* На плоскости даны четыре точки $A, B, C, D$. Для каких точек $O$ найдутся такие неотрицательные числа $\lambda, \mu, \nu, \varkappa$, что $\lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC} + \varkappa\overrightarrow{OD} = 0$?

**10.** Для каждой из сторон многоугольника построили перпендикулярный ей вектор, направленный вовне многоугольника и по длине равный этой стороне. Доказать, что сумма этих векторов равна 0.

**11**.* Для каждой из граней многогранника построили перпендикулярный ей вектор, направленный вовне многогранника и по длине равный площади этой грани. Доказать, что сумма этих векторов равна 0. (Указание: задача имеет физический смысл.)

До сих пор мы говорили о векторах на плоскости и в пространстве. Дадим теперь общее определение. *Векторное пространство* — это множество $V$, элементы которого называют *векторами*. В нём выделен *нулевой вектор* $0$ и определены операции сложения $(+)$ и умножения на действительное число. Эти операции должны обладать такими свойствами ($x, y, z \in V$, $\lambda, \mu$ — числа):

(i) $(x + y) + z = x + (y + z)$;



(ii) $x + y = y + x$;

(iii) $x + 0 = x$;

(iv) для любого вектора $x$ существует такой вектор $y$, что $x + y = 0$ (*противоположный* вектор);

(v) $1 \cdot x = 1$;

(vi) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

(vii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

(viii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

**12.** (Следствия из аксиом) Доказать, что (**а**) $\lambda \cdot 0 = 0$ (здесь 0 обозначает нулевой вектор); (б) если $\lambda \neq 0$ и $x \neq 0$, то $\lambda x \neq 0$; (**в**) если сумма любых 5 из данных 7 векторов равна 0, то все векторы равны 0.

**13.** Многочлены образуют векторное пространство (с естественными операциями сложения и умножения на число). Что будет, если ограничить рассмотрение (а) многочленами степени не более 10? (б) многочленами степени ровно 10? (**в**) многочленами, имеющими корень 1? (г) многочленами, имеющими действительный корень?

**14.** Последовательности образуют векторное пространство. Что будет, если ограничить рассмотрение (а) сходящимися последовательностями? (б) сходящимися к 1 последовательностями? (**в**) сходящимися к 0 последовательностями? (**г**) ограниченными последовательностями? (д) возрастающими последовательностями? (е) последовательностями, у которых ряд из квадратов сходится?

*Линейной комбинацией* векторов $v_1, \ldots, v_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ называется вектор $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Говорят, что вектор $v$ *линейно выражается* через $v_1, \ldots, v_n$, если он представим в виде их линейной комбинации. Множество всех таких векторов называется *линейной оболочкой* векторов $v_1, \ldots, v_n$.

**15.** Закончить фразу: система линейных уравнений (относительно $x, y, z$)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда вектор ... линейно выражается через векторы ...

**16.** Как выглядит линейная оболочка двух векторов в трёхмерном пространстве?

**17.** Доказать, что линейная оболочка векторов $v, w$ совпадает с линейной оболочкой векторов $v - w, v + w$.

**18.** Проверить следующие полезные (хотя и простые) свойства линейной оболочки: (а) если в системе $x_1, \ldots, x_n$ заменить какой-либо вектор $x_i$ на вектор $x_i + \lambda x_j$ (для каких-то $j$ и $\lambda$), то линейная оболочка системы не изменится; (б) если линейная оболочка векторов $x_1, \ldots, x_n$ содержит вектор $y$, то она совпадает с линейной оболочкой векторов $x_1, \ldots, x_n, y$.

**19.** Найти линейную оболочку векторов $1$, $(x-1)$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$ в пространстве многочленов.

**20.** (Продолжение) Тот же вопрос для $1$, $(x-1)$, $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x-2)(x-3)$.

**21.** Функции на прямой образуют векторное пространство. (а) Лежит ли функция $\sin x$ в линейной оболочке функций $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots$? (б) Тот же вопрос про функцию $\sin^2 x$.

**22.*** (Продолжение) Тот же вопрос про функцию $\sin^k x$ при произвольном $k$.

Набор векторов называется *линейно зависимым*, если если некоторая нетривиальная их линейная комбинация (не все коэффициенты нулевые) равна $0$. В противном случае набор называется *линейно независимым*.

**23.** (а) В каком случае три вектора на плоскости линейно зависимы? (б) В каком случае три вектора в пространстве линейно зависимы?

**24.** (а) Доказать, что набор векторов линейно зависим в том и только том случае, когда один из векторов линейно выражается через остальные. (б) Можно ли в предыдущем утверждении заменить слова «один из векторов» на «первый вектор»?

**25.** Доказать, что векторы $x, y$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда векторы $x+2y$ и $2x+y$ линейно зависимы.



**26.** Закончить фразу: система линейных уравнений (относительно $x, y, z$)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда векторы ...

**27.** (а) Доказать, что векторы задачи 19 линейно независимы. (б) Доказать, что векторы задачи 20 линейно независимы.

*Координатное векторное пространство* $\mathbb{R}^n$ состоит из $n$-ок чисел с покоординатным сложением и умножением на число.

**28.** При каких $a$ строки матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & a \end{pmatrix}$$

линейно зависимы?

**29.** (Продолжение) При каких $a$ столбцы этой матрицы линейно зависимы?

**30.*** Имеется три литровых банки, заполненных на три четверти тремя разными красками (каждая — своей). Разрешается переливать краску из одной банки в другую, не переливая через край и тщательно перемешивая смесь. Так можно повторять многократно. Наша цель — получить смесь, в которую все три краски входят поровну. (а) Можно ли получить такую смесь во всех банках после конечного числа операций? (б) Можно ли получить такую смесь в одной из банок после конечного числа операций?

**31.*** Дано $n$ различных чисел $c_1, \ldots, c_n$. Доказать, что функции $\exp(c_1x), \ldots, \exp(c_nx)$ линейно независимы.

**32.*** Доказать, что функции $\cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx$ линейно независимы.

33. Доказать, что строки матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

линейно независимы, если все три числа $a, b, c$ разные.

34.* (Продолжение) Тот же вопрос для столбцов этой матрицы.

35.* (Продолжение) Как обобщить это утверждение на матрицы большего размера?

36.* Доказать, что строки матрицы

$$\begin{pmatrix} a^x & b^x & c^x \\ a^y & b^y & c^y \\ a^z & b^z & c^z \end{pmatrix}$$

линейно независимы, если среди положительных чисел $a, b, c$ и среди произвольных действительных чисел $x, y, z$ нет одинаковых.

37.* Доказать, что максимальное число линейно независимых строк в матрице равно максимальному числу линейно независимых столбцов. (Следовательно, если в матрице $n \times n$ строки независимы, то и столбцы независимы, и наоборот.)

## Базисы и размерности

Векторы $x_1, \ldots, x_n$ образуют *базис* в пространстве $V$, если они линейно независимы и порождают $V$ (через них линейно выражается любой вектор пространства).

1. Доказать, что в этом случае любой вектор единственным образом представим как линейная комбинация базисных.

2. Доказать, что базис можно эквивалентно определить как (а) максимальную линейно независимую систему векторов (становящуюся линейно зависимой при добавлении любого вектора); (б) минимальную систему, порождающую всё пространство (если удалить любой вектор, линейная оболочка перестанет совпадать со всем $V$).

3. Указать базис в пространстве (а) $\mathbb{R}^n$, элементами которого являются наборы чисел длины $n$ (с покоординатным



сложением и умножением на число); (б) многочленов степени не выше $n$; (в) наборов чисел длины $n$, у которых сумма равна нулю; (г) многочленов степени не выше $n$, имеющих корень 1.

### *Любые два базиса одного пространства имеют поровну элементов*

Это утверждение удобно доказывать в такой форме: если вектора $y_1, \ldots, y_k$ выражаются через $x_1, \ldots, x_n$ и $k > n$, то эти $k$ векторов линейно зависимы.

4. Доказать это утверждение, используя такой факт: однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение, если неизвестных больше, чем уравнений.

Другой вариант доказательства: если в выражениях векторов $y_1, \ldots, y_k$ через $x_1, \ldots, x_n$ не встречается $x_1$, можно воспользоваться индукцией по $n$. Если же $x_1$ встречается, скажем, в выражении для $y_1$, то вектора $y_2 - c_2 y_1, \ldots, y_k - c_k y_1$ при подходящих $c_2, \ldots, c_k$ выражаются через $x_2, \ldots, x_n$, и снова можно воспользоваться предположением индукции.

5.* Провести это рассуждение полностью.

Ещё один вариант состоит в применении «леммы Штейница о замене»: если векторы $y_1, \ldots, y_i$ линейно независимы и выражаются через $x_1, \ldots, x_k$, то можно заменить какие-то $i$ векторов среди $x_1, \ldots, x_k$ на $y_1, \ldots, y_i$, не изменив линейной оболочки.

6.* Доказать это утверждение (индукция по $i$) и вывести из него утверждение об одинаковом числе элементов в любых двух базисах.

7. Пространство $V$ имеет базис из $n$ элементов. Доказать, что любые $n + 1$ векторов в нём линейно зависимы.

8. Доказать, что для произвольного векторного пространства $V$ выполнено одно из двух условий: (1) $V$ имеет конечный базис, и все его базисы имеют равное число элементов; (2) в $V$ можно указать бесконечную систему линейно независимых векторов.

В первом случае число векторов в базисе называется *размерностью* пространства $V$ (обозначается $\dim V$). Во втором случае пространство называют *бесконечномерным*.

**9.** Доказать, что размерность можно эквивалентно определить как максимальное число линейно независимых векторов или как минимальное число векторов, линейная оболочка которых есть всё пространство.

**10.** Рассмотрим пространство «фибоначчиевых последовательностей», в котором каждый член равен сумме двух предыдущих. Какова его размерность? Указать какой-либо базис в этом пространств (приведя явные формулы для образующих этот базис последовательностей)

**11.*** (Продолжение) Тот же вопрос для пространства последовательностей, в которых (а) $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$; (б) $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n$; (в) $x_{n+3} = 2x_{n+2} - x_{n+1} + 2x_n$.

**12.** «Магическим квадратом» называют квадратную таблицу, заполненную числами, в которой суммы по всем столбцам, всем строкам и двум диагоналям равны. Магические квадраты данного размера образуют векторное пространство. Найти размерность этого пространства и указать базис для квадратов $2 \times 2$ и $3 \times 3$.

**13.*** Найти размерность пространства магических квадратов размера $n \times n$.

**14.*** Доказать, что пространство непрерывных функций на прямой, имеющих период 1, бесконечномерно.

Пусть $V$ — векторное пространство. Подмножество $W \subset \subset V$ называется *подпространством* пространства $V$, если вместе с любыми двумя векторами $x, y$ оно содержит их сумму $x + y$, и вместе с любым вектором $x$ содержит векторы $\lambda x$ для всех чисел $\lambda$. (В этом случае $W$ можно рассматривать как векторное пространство с теми же операциями сложения и умножения на число.)

**15.** Какие подпространства бывают в (обычном) трёхмерном пространстве?

**16.** Существует ли подпространство в $\mathbb{R}^3$, содержащее векторы $\langle 1, 2, 3\rangle$ и $\langle 4, 5, 6\rangle$, но не содержащее вектор $\langle 7, 8, 9\rangle$?

**17.** Доказать, что для любых чисел $a_1, \ldots, a_n$ множество решений линейного однородного уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$ образует подпространство пространства $\mathbb{R}^n$.



Какова размерность этого подпространства?

**18.** Рассмотрим в пространстве многочленов степени не выше $n$ подпространство, образованное многочленами $P$, для которых $P(1) = 0$ и $P'(1) = 0$. Какова размерность этого подпространства?

**19.** Рассмотрим в пространстве многочленов степени не выше 10 подпространство, состоящее из многочленов $P$, делящихся без остатка на многочлен $x^5+x+1$. Какова размерность этого подпространства?

**20.** (а) Образуют ли периодические функции подпространство в пространстве всех функций с действительными аргументами и значениями? (б) Образуют ли периодические последовательности подпространство в пространстве всех последовательностей?

**21.** Пусть $W_1$ и $W_2$ — подпространства некоторого пространства $W$. Можно ли утверждать, что (а) их пересечение $W_1 \cap W_2$; (б) их объединение $W_1 \cup W_2$; (в) их сумма $W_1+W_2$, состоящая из всех сумм вида $w_1+w_2$ (где $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$), будут подпространствами?

**22.** Пусть $W$ — подпространство конечномерного пространства $V$. Доказать, что любой базис в пространстве $W$ можно дополнить до базиса в пространстве $V$. Вывести отсюда, что $\dim W \leqslant \dim V$ и равенство возможно, лишь если $V = W$.

**23.** Какова максимально возможная длина возрастающей цепочки подпространств $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_k$ (все пространства различны) в $n$-мерном пространстве? Указать какую-либо цепочку максимальной длины в $\mathbb{R}^4$.

**24.** Говорят, что пространство $V$ является *прямой суммой* своих подпространств $W_1$ и $W_2$, если их пересечение $W_1 \cap W_2$ содержит только нулевой вектор, а сумма $W_1 + W_2$ равна всему $V$. (а) Доказать, что в этом случае всякий вектор из $V$ единственным образом представляется в виде суммы $w_1 + w_2$ (где $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$). (б) Доказать, что в этом случае $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$.

**25.*** (Продолжение) Определить понятие прямой суммы трёх подпространства и доказать аналогичное утверждение.

26. Доказать, что пространство всех функций с действительными аргументами и значениями есть прямая сумма подпространства чётных функций и подпространства нечётных функций. (Функция $f$ называется *чётной*, если $f(-x) = f(x)$ при всех $x$, и *нечётной*, если $f(-x) = -f(x)$ при всех $x$.)

27. Доказать, что для произвольных подпространств $W_1$ и $W_2$ пространства $W$ выполнено равенство

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

28.* Как написать аналогичное равенство для трёх подпространств?

29.* Пусть $A, B, C$ — три подпространства одного пространства. Доказать, что

$$\dim A + \dim(A + B + C) \leqslant \dim(A + B) + \dim(A + C).$$

## Программа экзамена

1. Малая теорема Ферма. Теорема Вильсона.
2. Теорема Брианшона (доказательство с помощью гиперболоида).
3. Формула для чисел Фибоначчи с помощью производящих функций.
4. Теорема Кантора–Бернштейна.
5. Описание всех пифагоровых троек.
6. Системы линейных уравнений: если неизвестных больше, чем уравнений, то у системы есть ненулевое решение.
7. Основная теорема алгебры («Дама с собачкой»).
8. Кососимметрические формы в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$: ориентированная площадь и ориентированный объём.
9. Векторное произведение и его свойства.
10. Индукция и фундированные множества.
11. Основная теорема о симметрических многочленах.
12. Конечные поля. Мультипликативная группа конечного поля.
13. Последовательности. Ограниченные последовательности. Предел последовательности и его свойства.



14. Аксиома полноты. Теорема о вложенных отрезках, фундаментальные последовательности.
15. Ряды и их сходимость. Абсолютно сходящиеся ряды.
16. Непрерывные функции и их свойства.
17. Предел функции и его свойства. Первый замечательный предел.
18. Асимптотические обозначения.
19. Число $e$. Экспонента и логарифм, второй замечательный предел.
20. Производная и её свойства.
21. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа. Формула Тейлора.
22. Многочлены с одной переменной. Основная теорема алгебры и её следствия.
23. Корни многочленов с целыми коэффициентами.
24. Перестановки, разложение на циклы. Чётные и нечётные перестановки.
25. Группы, подгруппы. Теорема Лагранжа.
26. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость. Подпространства.
27. Базисы и размерности векторных пространств.

# Задачи 1999 – 2000 года

Задачи последнего года охватывают, вместе с теорией интегрирования, довольно трудные темы (начала теории групп, колец и полей, метрические пространства и компактность, начала теории вероятностей, основы теории меры), которые принято относить к «высшей математике». Последний листок («Разное») содержит трудные задачи на разные темы.

## Производная: разные задачи

**1.** Найти производную функции $x \ln x - x$.

**2.** Найти производную функции $\ln((1+x)/(1-x))$.

**3.** Найти производную функции $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

**4.** Найти производную функции

$$\frac{1}{3}\ln\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}$$

(ответом будет рациональная функция от $x$).

**5.** Доказать, что производная чётной функции нечётна и наоборот.

**6.** Доказать, что производная периодической функции также периодична. Верно ли обратное?

**7.** Функция $f$ дифференцируема на всей прямой и периодична (имеет период, то есть такое число $T$, что $f(x+T) = f(x)$ для всех $x$). Доказать, что $f'$ обращается в нуль в бесконечном числе точек.

**8.*** Функция $f$ определена и дифференцируема на всей прямой, причём $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Показать, что производная функции имеет не менее $n+1$ нулей, если функция $f$ имеет не менее $n$ нулей.

**9.** Сформулировать и доказать утверждение, связывающее кратность корня многочлена с обращением в нуль его производных.

**10.** (**а**) Найти наименьшее значение выражения $x + 1/x$ при $x > 0$. (**б**) Тот же вопрос для выражения $x+10/x$. (**в**) Тот же вопрос для выражения $x^{10} + 1/x$.



**11.** Как решить предыдущую задачу с использованием неравенства о среднем арифметическом и геометрическом?

**12.** Найти число решений уравнения $x^3 - x = a$ (в зависимости от значения параметра $a$).

**13.** Какие значения принимает $x^3 - 4x$ при $-1 < x < 2$?

**14.** Найти наибольшее значение выражения $\frac{x}{e^x}$ при $x \geqslant 0$.

**15.*** Каково максимально возможное число точек пересечения прямой с графиком $y = x^5$?

**16.** Доказать, что $e^x \geqslant 1 + x$ при всех $x$.

**17.*** Решить неравенство $e^x \geqslant 1 + x + x^2/2$.

**18.** Доказать, что $\ln(1+h) \leqslant h$ при всех $h > -1$.

**19.** Доказать, что $\ln(1+h) > h - h^2/2$ при всех $h > 0$.

**20.** Доказать по очереди такие неравенства (при $x \geqslant 0$): $\cos x \leqslant 1$; $\sin x \leqslant x$; $\cos x \geqslant 1 - x^2/2$; $\sin x \geqslant x - x^3/6$; $\cos x \leqslant 1 - x^2/2 + x^4/24$. Как продолжить эту последовательность?

**21.** Доказать, что $x \ln x \geqslant x - 1$ при $x \geqslant 1$.

**22.*** Доказать, что величина $(1 + 1/x)^{x+1}$ убывает с ростом $x$ (при $x > 0$).

**23.*** Доказать, что величина $(1 + 1/x)^x$ возрастает с ростом $x$ (при $x > 0$).

**24.*** Доказать, что $\sin x > (2/\pi)x$ при $0 < x < \pi/2$.

**25.*** Рассмотрим семейство кривых (гипербол) $xy = c$ (каждому значению параметра $c$ соответствует своя кривая). (**а**) Показать, что при повороте на $45°$ эти кривые переходят в кривые семейства $x^2-y^2 = c$. (**б**) Показать, что кривые двух этих семейств, проходящие через одну точку, пересекаются под прямым углом (касательные перпендикулярны).

**26.** Неравенство Бернулли $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ при неотрицательном $x$ и целом неотрицательном $n$ очевидно (раскрываем скобки). Выяснить, для каких ещё пар $(x, n)$ оно верно (предполагаем, что $x > -1$, чтобы возведение в степень имело смысл).

**27.*** Положительные числа $p$ и $q$ таковы, что $1/p + 1/q = 1$ (например, так будет при $p = q = 2$). Показать, что $xy \leqslant x^p/p + y^q/q$ для любых $x, y > 0$.

**28.*** Выражение $f'(x)/f(x)$ иногда называют «логарифмической производной» функции $f$ в точке $x$. Чем объясняется такое название?

**29.** Многочлен $P$ и все его производные положительны в некоторой точке $a \in \mathbb{R}$. Доказать, что все действительные корни многочлена $P$ меньше $a$.

**30.*** Верно ли аналогичное утверждение для произвольной бесконечно дифференцируемой функции (функции, имеющей производные всех порядков), определённой на всей действительной прямой?

**31.*** Параболы $y = x^2 + c$ и $x = y^2 + d$ при некоторых значениях $c$ и $d$ имеют единственную общую точку $(x, y)$. Показать, что эта точка лежит на гиперболе $xy = 1/4$.

**32.*** По плоскости движется точка; её координаты в момент времени $t$ равны $(x(t), y(t))$. При этом вектор скорости $(x'(t), y'(t))$ в каждый момент времени $t$ перпендикулярен радиус-вектору $(x(t), y(t))$. Доказать, что точка движется по окружности.

**33.*** Тело массы $m$ движется по прямой в силовом поле с потенциалом $U$ (другими словами, $U$ — дифференцируемая функция и $-U'(x)$ есть сила, действующая в точке $x$). Тогда по второму закону Ньютона для координаты $x(t)$ тела в момент времени $t$ можно написать уравнение: $x''(t) = -U'(t)/m$. Доказать закон сохранения энергии: величина $U(x(t)) + m(x'(t))^2/2$ постоянна.

**34.*** На горизонтальной плоскости лежит тело веса $P$, коэффициент трения равен $k$. Под каким углом к горизонту надо его тянуть, чтобы сдвинуть его было легче всего? Какая сила при этом потребуется?

**35.*** Точка $(x(t), y(t))$ движется по плоскости. Что можно сказать о её движении, если вектор скорости $(x'(t), y'(t))$ при всех $t$ перпендикулярен вектору ускорения $(x''(t), y''(t))$?

**36.*** Функция $f$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и дважды дифференцируема внутри него, при этом $f(0) = f(1) = 0$ и $f(x) = 1$ для некоторой точки $x \in (0, 1)$. Доказать, что $|f''(y)| \geqslant 4$ для некоторой точки $y \in (0, 1)$.



**37.*** Функция $f$ определена и дифференцируема на интервале $(1, +\infty)$, причём $|f'(x)| \leqslant 1/x^2$. (а) Можно ли утверждать, что существует предел $f(x)$ при $x \to \infty$? (б) Тот же вопрос, если $|f'(x)| \leqslant 1/x$.

## Многогранники

**1.** Нарисовать многогранник (а) с 5 вершинами и 6 гранями; (б) с 5 вершинами и 5 гранями.

**2.** Бывает ли многогранник, у которого 1998 треугольных граней?

**3.** (Продолжение) ...1997 треугольных граней?

**4.** Нарисовать *правильные многогранники*, то есть многогранники, все грани которых — правильные многоугольники с одинаковым числом сторон, и в каждой вершине сходится одинаковое число граней. (Их пять: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр; что означает «эдр» в их названиях?)

**5.** Нарисовать вид каждого из правильных многогранников из точки, близкой к центру одной из граней и находящейся вне многогранника. (Одну грань вскрыли и смотрим через неё внутрь; что мы увидим?)

**6.** От вершины многогранника отрезали маленькую пирамидку. Как изменится число его вершин, рёбер и граней? Что произойдёт с величиной $В + Г - Р$?

**7.** В многограннике все грани — треугольники. Как связаны число граней и число рёбер?

**8.** В многограннике в каждой вершине сходятся три ребра. Как связаны число вершин и число рёбер?

**9.** Как меняется величина $В + Г - Р$, если разрезать многоугольные грани многогранника на треугольники?

**10.** Футбольный мяч склеен из шестиугольников и пятиугольников, в каждой вершине сходятся по три куска. Сколько пятиугольников использовано? Почему это число не зависит от способа склейки?

* * *

11. Все грани многогранника — правильные многоугольники с одинаковым числом сторон, но многогранник не правильный. Может ли так быть?

**12.** Доказать, что в любом выпуклом многограннике есть две грани с одинаковым числом сторон.

**13.** Многогранник (пустой внутри) разрезали на отдельные грани и послали по почте, а потом склеили. Мог ли получиться многогранник другой формы?

**14.** Найти все «топологически правильные» выпуклые многогранники (у которых все грани имеют одинаковое число сторон и в каждой вершине сходится одно и то же число рёбер).

**15.** Существует общая теорема о том, что для всякого выпуклого многогранника есть *двойственный* к нему, у которого столько же граней, сколько у исходного вершин, столько же вершин, сколько у исходного граней, и столько же рёбер, сколько у исходного. Нарисовать двойственные для известных вам выпуклых многогранников. Как влияет переход к двойственному многограннику на величину $В + Г - Р$?

**16.** Внутри многоугольника с $n$ сторонами взято $k$ точек и проведены отрезки, разбивающие его на $t$ меньших многоугольников с вершинами в выбранных точках; число их сторон обозначим через $n_1, n_2, \ldots, n_t$. Подсчитать сумму всех углов этих многоугольников двумя способами (группируя их по многоугольникам и по вершинам). Подсчитать число рёбер всех многоугольников. Вывести отсюда формулу $В + Г - Р = 1$ для такой картинки.

**17.** Доказать формулу $В + Г - Р = 1$ для сети многоугольников, разрезав их на треугольники и удаляя треугольники один за другим.

**18.** Чему равно число $В + Г - Р$ для многогранного бублика?

**19.** Мы хотим раскрасить грани многогранника в два цвета так, чтобы соседние грани были разного цвета. Для каких из известных вам многогранников это возможно, а для каких нет? Когда вообще это возможно? (Критерий придумать просто, строго доказать труднее.)

**20.** Мы хотим раскрасить вершины многогранника с треугольными гранями в три цвета так, чтобы соседние вершины (концы любого ребра) были разного цвета. Для каких из известных вам многогранников это возможно, а для каких нет? Когда вообще это возможно? (Критерий придумать просто, строго доказать труднее.)

**21.** Гористый остров в море имеет несколько вершин (во все стороны спуск), котловин (во все стороны подъём) и перевалов (в одном направлении спуск, в другом подъём). Как выглядят вершины, котловины и перевалы на карте, где проведены «горизонтали» (линии равной высоты)? Для числа вершин, котловин и перевалов



есть формула, аналогичная формуле Эйлера. Что это за формула? Как вывести из неё формулу Эйлера?

## Выпуклые функции

Функция $f$, определённая на промежутке (отрезке, интервале, луче, всей прямой) и принимающая действительные значения, называется *выпуклой вниз*, если её график на любом отрезке $[a, b]$, входящем в область определения, лежит не выше хорды $(a, f(a)) - (b, f(b))$. Аналогично определяется понятие *выпуклости вверх*.

**1.** Какие из изображённых на графиках функций (см. рис. 26) являются выпуклыми вниз (вверх)?

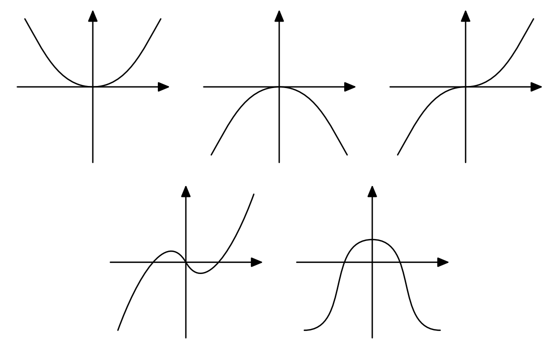

Рис. 26

**2.** Разбить области определения функций из предыдущей задачи на участки так, чтобы на каждом участке функция была выпукла вверх или вниз.

**3.** Функция $f$ выпукла вниз. Доказать, что для любых чисел $a$ и $b$ из её области определения выполнено неравенство $f((a+b)/2) \leqslant (f(a)+f(b))/2$. (Указание: каков геометрический смысл этого неравенства?)

**4.** (Продолжение) Тот же вопрос для неравенства

$$f\left(\tfrac{1}{3}a + \tfrac{2}{3}b\right) \leqslant \tfrac{1}{3}f(a) + \tfrac{2}{3}f(b).$$

**5.** (Продолжение) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для $f(\alpha x + \beta y)$ при $\alpha, \beta \geqslant 0$ и $\alpha + \beta = 1$.

**6.** (Продолжение) Доказать, что неравенство предыдущей задачи можно считать (эквивалентным) определением выпуклости.

**7.*** Доказать, что всякая выпуклая (вниз или вверх) функция, определённая на интервале, непрерывна во всех точках этого интервала. Верно ли аналогичное утверждение для отрезка?

**8.** Будем называть (*средней*) *скоростью изменения* функции $f$ на отрезке $[a, b]$ отношение $(f(b)-f(a))/(b-a)$. (Геометрический смысл: угловой коэффициент хорды.) Пусть функция $f$ выпукла вниз и определена в точках $a, b, c$, причём $a \leqslant b \leqslant c$. Показать, что скорость изменения $f$ на отрезке $[a, b]$ не больше скорости изменения $f$ на отрезке $[b, c]$. (Указание: скорость изменения на отрезке $[a, c]$ находится между ними.)

**9.** Показать, что утверждение предыдущей задачи можно считать (эквивалентным) определением выпуклости.

**10.** Доказать, что функция $x \mapsto x^2$ выпукла вниз. (Указание: удобно воспользоваться предыдущей задачей.)

**11.*** (**а**) Функция $f$ выпукла вниз и всюду положительна. Можно ли утверждать, что функция $x \mapsto (f(x))^2$ выпукла вниз? (**б**) Можно ли утверждать, что эта функция выпукла вверх, если $f$ выпукла вверх?

**12.*** Доказать, что композиция двух выпуклых вниз [вверх] возрастающих функций выпукла вниз [вверх].

**13.** В последовательности $a_0, a_1, a_2, a_3$ каждый член (кроме крайних) не больше среднего арифметического двух соседей. Доказать, что $a_2 \leqslant \frac{2}{3}a_3 + \frac{1}{3}a_0$.

**14.** В последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ каждый член (кроме крайних) не больше среднего арифметического двух соседей. Доказать, что если крайние члены равны нулю, то все промежуточные отрицательны или равны нулю.

**15.*** Функция $f$ определена на некотором промежутке, и при этом $f((x+y)/2) \leqslant \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$ для любых $x$ и $y$. Доказать, что (**а**) $f(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y) \leqslant \frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}f(y)$; (**б**) $f(\alpha x+\beta y) \leqslant \alpha f(x) + \beta f(y)$ при любых рациональных $\alpha, \beta \geqslant 0$, для которых $\alpha + \beta = 1$. (**в**) Показать, что если $f$ к тому же непрерывна, то она выпукла вниз. (Для разрывных функций это может быть неверно; довольно экзотический пример строится с помощью так называемого «базиса Гамеля».)



**16.** Доказать, что если выпуклая вниз функция дифференцируема, то её производная является неубывающей функцией. (Указание: если $a < b$, то $f'(a)$ и $f'(b)$ разделены средней скоростью изменения функции на $[a, b]$.)

**17.** Доказать, что если функция $f$ дифференцируема и $f'$ является неубывающей функцией, то $f$ выпукла вниз. (Указание: по теореме Лагранжа средняя скорость изменения есть производная в промежуточной точке.)

**18.** Доказать, что для дважды дифференцируемых функций выпуклость вниз [вверх] равносильна неотрицательности [неположительности] второй производной. (Мнемоническое правило: если в график можно залить воду, вторая производная имеет знак плюс, если нельзя — минус.)

**19.** На каких отрезках выпуклы вниз и вверх функции (**а**) $e^x$; (**б**) $x^n$; (**в**) $\ln x$; (**г**) $\sin x$; (**д**) $\operatorname{tg} x$? Нарисовать их графики.

**20.** Показать, что график дифференцируемой выпуклой вниз функции лежит выше любой касательной к нему. (Указание: касательная в точке $(a, f(a))$ к графику функции $f$ имеет угловой коэффициент $f'(a)$.)

**21.** Показать, что требование предыдущей задачи (график лежит выше касательной) можно считать (равносильным) определением выпуклости для дифференцируемых функций.

**22.** Доказать с помощью предыдущих задач неравенства $e^x \geqslant 1 + x$ и $\ln x \leqslant x - 1$.

**23.** Известно, что в любой окрестности точки $a$ график дважды дифференцируемой функции $f$ лежит по обе стороны от касательной. (Такие точки называют *точками перегиба*.) Доказать, что $f''(a) = 0$.

**24.** Функция $f$ выпукла вниз. Доказать, что $f\bigl(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z\bigr) \leqslant \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) + \frac{1}{3}f(z)$ для любых точек $x, y, z$.

**25.*** Обобщить утверждение предыдущей задачи на случай $n$ точек и не обязательно равных коэффициентов.

## Линейные операторы

Отображение $\varphi$ векторного пространства $V$ в векторное пространство $W$ называется *линейным*, если

1) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для любых векторов $x, y \in V$;

2) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ для любого вектора $x \in V$ и для любого числа $\lambda$.

Линейные отображения называют также *линейными операторами*.

**1.** (а) Доказать, что линейное отображение переводит нулевой вектор в нулевой. (б) Может ли линейное отображение перевести линейно независимые векторы в зависимые? (в) Может ли линейное отображение перевести линейно зависимые векторы в независимые?

**2.** (а) *Ядром* линейного оператора называют множество всех векторов, которые он отображает в нуль. Доказать, что ядро оператора $\varphi\colon V \to W$ является подпространством пространства $V$. Оно обозначается $\operatorname{Ker}\varphi$. (б) Доказать, что оператор $\varphi$ имеет нулевое ядро тогда и только тогда, когда он является вложением (переводит разные векторы в разные). (в) *Образом* линейного оператора $\varphi\colon V \to W$ называется множество всех его значений. Доказать, что образ является подпространством пространства $W$.

**3.** (а) Доказать, что сумма двух линейных операторов $\varphi, \psi\colon V \to W$ является линейным оператором. (б) Пусть $\varphi\colon U \to V$ и $\psi\colon V \to W$ — линейные операторы. Доказать, что их композиция $\psi\varphi\colon U \to W$, определяемая формулой $\psi\varphi(x) = \psi(\varphi(x))$, является линейным оператором. Что можно сказать про ядро и образ этого оператора? (Его называют также *произведением* операторов $\psi$ и $\varphi$.)

**4.** (а) Линейный оператор $\varphi\colon V \to W$, являющийся взаимно однозначным соответствием между $V$ и $W$, называют *изоморфизмом*. Доказать, что обратное отображение также является изоморфизмом. (б) Доказать, что при изоморфизме базис переходит в базис. (Следствие: пространства имеют одинаковую размерность.) (в) Два пространства, между которыми можно установить изоморфизм, называют *изоморфными*. Доказать, что пространства одинаковой размерности изоморфны. (Указание: выбираем базисы и сохраняем координаты.)



**5.** (а) Пусть $\varphi\colon V \to W$ — некоторый линейный оператор, $w_1, \ldots, w_k$ — базис пространства $\operatorname{Im}\varphi$, а $v_1, \ldots, v_l$ — базис пространства $\operatorname{Ker}\varphi$. Доказать, что векторы $v_1, \ldots, v_l$ вместе с любыми прообразами векторов $w_1, \ldots, w_k$ образуют базис пространства $V$. (б) Вывести отсюда, что $\dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim V$.

**6.** Рассмотрим оператор $D$ дифференцирования в пространстве многочленов степени не больше $n$. Каковы его ядро и образ? Тот же вопрос для его степени $D^k$ ($k$-кратного дифференцирования).

Элементами пространства $\mathbb{R}^n$ являются наборы из $n$ чисел, которые записывают как строки $(x_1, \ldots, x_n)$ или как столбцы $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. При $n = 1$ элементы $\mathbb{R}^n$ — это числа, при $n = 2$ — точки координатной плоскости, при $n = 3$ — точки пространства и т. п.

**7.** (а) Найти общий вид линейного оператора из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$ и из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$. (Указание: такие операторы задаются парой чисел.) (б) Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ отображает векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ в векторы $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. В этом случае таблица $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ называется *матрицей* оператора $\varphi$. Найти образ произвольного вектора $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ для оператора с такой матрицей.

**8.** (а) Доказать, что поворот координатной плоскости вокруг нуля на произвольный угол $\varphi$ является линейным оператором, и найти его матрицу. (б) Доказать, что симметрия координатной плоскости относительно прямой, проходящей через нуль, является линейным оператором. Найти его матрицу для симметрий относительно осей координат и прямой $y = x$.

**9.** Отождествляя $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью, найти матрицу оператора $z \mapsto (a+bi)z$, где $a+bi$ — фиксированное комплексное число.

**10.** Операторы $\varphi, \psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ имеют матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ соответственно. Найти матрицу их композиции $\varphi\psi$.

**11.*** Как получить формулы для косинуса и синуса суммы, используя предыдущие задачи?

**12.** При каких $a, b, c, d$ оператор с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является обратимым? Найти формулу для обратной матрицы (матрицы обратного оператора).

**13.** (а) Оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\varphi^n$ (композиции, или произведения, $n$ экземпляров оператора $\varphi$). (б) Тот же вопрос для оператора с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (в) Тот же вопрос для оператора с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (Указание: в ответ входят числа Фибоначчи.)

**14.*** Существует ли оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, для которого $\varphi^2 = 0$, но $\varphi \neq 0$?

**15.*** Существует ли оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, для которого $\varphi^3 = 0$, но $\varphi^2 \neq 0$?

**16.*** Описать все операторы $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, для которых $\varphi^2 = \varphi$.

**17.** Доказать, что при линейном отображении координатной плоскости в себя прямые переходят в прямые.

**18.*** Имеется линейка-рейсшина, позволяющая проводить прямую через данные две точки, а также проводить прямую, проходящую через данную точку параллельно данной прямой. (а) Можно ли с её помощью разделить отрезок на три равные части? (б) Можно ли с её помощью разделить угол пополам?

**19.*** Взаимно однозначное отображение плоскости на себя переводит прямые в прямые и оставляет на месте начало координат. Доказать, что оно является линейным оператором.

**20.*** Доказать, что образ окружности при линейном преобразовании координатной плоскости имеет ось симметрии.



## Метрические пространства

Пусть $M$ — некоторое множество, элементы которого будем называть *точками*. Говорят, что $M$ является *метрическим пространством*, если для каждой пары точек $x, y \in M$ определено *расстояние* $\rho(x, y)$, причём:

1) $\rho(x, x) = 0$ и $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ при всех $x, y$;

3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ при всех $x, y, z$ (*неравенство треугольника*).

**1.** Доказать, что $\mathbb{R}^n$ становится метрическим пространством, если положить

(а) $\rho(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, \langle y_1, \ldots, y_n\rangle) = \max_{i=1,\ldots,n}(|x_i - y_i|)$;

(б) $\rho(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, \langle y_1, \ldots, y_n\rangle) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|$.

**2.*** Та же задача для *евклидова* расстояния

$$\rho(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, \langle y_1, \ldots, y_n\rangle) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \ldots + |x_n - y_n|^2}.$$

**3.*** При каких $p > 0$ формула

$$\rho(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, \langle y_1, \ldots, y_n\rangle) = \bigl(|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p\bigr)^{1/p}$$

задаёт расстояние в $\mathbb{R}^n$?

**4.*** (а) Образуют ли метрическое пространство прямые (в трёхмерном пространстве), проходящие через данную точку, если расстоянием считать угол между прямыми (меньший из двух, не превосходящий $\pi/2$)? (б) Тот же вопрос для плоскостей, проходящих через данную точку.

*Открытым шаром* радиуса $r > 0$ с центром в точке $x$ метрического пространства $M$ называется множество всех точек $y$, для которых $\rho(x, y) < r$. (Неравенство $\rho(x, y) \leqslant r$ задаёт *замкнутый шар*.)

**5.** (а) Два открытых шара радиуса $1/2$ в некотором метрическом пространстве пересекаются. Можно ли утверждать, что расстояние между их центрами меньше 1? (б) Верно ли обратное?

**6.** Два шара, радиусы которых отличаются в два раза, пересекаются. Доказать, что если увеличить их радиусы втрое (не меняя центров), то один из шаров будет лежать в другом.

7.* Может ли шар большего радиуса лежать внутри шара меньшего радиуса и не совпадать с ним?

**8.** Доказать, что функция $\rho(x, y)$, равная нулю при $x = y$ и единице при $x \neq y$, превращает любое множество $M$ в метрическое пространство. (Такая метрика называется *дискретной*.)

**9.** Пусть $M$ — произвольное метрическое пространство с метрикой $\rho$. Показать, что функция

$$\rho'(x, y) = \min(\rho(x, y), 1)$$

также является метрикой (расстоянием).

**10.** Пусть $M$ — множество всех многоугольников на плоскости. Будет ли функция $\rho(T_1, T_2)$, равная площади симметрической разности $T_1$ и $T_2$, метрикой на этом множестве?

**11.** Определим расстояние между двумя последовательностями из $n$ нулей и единиц как число мест, в которых они отличаются. Например, $\rho(00111, 10101) = 2$. (**а**) Доказать, что эта функция задаёт метрику на множестве $\mathbb{B}^n$ последовательностей нулей и единиц длины $n$. Она называется *метрикой Хэмминга*. (б) Сколько элементов содержит (замкнутый) шар радиуса 1 в метрике Хэмминга? (**в**) Тот же вопрос для шара радиуса 2.

12.* Можно ли указать 100 последовательностей нулей и единиц длины 10, любые две из которых отличались бы по крайней мере в трёх позициях?

13.* Рассмотрим множество бесконечных последовательностей натуральных чисел и определим на нём расстояние $\rho(\langle x_0, x_1, \ldots \rangle, \langle y_0, y_1, \ldots \rangle)$ как $2^{-n}$, где $n$ — номер первой позиции, в которой последовательности различаются. Доказать, что получается метрическое пространство (называемое *пространством Бэра*). (Если рассматривать только последовательности нулей и единиц, получаемое пространство называют *пространством Кантора*.)

**14.** Пусть $X$ — произвольное множество. Рассмотрим множество всех ограниченных функций с действительными значениями, определённых на множестве $X$. Будет ли функция

$$\rho(f, g) = \sup_x |f(x) - g(x)|$$

метрикой?

**15.** Как определить метрику на произведении $n$ метрических пространств $M_1, \ldots, M_n$ по аналогии с различными метриками на $\mathbb{R}^n$?



## Операторы, матрицы, ранг

**1.** Пусть $U$, $V$ — векторные пространства и $u_1, \ldots, u_n$ — базис в $U$. (**а**) Показать, что линейный оператор $\varphi\colon U \to V$ однозначно определяется своими значениями на $u_1, \ldots, u_n$ (если два оператора совпадают на $u_1, \ldots, u_n$, то они равны). (б) Показать, что значения $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)$ могут быть выбраны произвольно: для любых векторов $v_1, \ldots, v_n \in V$ найдётся (единственный) линейный оператор, переводящий $u_i$ в $v_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$.

Пусть $\varphi\colon U \to V$ — линейный оператор. Фиксируем базисы $u_1, \ldots, u_n$ и $v_1, \ldots, v_m$ в пространствах $U$ и $V$. Разложим векторы $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)$ по базису $v_1, \ldots, v_m$ и составим таблицу из $m$ строк и $n$ столбцов ($i$-ый столбец содержит коэффициенты в разложении вектора $\varphi(u_i)$ по базису $v_1, \ldots, v_m$). Эта таблица размера $m \times n$ называется *матрицей оператора $\varphi$ в базисах $u_1, \ldots, u_n$ и $v_1, \ldots, v_m$*.

**2.** Запишем сказанное в виде формулы: если $\|a_{lk}\|$ — матрица оператора $A$ в базисах $u_1, \ldots, u_n$ и $v_1, \ldots, v_m$, то

$$\varphi(u_k) = \sum_l a_{lk} v_l.$$

В каких пределах меняется индекс суммирования $l$ и где в обозначении матричного элемента $a_{lk}$ стоит номер строки, а где — номер столбца?

**3.** Написать формулу для координат $y_1, \ldots, y_m$ вектора $\varphi(u)$ в базисе $v_1, \ldots, v_m$, если вектор $u$ имеет координаты $x_1, \ldots, x_n$ в базисе $u_1, \ldots, u_n$, а оператор $\varphi$ имеет матрицу $\|a_{ij}\|$ в этих базисах.

**4.** Показать, что линейные отображения данного пространства $U$ в данное пространство $V$ сами образуют векторное пространство. Какова его размерность, если $\dim U = n$ и $\dim V = m$?

**5.** Пусть даны три векторных пространства $U, V, W$, в каждом из которых фиксирован базис, и два линейных оператора $\varphi\colon U \to V$ и $\psi\colon V \to W$. Написать формулу для матрицы оператора $\psi\varphi$, выражающую её через матрицы операторов $\psi$ и $\varphi$ в соответствующих базисах.

Операция с матрицами, задаваемая этой формулой, называется *произведением* матриц.

**6.** (а) Как должны соотноситься размеры матриц, чтобы их можно было перемножить? (Напоминаем, что мы пишем слева матрицу оператора, который применяется вторым.) (б) Будет ли произведение матриц ассоциативно? (в) Будет ли произведение матриц коммутативно?

**7.*** (а) Показать, что произведение двух матриц, имеющих вид $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, снова является матрицей такого вида. (б) Показать, что произведение двух матриц, имеющих вид $\begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix}$, снова является матрицей такого вида.

**8.** Указать *единичную* матрицу $E$ размера $n \times n$, для которой $EA = A$ и $BE = B$ для любых матриц $A$ и $B$ соответствующих размеров.

Из матрицы $A$ размера $m\times n$ можно получить матрицу $A^{T}$ размера $n \times m$ с помощью *транспонирования*: $(A^{T})_{ij} = A_{ji}$ (симметрия относительно главной диагонали, при которой строки становятся столбцами и наоборот).

**9.** Закончить (и доказать) утверждение: $(AB)^{T} = \ldots$

**10.*** (а) Обычный способ умножения матриц $2 \times 2$ требует 8 умножений (и некоторого количества сложений). Придумать способ обойтись 7 умножениями (и произвольным количеством сложений и вычитаний). (Указание. Аналогичная, но более простая задача — вычислить $(a+bi)(c+di)$ за три умножения. Она решается так: вычислим $ac$, $bd$ и $(a+b)(c+d)$.) (б) Как, используя этот способ, умножить матрицы $4\times 4$, сделав 49 умножений (вместо 64 по обычной формуле)?



**11.** Пусть $\varphi\colon U \to V$ — линейный оператор, являющийся изоморфизмом линейных пространств (в частности, $\dim U = \dim V$). Показать, что его матрица $F$ (при любом выборе базисов в $U$ и $V$) будет *обратимой*: найдётся такая матрица $G$, что $FG = GF = E$, где $E$ — единичная матрица.

**12.** (а) Квадратная матрица $A$ имеет левую обратную: $BA = E$. Показать, что матрица $B$ является и правой обратной: $AB = E$. (б) Показать, что любая правая обратная будет и левой обратной.

**13.*** Верны ли аналогичные утверждения для неквадратных матриц?

Обратную к $A$ матрицу обозначают $A^{-1}$.

**14.** Доказать, что произведение двух обратимых матриц $A$ и $B$ является обратимой матрицей. Как найти $(AB)^{-1}$, зная $A^{-1}$ и $B^{-1}$?

**15.** Произведение двух матриц размера $n \times n$ обратимо. Можно ли утверждать, что оба сомножителя обратимы?

**16.** Какие матрицы размера $m \times n$ можно представить в виде произведения матрицы размера $m \times 1$ и матрицы $1 \times n$?

**17.** (а) Что произойдёт с матрицей оператора $\varphi\colon U \to V$, если переставить в базисе $u_1, \ldots, u_n$ пространства $U$ вектора с номерами $i$ и $j$? (б) Тот же вопрос для перестановки двух векторов в базисе пространства $V$. (в) Тот же вопрос, если вектор $u_i$ заменить на $u_i + \lambda u_j$, где $\lambda$ — некоторое число. (г) Тот же вопрос для замены $v_i \to v_i + \lambda v_j$.

**18.** (а) Дан произвольный оператор $\varphi\colon U \to V$. Показать, что можно выбрать базисы в пространствах $U$ и $V$, при которых матрица оператора имеет такой вид: $\varphi_{11} = \ldots = \varphi_{ss} = 1$ при некотором $s \leqslant \min(\dim U, \dim V)$, а все остальные элементы матрицы равны нулю. (б) Показать, что число $s$ однозначно определяется оператором $\varphi$ (не зависит от выбора базисов, в которых матрица имеет указанный вид).

**19.** *Элементарными преобразованиями* матрицы называют перестановку строк, умножение строки на ненулевое число, прибавление к строке другой строки, умноженной на некоторое число, а также аналогичные действия со столбцами. (а) Можно ли указать последовательность элементарных преобразований, переводящих матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ в матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$? (б) Можно ли указать последовательность элементарных преобразований, переводящих матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ в матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

**20.** Показать, что элементарное преобразование матрицы представляет собой её умножение на некоторую матрицу слева или справа. Описать эти матрицы (называемые *элементарными*).

**21.** Показать, что всякая обратимая матрица может быть представлена в виде произведения элементарных матриц.

**22.** Обосновать следующий способ нахождения обратной матрицы к данной матрице $A$: выполняют элементарные преобразования над строками матрицы $A$, приводя её к единичной (почему это возможно?) и одновременно делают те же операции над строками единичной матрицы; то, что получится, и будет $A^{-1}$.

**23.*** (Продолжение) Можно ли при вычислении обратной матрицы способом предыдущей задачи использовать попеременно элементарные преобразования строк и столбцов?

**24.** Показать, что любую матрицу можно привести элементарными преобразованиями к указанному в задаче 18 виду.

**25.*** Сколько существует неэквивалентных матриц размера $m \times n$, если считать эквивалентными матрицы, получаемые друг из друга элементарными преобразованиями? (Заметим, что обратное к элементарному преобразованию также элементарно.)

**26.*** На плоскости расположены три точки, не лежащие на одной прямой: неподвижная точка $O$ и две подвижные точки $A$ и $B$. За один шаг разрешается сдвинуть точку $A$ параллельно прямой $OB$ или точку $B$ параллельно прямой $OA$. Описать все конфигурации, которые можно получить из данной такими действиями.



**27.** Пусть $\varphi\colon U \to V$ — линейный оператор, а $F$ — его матрица (в некоторых базисах). Показать, что размерность пространства $\operatorname{Im}\varphi$ равна максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы $A$. Это число называют *рангом* оператора $\varphi$ (и матрицы $A$).

**28.** Доказать, что ранг композиции операторов (и произведения матриц) не больше наименьшего из рангов сомножителей, а ранг суммы операторов (матриц) не больше суммы рангов слагаемых.

**29.** Показать, что ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях, выполняемых над её строками и столбцами.

**30.** Используя предыдущую задачу и задачу 24, показать, что у любой матрицы максимальное число линейно независимых столбцов («столбцовый ранг») равно максимальному число линейно независимых строк («строчный ранг»).

**31.** Показать, что ранг матрицы не меняется при транспонировании.

**32.*** Какие матрицы размера $m \times n$ представимы в виде произведения матриц размеров $m \times k$ и $k \times n$? (Числа $m$, $n$ и $k$ фиксированы.)

**33.*** Используя предыдущую задачу, решить задачу 31.

**34.*** Показать, что ранг матрицы равен минимальному числу слагаемых в её разложении в сумму матриц ранга 1.

**35.** Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f \end{cases}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ этой системы равен рангу её *расширенной матрицы* $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. (Это простое наблюдение легко обобщается на системы с любым числом уравнений и неизвестных и называется *теоремой Кронекера–Капелли.*)

**36.*** Показать, что ранг произвольной матрицы $A$ равен размеру наибольшей обратимой квадратной матрицы, которую можно получить из $A$ вычёркиванием некоторых строк и столбцов.

## Сходимость, открытые и замкнутые множества

**1.** Дать определение предела и предельной точки последовательности элементов произвольного метрического пространства. Доказать, что точка $a$ является предельной точкой последовательности $x_0, x_1, \ldots$ тогда и только тогда, когда эта последовательность имеет подпоследовательность, сходящуюся к $a$.

**2.** Какие последовательности будут сходящимися (**а**) в пространстве $\mathbb{R}^n$? (**б**) в произведении пространств? (**в**) в пространстве с дискретной метрикой?

**3.** Доказать, что если последовательность функций $f_0, f_1, f_2, \ldots$ сходится к функции $f$ в пространстве ограниченных функций на $X$, то для любой точки $x$ последовательность чисел $f_0(x), f_1(x), \ldots$ сходится к числу $f(x)$. Показать, что обратное неверно.

Если точка $x$ множества $U$ содержится в $U$ вместе с некоторым открытым шаром с центром в $x$ (другими словами, если $U$ содержит все достаточно близкие к $x$ точки), точку $x$ называют *внутренней* точкой множества $U$, а множество $U$ называют *окрестностью* точки $x$.

**4.** Доказать, что открытый шар является окрестностью любой своей точки (все его точки — внутренние).

Множество, все точки которого являются внутренними, называют *открытым*.

**5.** (**а**) Доказать, что пересечение конечного числа открытых множеств открыто. (**б**) Доказать, что объединение любого числа открытых множеств открыто. (**в**) Показать, что требование конечности в пункте (**а**) существенно.

**6.** Доказать, что множество открыто тогда и только тогда, когда оно есть объединение некоторого семейства открытых шаров.

**7.** Доказать, что открытое множество на плоскости есть объединение *счётного* числа открытых шаров (кругов).



**8.** Доказать, что открытое множество на прямой есть объединение счётного числа *непересекающихся* интервалов (т. е. открытых шаров).

**9.** Доказать, что множество всех внутренних точек любого множества $A$ будет открытым множеством. (Легко видеть, что оно будет наибольшим открытым подмножеством множества $A$.) Оно называется *внутренностью* множества $A$ и иногда обозначается $\mathrm{Int}(A)$.

**10.** (**а**) Можно ли утверждать, что $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \cap \mathrm{Int}(B)$ (для произвольных множеств $A$ и $B$ в произвольном метрическом пространстве)? (**б**) Тот же вопрос для равенства $\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$.

Точка $x$ называется *точкой касания* множества $A$, если любая её окрестность пересекается с $A$. (В частности, так будет, если $x \in A$.)

**11.** Продолжить эквивалентные определения: $x$ является точкой касания множества $A$, если (**а**) для всякого $\varepsilon > 0 \ldots$; (**б**) $x$ не является внутренней $\ldots$; (**в**) существует последовательность точек $A, \ldots$

Множество называют *замкнутым*, если оно содержит все свои точки касания.

**12.** Доказать, что замкнутый шар замкнут.

**13.** Доказать, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.

**14.** Доказать, что объединение конечного числа и пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто.

**15.** Доказать, что для любого множества $A$ множество всех его точек касания замкнуто. Это множество является наименьшим замкнутым множеством, содержащим все элементы $A$, и называется *замыканием* множества $A$.

**16.*** Как получить замыкание множества $A$, комбинируя операции взятия внутренности и перехода к дополнению?

**17.** Какие множества открыты и какие замкнуты в пространстве с дискретной метрикой?

**18.** Ранее мы определили в $\mathbb{R}^n$ несколько метрик. Будут ли одинаковы классы открытых множеств в этих метриках?

**19.** Замкнутое множество на прямой содержит все рациональные точки. Что это за множество?

**20.*** Метрику в пространстве изменили, но так, что класс открытых множеств не изменился. Могла ли сходящаяся последовательность перестать сходиться (к той же точке)? Верно ли обратное утверждение (если сходимость не изменилась, то и класс открытых множеств остался тем же)?

**21.*** Доказать, что множество непрерывных функций замкнуто в пространстве ограниченных функций на отрезке.

**22.** Доказать, что на прямой не существует множеств, которые были бы открытыми и замкнутыми одновременно (не считая пустого множества и всей прямой).

Пространства с таким свойством называют *связными*.

**23.** Доказать, что плоскость (с обычным расстоянием) связна.

Пусть $A$ — произвольное подмножество метрического пространства $M$. Индуцированная из $M$ метрика (ограничение функции расстояния) превращает $A$ в метрическое пространство, называемое *подпространством* пространства $M$.

**24.** (а) Числовую прямую можно считать подпространством координатной плоскости. Будут ли интервал $(0,1)$ и отрезок $[0,1]$ открыты как подмножества прямой? как подмножества плоскости? будут ли они замкнуты (в том и в другом пространстве)? (б) Доказать, что в пространстве $A \subset M$ с индуцированной из $M$ метрикой открытыми будут пересечения с $A$ открытых в $M$ множеств и только они. (в) Что можно сказать о замкнутых в $A$ множествах?

Подмножество $A$ метрического пространства $M$ называется *плотным* (или *всюду плотным*) в $M$, если его замыкание совпадает с $M$.

**25.** Можно ли переформулировать это определение так: «если любое открытое множество содержит точку из $A$»?

**26.*** Доказать, что множество ломаных (кусочно-линейных функций) плотно в пространстве $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций.

Расстояние от точки $x$ метрического пространства до множества $A \subset M$ определим как точную нижнюю грань всех



расстояний $\rho(x,a)$ при $a \in A$. Обозначение: $\rho(x,A)$.

**27.** Какие точки имеют нулевое расстояние до данного множества $A$?

**28.** Верны ли такие обобщения неравенства треугольника: (а) $\rho(x,A) \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,A)$? (б) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,A)+\rho(y,A)$? (Здесь $x$ и $y$ — точки метрического множества, $A$ — некоторое его подмножество.)

**29.*** В метрическом пространстве выбраны два непересекающихся замкнутых множества $K, L$. Показать, что найдутся непересекающиеся открытые множества $U, V$, для которых $K \subset U$ и $L \subset V$. (Это свойство топологи называют *нормальностью* метрических пространств.)

## Интеграл

Интеграл от функции $f$, заданной на отрезке $[a,b]$ — это площадь под графиком функции (рис. 27).

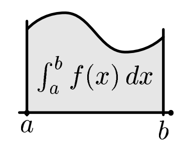


Рис. 27

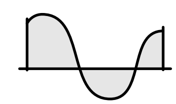

Рис. 28

**1.** (а) Объяснить, почему (при $a<b<c$) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$. (б) Как надо определить $\int_a^b f(x)\,dx$ при $b=a$ и при $b<a$, чтобы сохранить это свойство?

**2.** (а) Объяснить (для $f, g \geqslant 0$) геометрический смысл равенства $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$. (Указание: *принцип Кавальери* утверждает, что две фигуры имеют равные площади, если любая вертикальная прямая пересекает их по отрезкам равной длины.) (б) Как надо определить интеграл для меняющих знак функций (рис. 28), чтобы сохранить это свойство?

**3.*** Известно, что $\int_1^2 f(x)\,dx=3$. Чему равен $\int_{10}^{20} f\left(\frac{x}{10}\right)\,dx$?

Дадим формальное определение интеграла. Пусть функция $f$ ограничена на отрезке $[a,b]$. Набор точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ будем называть *разбиением* отрезка $[a, b]$. Для каждого разбиения рассмотрим *верхнюю интегральную сумму* $\sum(x_{i+1} - x_i)\sup\{f(x)|x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ и аналогичную *нижнюю интегральную сумму*.

**4.** Доказать, что (а) при добавлении новых точек верхняя интегральная сумма не увеличивается, а нижняя не уменьшается; (б) любая нижняя сумма не превосходит любой верхней; (в) нижние интегральные суммы ограничены сверху, а верхние — снизу, причём точная верхняя грань первых не больше точной нижней грани вторых.

Если эти грани совпадают, то функция $f$ называется *интегрируемой на отрезке* $[a, b]$, а их общее значение — *интегралом*.

**5.** Привести пример неинтегрируемой (но ограниченной) функции.

**6.** Доказать, что любая монотонная на отрезке функция интегрируема.

**7.** Доказать, что любая непрерывная на отрезке функция интегрируема.

**8.** Используя определение интеграла, найти $\int_0^1 x\,dx$.

**9.*** Та же задача для $\int_0^1 a^x\,dx$.

**10.*** Та же задача для $\int_0^1 x^2\,dx$.

**11.*** Та же задача для $\int_0^1 x^n\,dx$ при произвольном натуральном $n$. (Указание: удобно взять в качестве точек разбиения геометрическую прогрессию $1, q, q^2, \ldots$ при $q < 1$.)

**12.*** Та же задача для $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$.

**13.** Доказать, что сумма интегрируемых функций интегрируема (и интеграл равен сумме интегралов).

**14.*** Доказать, что произведение двух интегрируемых (ограниченных) функций интегрируемо.

**15.** Интеграл неотрицательной непрерывной функции равен нулю. Доказать, что она тождественно равна нулю.

Доказать (уточнив формулировки), что

**16.** $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$;

**17.** если $f \leqslant g$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$;

**18.** $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.



**19.** Функция $f$ интегрируема и периодична с периодом $T$. Доказать, что её интеграл по отрезку длиной $T$ не зависит от выбора начала отрезка.

**20.*** (а) Пусть на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ некоторого разбиения разбиения выбрано по точке $y_i$. Сумма $R = \sum_i f(y_i)(x_{i+1} - x_i)$ называется *римановой суммой* (она зависит от функции, разбиения и набора точек). Пусть $f$ интегрируема и имеет интеграл $I$. Доказать, что римановы суммы стремятся к $I$, когда максимальная длина отрезка разбиения стремится к нулю. (б) Сформулировать и доказать обратное утверждение.

**21.*** Доказать, что ограниченная функция с конечным числом точек разрыва интегрируема.

**22.*** Может ли всюду разрывная функция быть интегрируемой?

**23.*** Доказать, что функция интегрируема тогда и только тогда, когда её можно заключить между двумя непрерывными функциями со сколь угодно малой разностью интегралов.

**24.*** Существует ли неотрицательная интегрируемая функция с интегралом $0$, отличная от нуля на несчётном множестве?

## Непрерывность в метрических пространствах

**1.** Дать определение непрерывности функции $f\colon A \to B$ в точке $a \in A$ в терминах сходящихся последовательностей и на $\varepsilon$-$\delta$-языке и доказать их эквивалентность. (Здесь $A$ и $B$ — произвольные метрические пространства; $a$ — некоторая точка из $A$.)

**2.** (а) Показать, что функция $f\colon A \to B$ непрерывна во всех точках пространства $A$ тогда и только тогда когда прообраз $f^{-1}(U)$ любого открытого множества $U \subset B$ открыт в $A$. (б) Верно ли аналогичное утверждение для замкнутых множеств?

**3.*** Пусть $M$ — метрическое пространство с дискретной метрикой. (а) Какие функции на $M$ будут непрерывными? (б) Какие функции на $[0, 1] \cup [2, 3]$ со значениями в $M$ будут непрерывными?

**4.** (а) Показать, что функция расстояния $\rho(x, y)$, определённая на парах точек метрического пространства $M$, непрерывна как функция $M \times M \to \mathbb{R}$. (б) Показать, что для произвольного множества $A$ в метрическом пространстве $M$ функция $x \mapsto \rho(x, A)$ является непрерывным отображением $M$ в $\mathbb{R}$.

**5.** Сформулировать и доказать утверждения о непрерывности суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций, а также композиции непрерывных функций.

**6.** Показать, что функция $x^y$, определённая на $[0, +\infty) \times \times \mathbb{R}$, непрерывна на этом пространстве.

**7.*** Дано метрическое пространство $M$. Какие его подмножества являются множествами нулей непрерывных функций (на $M$ с действительными значениями)?

**8.** Показать, что для непрерывных функций с действительными значениями, определённых на связном метрическом пространстве, справедлива *теорема о промежуточном значении*: если такая функция принимает значения $a$ и $b$, то принимает и все промежуточные значения.

**9.*** Доказать, что образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

Пусть $A$ и $B$ — метрические пространства, $f\colon A \to B$ — произвольная функция. Говорят, что функция $f$ имеет $\varepsilon$*-колебание* в точке $a \in A$, если в любой окрестности точки $a$ найдутся точки $x$ и $y$, для которых расстояние между $f(x)$ и $f(y)$ больше $\varepsilon$.

**10.*** (а) Показать, что для данного $\varepsilon$ (и данной функции $f$) множество всех точек $\varepsilon$-колебания замкнуто. (б) Показать, что точка $a$ является точкой разрыва функции $f$ тогда и только тогда, когда $f$ имеет $\varepsilon$-колебание в $a$ для некоторого положительного $\varepsilon$. (в) Показать, что множество точек разрыва любой функции можно представить как счётное объединение замкнутых множеств.

## Интегралы в природе

Смысл интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ можно объяснить так: мы разбиваем отрезок $[a, b]$ на части, в $i$-ой части выбираем точку $x_i$



и вычисляем сумму $\sum f(x_i)\,\Delta x_i$, где $\Delta x_i$ есть длина $i$-ой части. Когда части становятся бесконечно малыми, сумма $\sum$ превращается в интеграл $\int$, а $\Delta x_i$ — в $dx$.

**1.** Площадь под графиком $y = f(x)$ от $x = a$ до $x = b$ записывается как $\int_a^b f(x)\,dx$. Пояснить на рисунке, чему соответствует «бесконечно малый» член суммы $f(x)\,dx$.

**2.** Точка движется по координатной прямой, имея в момент $t$ скорость $v(t)$. Записать в виде интеграла перемещение (изменение координаты) с момента $t_1$ до момента $t_2$.

**3.** Тот же вопрос для пройденного пути.

**4.** Точка движется по отрезку $[a, b]$ слева направо (от $a$ к $b$), при этом известна зависимость её скорости $v(x)$ от координаты $x$. Найти (записать в виде интеграла) время её движения от $a$ до $b$.

**5.*** Точка движется по координатной плоскости, имея в момент $t$ вектор скорости $(v_1(t), v_2(t))$. Записать её перемещение (изменение координат) и пройденный путь (длину траектории).

**6.** Участок графика $y = f(x)$ от $x = a$ до $x = b$ вращают вокруг оси OX. Записать в виде интеграла объём полученного тела вращения.

**7.** Найти площадь фигуры, содержащей начало координат, если выходящий из начала координат под углом $\varphi$ луч пересекается с ней по отрезку длиной $r(\varphi)$.

**8.** Найти длину участка графика функции $y = f(x)$ от $x = = a$ до $x = b$.

**9.** Найти общую силу давления на прямоугольную стенку бассейна (высота $L$, ширина $w$, бассейн наполнен доверху), если на глубине $l$ давление равно $\rho g l$.

**10.*** Найти давление на глубине $L$, если плотность жидкости зависит от глубины и равна $\rho(l)$ на глубине $l \in [0, L]$.

**11.*** (Продолжение) Найти общую силу давления на прямоугольную стенку $L \times w$. (Указание: повторный интеграл в ответе не обязателен.)

**12.*** Точка обходит против часовой стрелки замкнутую кривую на плоскости, имея в момент времени $t$ координаты $(x(t), y(t))$. Показать, что площадь, ограничиваемая этой кривой, равна $\int_a^b x(t)y'(t)\,dt = -\int_a^b x'(t)y(t)\,dt$, где $a$ — момент начала обхода, $b$ — момент конца обхода.

## Кольца и поля

Множество $R$ с операциями сложения $(+)$ и умножения $(\cdot)$ называется *коммутативным кольцом с единицей*, если

1) $R$ является коммутативной группой по сложению (нейтральный элемент называется «нулём» и обозначается $0$);

2) умножение ассоциативно, коммутативно и имеет нейтральный элемент $1 \in R$ (это значит, что $1 \cdot x = x$ для всех $x \in R$);

3) выполнено свойство дистрибутивности: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ для всех $a, b, c \in R$.

Для краткости мы будем говорить «кольцо» вместо полного названия «коммутативное кольцо с единицей».

**1.** Являются ли кольцами следующие множества (с естественными операциями, если они не указаны явно): (**а**) множество натуральных чисел; (**б**) множество целых чисел; (**в**) множество чётных целых чисел; (**г**) множество рациональных чисел; (**д**) множество иррациональных чисел; (**е**) множество действительных чисел; (**ж**) множество комплексных чисел; (**з**) векторы на плоскости (сумма, скалярное произведение); (**и**) векторы в пространстве (сумма, векторное произведение); (**к**) пары действительных чисел с покоординатным сложением и умножением; (**л**) пары действительных чисел (сложение покоординатное, умножение задаётся формулой $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$); (**м**) пары действительных чисел (сложение покоординатное, умножение задаётся формулой $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$); (**н**) пары целых чисел (сложение покоординатное, умножение задаётся формулой $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$); (**о**) пары действительных чисел (сложение покоординатное, умножение задаётся формулой $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - 2bd, ad + bc)$); (**п**) многочлены от $x$ с действительными коэффициентами (обозначение: $\mathbb{R}[x]$); (**р**) многочлены от $x$ и $y$ с действительными коэффициентами (обозначение: $\mathbb{R}[x, y]$); (**с**) многочлены от $x$ с целыми коэффициентами (обозначение: $\mathbb{Z}[x]$); (**т**) функции на отрезке $[0, 1]$ с действительными значениями (сложение и умножение — поточечные); (**у**) непрерывные функции на отрезке $[0, 1]$ с действительными значениями (сложение и умножение — поточечные; обозначение $C[0, 1]$); (**ф**) остатки по модулю $n$ (обозначение $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)? (**х**) подмножества некоторого множества $U$ (сложение — симметрическая разность, умножение — пересечение).



**2.** (Следствия из аксиом) Какие из следующих утверждений верны для любого кольца $R$: (**а**) $0 \cdot x = 0$ для любого $x \in R$; (**б**) $0 \neq 1$; (**в**) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ для любых $a$ и $b$ (объяснить, какой смысл имеют числа 2 и 3 в разных местах этого равенства); (**г**) $2 \cdot 2 = 4$; (**д**) $(1 + x + \ldots + x^n) = (1 - x^{n+1})/(1 - x)$ для любого $x$; (**е**) если $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$; (**ж**) $1 + 1 + 1 \neq 0$; (**з**) если $a + a = 0$, то $a = 0$?

**3.** Элемент $x$ кольца $R$ называется *обратимым*, если существует элемент $y \in R$, для которого $x \cdot y = 1$. Доказать, что обратимые элементы кольца образуют группу относительно операции умножения. Какие элементы обратимы в приведённых выше примерах? (В большинстве случаев это совсем просто, несколько более трудных можно пока пропустить.)

**4.** Какие элементы обратимы в кольце *формальных степенных рядов* (бесконечных выражений вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ с естественными операциями сложения и умножения)?

Кольцо, в котором все ненулевые элементы обратимы (и в котором $0 \neq 1$), называется *полем*.

**5.** Какие из рассмотренных в задаче 1 колец являются полями?

**6.** Построить поля из двух, трёх и четырёх элементов (выписав таблицы сложения и умножения).

**7.** Привести пример поля, в котором сумма $1 + 1 + \ldots + 1$ ($n$ единиц) при некотором $n > 0$ равна нулю.

Минимальное число $n$ с таким свойством называется *характеристикой* поля. (Если все суммы такого вида отличны от нуля, то говорят, что поле имеет *характеристику* 0.)

**8.** Показать, что характеристика поля — простое число.

**9.** Показать, что число элементов конечного поля делится на его характеристику.

**10.*** Существует ли поле из 10 элементов?

**11.*** Существует ли поле из 8 элементов?

**12.*** Показать, что $(a+b)^p = a^p + b^p$ в поле характеристики $p$ и вывести отсюда, что $a^p \equiv a (\mathrm{mod}\ p)$ для любого целого $a$ и простого $p$.

Говорят, что в кольце $R$ есть *делители нуля*, если произведение двух ненулевых элементов может быть равно нулю.

**13.** В каких кольцах задачи 1 есть делители нуля? Доказать, что в поле нет делителей нуля.

Кольцо без делителей нуля называют *целостным* (или *областью целостности*).

**14.** Доказать, что в целостном кольце допустимо сокращение на ненулевой элемент: если $ac = bc$ и $c \neq 0$, то $a = b$.

**15.*** Доказать, что конечное целостное кольцо является полем.

**16.** (а) Показать, что если $x^2 = 1$ в кольце без делителей нуля, то $x = \pm 1$. (б) Каков может быть элемент $x$ целостного кольца, если $x^2 = x$?

**17.*** Показать, что многочлен степени $n$ с коэффициентами в целостном кольце имеет в этом кольце не более $n$ корней.

## Полные метрические пространства

Последовательность точек метрического пространства называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует шар радиуса $\varepsilon$, содержащий все члены последовательности, кроме конечного числа.

**1.** (а) Показать, что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна, но обратное неверно (для некоторых пространств). (б) Продолжить (эквивалентное) определение: последовательность фундаментальна, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N$, что ...



Метрическое пространство, в котором любая фундаментальная последовательность сходится, называется *полным*.

**2.** Показать, что пространство $\mathbb{R}^n$ (с любой из рассмотренных метрик на нём) полно.

**3.*** Полно ли пространство ограниченных функций (на данном множестве $X$; расстояние — точная верхняя грань модуля разности)?

**4.*** Полно ли бэровское пространство (последовательностей натуральных чисел)?

**5.** (а) Показать, что если подмножество $A$ метрического пространства полно в индуцированной метрике, то оно замкнуто. (б) Показать, что замкнутое подмножество полного пространства полно (в индуцированной метрике). (Таким образом, для подмножеств полных пространств полнота равносильна замкнутости.)

**6.** Доказать, что произведение двух полных пространств (с любой из упомянутых выше метрик) полно.

**7.*** Полно ли пространство $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ (расстояние — точная верхняя грань модуля разности)?

**8.** Пусть $D_0 \supset D_1 \supset D_2 \supset \ldots$ — последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю. Доказать, что если пространство полно, то эти шары имеют общую точку.

**9.** (Продолжение) Показать, что шары можно заменить произвольными замкнутыми множествами, надо лишь требовать, чтобы их диаметры стремились к нулю. (*Диаметр* множества в метрическом пространстве — точная верхняя грань расстояний между его точками.)

**10.*** (Продолжение) Показать, что стремление радиусов к нулю существенно: в полном пространстве может существовать последовательность вложенных замкнутых шаров, не имеющих общей точки.

**11.*** На одном множестве есть две метрики, причём они эквивалентны (задают одни и те же открытые множества и сходящиеся последовательности). Может ли пространство быть полно с одной метрикой и не полно с другой?

Подмножество $A$ метрического пространства называется *нигде не плотным*, если любой шар в $M$ содержит меньший шар, не пересекающийся с $A$.

**12.** Будет ли равносильным этому такое определение нигде не плотного множества: «замыкание не имеет внутренних точек»?

**13.*** (Теорема Бэра) Показать, что в полном пространстве счётное число нигде не плотных множеств не может покрывать всего пространства. (Указание: построить по очереди вложенные шары, уклоняющиеся от этих множеств.)

Счётные объединения нигде не плотных множеств называются *множествами первой категории*. Теорема Бэра утверждает, что в полном пространстве такое множество не может покрывать всего пространства.

**14.*** Показать, что в полном пространстве дополнение к множеству первой категории всюду плотно.

**15.*** Вывести из теоремы Бэра, что множество иррациональных чисел не может быть представлено в виде объединения счётного числа замкнутых подмножеств прямой.

**16.*** Отображение $f$ полного пространства $M$ в себя является *сжимающим*: $\rho(f(x), f(y)) \leqslant c\rho(x, y)$ для некоторой константы $c < 1$ и для всех $x, y \in M$. Доказать, что существует единственная точка $a$, для которой $f(a) = a$ (*неподвижная* точка отображения $f$).

**17.*** Доказать, что уравнение $\cos x = 2x + c$ имеет единственное решение при любом $c$.

**18.*** Доказать, что всякое преобразование плоскости, являющееся подобием с коэффициентом $k \neq 1$, имеет единственную неподвижную точку.

**19.*** На плоскости дано $n$ прямых $l_1, \ldots, l_n$, не все из которых параллельны. На прямой $l_1$ берут точку, ортогонально проектируют её на $l_2$, затем на $l_3, \ldots, l_n$ и наконец снова на $l_1$. Показать, что при подходящем выборе точки на $l_1$ цикл замкнётся и что такой выбор единствен.

**20.*** Пространство $X$ не является полным. Показать, что его можно *пополнить*, добавив некоторое количество новых точек и сохранив расстояния между старыми, получив полное пространство $X'$, в котором исходное пространство $X$ будет всюду плотным.



## Операторы и уравнения

**1.** Указать все линейные операторы $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сохраняющие ось абсцисс (т. е. переводящие её в себя) и ось ординат.

**2.** Указать бесконечное семейство линейных операторов $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сохраняющих гиперболу $xy = 1$. (Требуется указать матрицы этих операторов в стандартном базисе.)

**3.** Тот же вопрос для окружности $x^2 + y^2 = 1$.

**4.** Тот же вопрос для гиперболы $x^2 - y^2 = 1$.

**5.** Тот же вопрос для эллипса $x^2 + 2y^2 = 1$.

Ненулевой вектор $x$ называется *собственным вектором* оператора $\varphi\colon E \to E$, если порождённая им прямая переходит в себя, то есть если $\varphi(x) = \lambda x$ для некоторого числа $\lambda$, называемого *собственным значением*.

**6.** Указать собственные векторы и собственные значения для оператора Фибоначчи, имеющего матрицу $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**7.*** (Продолжение) Найти матрицу оператора $F^n$ в базисе из собственных векторов и в стандартном базисе. Как получить отсюда формулу для чисел Фибоначчи?

**8.** Указать (неединичный) линейный оператор с целочисленной матрицей, сохраняющий гиперболу $x^2 - 2y^2 = 1$. Найти матрицу обратного к нему оператора.

**9.** Показать, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

**10.*** Найти общую формулу для решений этого уравнения. (Указание: все они получаются из одного повторным применением линейного оператора.)

**11.*** Сколько решений имеет в целых числах уравнение $x^2 - 2y^2 = -1$?

**12.*** Сколько решений имеют в целых числах уравнения $x^2 - 3y^2 = 1$ и $x^2 - 3y^2 = -1$?

**13.** Пусть $(x, y)$ — решение уравнения $x^2 + x = 2y^2$. Показать, что пара $(3x + 4y + 1, 2x + 3y + 1)$ также является решением этого уравнения.

**14**.* Показать, что уравнение $x^2+x=2y^2$ имеет бесконечно много решений в целых числах, и найти общую формулу для его решений.

**15**.* Тот же вопрос для уравнения $x^2+x+1=3y^2$.

**16**.* Найти все натуральные числа. являющиеся одновременно точными квадратами и разностями кубов двух последовательных целых чисел. (Указание: использовать предыдущую задачу, в которой $x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$.)

**17**.* Пусть $(x, y, z)$ — тройка целых положительных чисел, являющаяся решением уравнения $x^2+y^2+1=xyz$. Как изменить $x$, не меняя $y$ и $z$, чтобы получить другое решение того же уравнения?

**18**.* (Продолжение) Показать, что это уравнение имеет решения в целых положительных числах только при $z=3$.

**19**.* (Продолжение) Найти 10 решений этого уравнения и указать общую формулу для его решений.

## Евклидовы пространства

*Скалярным произведением* двух векторов $a$ и $b$ на плоскости (или в пространстве) называется произведение их длин, умноженное на косинус угла между ними. Оно обозначается $(a, b)$.

**1.** Проверить, что скалярное произведение *билинейно*, то есть $(a+b, c) = (a, c)+(b, c)$, $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$, $(c, a+b) = (c, a)+(c, b)$, $(b, \lambda a) = \lambda(b, a)$.

**2.** Получится ли билинейная функция, если произведение длин векторов умножать не на косинус, а на *синус* угла между ними?

**3.** Написать формулу, выражающую скалярное произведение через координаты векторов.

**4.** (а) Даны три вектора $a, b, c$ единичной длины. Доказать, что $(a, b)+(a, c)+(b, c) \geqslant -3/2$. (б) Доказать, что сумма косинусов трёх углов треугольника не превосходит $3/2$.

**5**.* Доказать, что сумма косинусов двугранных углов произвольного тетраэдра не превосходит 2.

*Скалярным произведением* в произвольном векторном пространстве $V$ называется билинейная функция $(a, b)$ двух векторов $a$ и $b$ с числовыми значениями, которая *симметрична* (то есть $(a, b) = (b, a)$ при всех $a$ и $b$) и *положительно определена* (то есть $(a, a)$ всегда неотрицательно и обращается в нуль только при $a = 0$).



Пространство, в котором введено скалярное произведение, называют *евклидовым*.

**6.** Какие векторы евклидова пространства называют перпендикулярными? Как определить длину вектора в евклидовом пространстве? Как формулируется и доказывается теорема Пифагора для произвольного евклидова пространства?

Длина вектора $x$ обозначается через $\|x\|$; ортогональность векторов $x$ и $y$ записывают так: $x \perp y$.

**7.** Указать несколько различных скалярных произведений на плоскости.

**8.** Указать какое-либо скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

**9.** Задаёт ли формула $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ скалярное произведение на пространстве непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций?

**10**.* (Продолжение) Тот же вопрос для пространства интегрируемых на отрезке $[0, 1]$ функций.

**11**.* (а) Показать, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ любая билинейная форма имеет вид

$$B(\langle x_1, x_2\rangle, \langle y_1, y_2\rangle) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2.$$

(б) При каких $a, b, c, d$ эта форма будет симметричной? (в) При каких $a, b, c, d$ эта форма будет положительно определённой?

**12.** В параллелограмме сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей. Как сформулировать и доказать это утверждение для произвольного евклидова пространства?

**13.** Векторы $a$ и $b$ евклидова пространства $E$ таковы, что $(a, c) = (b, c)$ для любого вектора $c \in E$. Можно ли утверждать, что $a = b$?

**14.** Дан некоторый вектор $a$ евклидова пространства $E$. (а) Доказать, что любой вектор $x$ этого пространства однозначно представляется в виде $x = y + z$, где вектор $y$ пропорционален $a$, а $z$ перпендикулярен $a$. (Вектор $y$ называют проекцией вектора $x$ на прямую, порождённую вектором $a$.) (б) Показать, что $\|y\| \leqslant \|x\|$ (проекция вектора не длиннее его самого).

*Расстояние* между двумя векторами $a, b$ евклидова пространства $E$ определяется как длина их разности, то есть как $\|a-b\| = \sqrt{(a-b, a-b)}$.

**15.** Даны два вектора $a, b$ евклидова пространства $E$. При каком значении $\lambda$ вектор $\lambda a$ будет ближе всего к вектору $b$?

**16.** Доказать *неравенство Коши* (которое называют также неравенством Коши – Буняковского – Шварца):

$$|(a, b)| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|.$$

**17.** Показать, что (для данных двух векторов $a$ и $b$) функция $\lambda \mapsto \|b - \lambda a\|^2$ является квадратным трёхчленом, дискриминант которого неположителен, и вывести отсюда неравенство Коши.

**18.** Как, используя неравенство Коши, определить угол между векторами евклидова пространства?

**19.*** Измеряя неизвестное сопротивление, физик сделал $n$ измерений и получил значения токов $I_k$ и напряжений $U_k$ при $k = 1, \ldots, n$. Если отношения $U_k/I_k$ различны (в силу ошибок измерения), по *методу наименьших квадратов* ищут такое значение $R$, при котором сумма квадратов отклонений $(U_1 - RI_1)^2 + \ldots + (U_n - RI_n)^2$ минимальна. Чему равно это $R$? Как это связано с задачей 15?

**20.** (а) Доказать, что $\|a + b\| \leqslant \|a\| + \|b\|$ для любых двух векторов $a$ и $b$. Когда это неравенство обращается в равенство? (б) Показать, что определённое выше расстояние $\rho(a, b) = \|a - b\|$ удовлетворяет неравенству треугольника (так что любое евклидово пространство становится метрическим).

**21.** Доказать, что

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \leqslant \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}$$

для любых чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$.



**22.** Сумма квадратов 100 чисел не превосходит 1. Каково максимально возможное значение суммы этих чисел?

**23.*** Оценить сверху значение интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, если известно значение $\int_a^b f^2(x)\,dx$.

**24.*** Вектор $x$ евклидова пространства $E$ не лежит в подпространстве $F \subset E$. В $F$ выбрали точки $f_0, f_1, \ldots$, для которых $\rho(x, f_i)$ стремится к $\rho(x, F)$, то есть к точной нижней грани расстояний от $x$ до всевозможных точек подпространства $F$. (а) Показать, что последовательность $f_0, f_1, \ldots$ фундаментальна. (б) Пусть вектор $f$ является пределом этой последовательности. Показать, что он является ближайшей к $x$ точкой в подпространстве $F$. (в) Показать, что вектор $x - f$ ортогонален любому вектору подпространства $F$.

**25.*** Рассмотрим бесконечные последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$, для которых ряд $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots$ сходится. Доказать, что они образуют векторное пространство и что формула

$$(\langle x_0, x_1, \ldots \rangle, \langle y_0, y_1, \ldots \rangle) = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \ldots$$

задаёт в нём скалярное произведение. Будет ли это пространство полным (в соответствующей метрике)?

## Формула Ньютона – Лейбница

**1.** Функция $f$ непрерывна на интервале $(a, b)$, содержащем точку $d$. Доказать, что функция $F$, заданная формулой $F(x) = \int_d^x f(t)\,dt$, дифференцируема на $(a, b)$ и $F' = f$. Как зависит $F$ от выбора точки $d \in (a, b)$?

Если $F' = f$, то функцию $F$ называют *первообразной* функции $f$ или её *неопределённым интегралом*.

**2.** Известна одна из первообразных функции $f$. Указать все её первообразные, если (а) функция $f$ определена на интервале; (б) функция $f$ определена на объединении двух непересекающихся интервалов.

**3.** (Формула Ньютона – Лейбница) Функция $F$ непрерывно дифференцируема на интервале, содержащем точки $a, b$.

Доказать, что

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

**4.*** Доказать формулу Ньютона – Лейбница в несколько более общем случае: функция $F$ дифференцируема на интервале, содержащем точки $a$ и $b$, причём $F'$ интегрируема на отрезке $[a, b]$.

**5.** Найти первообразную функции $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ на интервале $(-1, 1)$.

**6.** Найти $\int_a^b x^n\,dx$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$

**7.** Найти $\int_a^b (1/x^2)\,dx$ (считая $a$ и $b$ числами одного и того же знака).

**8.** Найти $\int_a^b (1/x)\,dx$ (считая $a$ и $b$ числами одного знака).

**9.** Найти первообразные функций (**а**) $x \mapsto e^x$; (б) $x \mapsto a^x$.

**10.** Найти первообразные функций (**а**) $x \mapsto \sqrt{x}$; (б) $x \mapsto \sqrt{x-1}$; (**в**) $x \mapsto 1/\sqrt{x}$.

**11.*** Найти первообразную функции $x \mapsto x\sqrt{x-1}$.

**12.** Найти первообразные функций (**а**) $x \mapsto \sin x$; (б) $x \mapsto \cos x$; (**в**) $x \mapsto \sin 2x$;

**13.*** Найти первообразную функции $x \mapsto 1/\sin^2 x$.

**14.** Найти первообразные функций (**а**) $x \mapsto 1/(1+x)$; (б) $x \mapsto 1/(1-x)$.

**15.** Найти первообразную функции $x \mapsto 1/(1-x^2)$.

**16.*** Найти первообразную функции $x \mapsto 1/(1+x^2)$.

**17.*** Найти первообразную функции $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$.

**18.** Доказать, что

$$\ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \ln n + 1.$$

**19.** Доказать, что

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}.$$

**20.** Найти предел при $n \to \infty$ суммы

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$



**21.*** Найти сумму ряда $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \ldots$

**22.** Найти предел $(1^7 + 2^7 + 3^7 + \ldots + n^7)/n^8$ при $n \to \infty$.

**23.** Считая известной формулу для площади круга, получить формулы для объёма конуса и шара.

**24.** Получить формулу для площади поверхности шара.

**25.*** (**а**) Чему равен объём четырёхмерного шара радиуса $R$? (б) Чему равна «трёхмерная площадь» поверхности четырёхмерного шара радиуса $R$?

Момент инерции при вращении точки вокруг оси равен $mr^2$, где $m$ — масса точки, $r$ — расстояние до оси. Момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей.

**26.** Получить формулу для моментов инерции (а) однородного стержня (ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его конец); (б) однородного диска (ось вращения перпендикулярна диску и проходит через его центр).

**27.*** (Продолжение) Та же задача для (а) однородной сферы (ось проходит через центр); (б) однородного шара (ось проходит через центр).

**28.*** Непрерывное отображение $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ называют *параметрически заданной кривой* (значению параметра $t \in [a, b]$ соответствует точка $\gamma(t)$ на плоскости). (а) Определить длину кривой как точную верхнюю грань длин вписанных в неё ломаных. (б) Может ли длина кривой быть бесконечной? (**в**) Показать, что длина непрерывно дифференцируемой кривой равна $\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$ (дать точную формулировку и доказательство).

**29.*** Из деревни А в деревню Б, находящуюся на расстоянии 10 км, вышел лыжник со скоростью 5 км/ч. При этом его скорость убывает пропорционально расстоянию до Б (чем ближе к концу пути, тем медленнее он идёт). Через сколько часов он пройдёт 90% пути? 99% пути?

**30.*** Резиновый шнур длиной 1, закреплённый с одного конца, начинают тянуть за другой конец со скоростью $v$. Одновременно вдоль шнура начинает ползти муравей со скоростью $w$ (отправляясь от неподвижного конца). Доползёт ли он до другого конца шнура, если $w < v$? если $w = v$?

## Базисы в евклидовых пространствах

**1.** Доказать, что попарно ортогональные ненулевые векторы линейно независимы.

**2.** Векторы $e_1, \ldots, e_k$ евклидова пространства $E$ ортогональны, но не образуют базиса. Показать, что найдётся ненулевой вектор, ортогональный им всем.

**3.** Доказать, что в любом конечномерном евклидовом пространстве можно найти базис, состоящий из попарно ортогональных векторов единичной длины (его называют *ортонормированным* базисом).

**4.** Доказать, что коэффициенты в разложении вектора $x$ по ортонормированному базису $e_1, \ldots, e_n$ равны соответственно $(x, e_1), \ldots, (x, e_n)$.

**5.*** Дано $n+1$ векторов, образующих друг с другом тупые углы (все скалярные произведения $(e_i, e_j)$ отрицательны). Показать, что любые $n$ из них линейно независимы.

**6.** В евклидовом пространстве $E$ выбрано конечномерное подпространство $F$. Доказать, что всякий вектор $x \in E$ однозначно представляется в виде суммы $x = y + z$, где вектор $y$ принадлежит подпространству $F$, а вектор $z$ ему ортогонален (то есть ортогонален любому вектору из $F$). (Указание: выбрать базис в $F$ и искать координаты вектора $y$ в этом базисе.)

Вектор $y$ называется *проекцией* вектора $x$ на подпространство $F$.

**7.** Показать, что проекция вектора $x$ на подпространство $F$ является ближайшей к $x$ точкой из $F$.

**8.*** На плоскости даны $n$ точек $\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle$. Найти прямую $y = ax + b$, для которой сумма квадратов отклонений $(y_i - (ax_i + b))^2$ была бы минимальной.

**9.** Пусть $F$ — подпространство евклидова пространства $E$. Рассмотрим множество $F^\perp$, состоящее из векторов, ортогональных подпространству $F$ (то есть ортогональных всем векторам из $F$). Показать, что $F^\perp$ является подпространством и найти его размерность, если известны $\dim E$ и $\dim F$.

Подпространство $F^\perp$ называется *ортогональным дополнением* к подпространству $F$.



**10.** Доказать, что $(F^\perp)^\perp = F$, если $F$ — подпространство конечномерного пространства $E$.

**11.*** (Продолжение) Показать, что в предыдущей задаче достаточно предполагать $F$ конечномерным.

**12.** Векторы $e_1, \ldots, e_k$ попарно ортогональны и имеют единичную длину. Доказать, что

$$(x, e_1)^2 + \ldots + (x, e_k)^2 \leqslant (x, x)$$

для любого вектора $x$.

**13.** Доказать, что функции $1$, $\cos x$, $\cos 2x, \ldots$, $\cos nx$, $\sin x$, $\sin 2x, \ldots$, $\sin nx$ ортогональны в пространстве непрерывных функций на $[0, 2\pi]$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$.

**14.** Известно, что $a_1 \cos x + \ldots + a_{10} \cos 10x = 0$ при всех $x$. Доказать, что все коэффициенты $a_1, \ldots, a_{10}$ равны нулю.

**15.*** Известно, что $a_1 \cos x + \ldots + a_{10} \cos 10x \geqslant 0$ при всех $x$. Можно ли утверждать, что коэффициенты $a_1, \ldots, a_{10}$ все равны нулю?

**16.** В квадратной матрице $2 \times 2$ столбцы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^2$ (относительно стандартного скалярного произведения). Доказать, что её строки также образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^2$.

**17.*** (Продолжение) Доказать аналогичное утверждение для матриц $n \times n$.

**18.*** Доказать, что сумма квадратов длин проекций векторов ортонормированного базиса на $k$-мерное подпространство равна $k$.

**19.** Рассмотрим на пространстве многочленов степени меньше $n$ скалярное произведение $(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx$. Показать, что существует единственный (с точностью до умножения на константы) ортогональный базис $P_0, \ldots, P_{n-1}$, состоящий из многочленов степеней $0, \ldots, n-1$ (по одному каждой степени). Указать этот базис при $n = 3$.

**20.**$^\star$ (Продолжение) Показать, что многочлен $P_k$ имеет $k$ различных корней на отрезке $[0,1]$.

**21.**$^\star$ (Продолжение) Показать, что многочлен $P_k$ есть $k$-ая производная многочлена $x^k(1-x)^k$.

**22.**$^\star$ (Продолжение) Показать, что корни $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ многочлена $P_k$ обладают таким свойством: любой многочлен степени меньше $2k$, обращающийся в нуль в точках $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, имеет нулевой интеграл (по отрезку $[0,1]$).

**23.** Показать, что всякая линейная функция $f\colon E\to\mathbb{R}$, определённая на конечномерном евклидовом пространстве $E$, имеет вид $x\mapsto(x,e)$ для некоторого вектора $e\in E$.

**24.** Рассмотрим на $\mathbb{R}^2$ скалярное произведение с матрицей $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, то есть заданное формулой

$$(\langle x_1,x_2\rangle,\langle y_1,y_2\rangle)=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2.$$

Указать какой-либо ортонормированный базис для этого пространства.

**25.**$^\star$ (Продолжение) Можно ли найти базис, который был бы ортогональным одновременно для скалярного произведения предыдущей задачи и для стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^2$?

**26.** Найти расстояние в пространстве $\mathbb{R}^n$ (со стандартным скалярным произведением) от точки $\langle c_1,\ldots,c_n\rangle$ до подпространства, заданного уравнением $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0$ (относительно неизвестных $x_1,\ldots,x_n$).

## Гомоморфизмы групп

Пусть $G$ и $H$ — группы. Отображение $\varphi\colon G\to H$ называется *гомоморфизмом*, если $\varphi(g_1g_2)=\varphi(g_1)\varphi(g_2)$ для всех $g_1,g_2\in G$.

**1.** Какие из следующих отображений $\varphi\colon G\to H$ являются гомоморфизмами: (**а**) $\varphi(g)=e$ для всех $g\in G$ ($G$ и $H$ — произвольные группы); (**б**) $G=H$, $\varphi(g)=g^{-1}$ ($G$ — произвольная группа); (**в**) $G=H=\mathbb{Z}$, $\varphi(x)=2x$ ($\mathbb{Z}$ — группа целых чисел по сложению); (**г**) $G=H=\mathbb{Z}$, $\varphi(x)=x+1$; (**д**) $G=H$, $\varphi(g)=g\cdot g$ ($G$ — произвольная группа; точка обозначает операцию в группе $G$)?



**2.** Описать все гомоморфизмы $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$.

**3.** (Следствия из аксиом) Доказать, что (**а**) при гомоморфизме $\varphi\colon G\to H$ единица группы $G$ переходит в единицу группы $H$; (**б**) при гомоморфизме обратный элемент переходит в обратный: $\varphi(g^{-1})=(\varphi(g))^{-1}$.

**4.** Рассмотрим группу остатков от деления на $n$ с операцией сложения (обозначение: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). (**а**) Сколько существует гомоморфизмов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$? (**б**) Сколько существует гомоморфизмов $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

**5.**$^\star$ Указать все гомоморфизмы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ в группу ненулевых комплексных чисел по умножению.

**6.**$^\star$ Элемент $g$ группы $G$ имеет порядок $k$. Каким может быть порядок его образа $\varphi(g)$ при гомоморфизме $\varphi\colon G\to H$?

**7.**$^\star$ Найти все гомоморфизмы $S_3$ (группа перестановок трёх элементов) в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**8.**$^\star$ Указать гомоморфизм $S_n$ в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (помимо тривиального, переводящего все элементы в единицу).

**9.**$^\star$ Указать нетривиальный гомоморфизм $S_4$ в $S_3$.

**10.**$^\star$ Указать нетривиальный гомоморфизм аддитивной группы $\mathbb{R}$ (действительные числа по сложению) в единичную окружность на комплексной плоскости (комплексные числа, модуль которых равен 1, операция — умножение).

Взаимно однозначный гомоморфизм $\varphi\colon G\to H$ называют *изоморфизмом*, а группы $G$ и $H$ — изоморфными.

**11.** Показать, что в этом случае обратное отображение также является гомоморфизмом.

**12.** Доказать, что любые две двухэлементные группы изоморфны.

**13.**$^\star$ Сколько существует неизоморфных групп из $n$ элементов, если (**а**) $n=3$? (**б**) $n=4$?

**14.**$^\star$ Доказать, что если $p$ — простое число, то любые две группы из $p$ элементов изоморфны.

**15.** Указать изоморфизм между группой действительных чисел по сложению и группой положительных действительных чисел по умножению.

**16.** Группа симметрий треугольника состоит из всех движений плоскости, переводящих треугольник в себя. Доказать, что эта группа изоморфна группе $S_3$ (перестановки трёхэлементного множества).

**17.*** Доказать, что группа вращений куба (сохраняющих ориентацию — отражения не допускаются) изоморфна группе $S_4$. (Указание: посмотрите, как вращения действуют на большие диагонали куба).

**18.** Изоморфны ли группы $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ и $S_3$?

**19.** Изоморфны ли (аддитивные) группы $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$?

**20.*** (а) Доказать, что группы вращений икосаэдра и додекаэдра изоморфны. (б) Доказать, что эти группы изоморфны группе $A_5$ (чётные перестановки 5 элементов).

**21.** Доказать, что циклические группы одного порядка изоморфны.

**22.*** Сколько существует различных изоморфизмов между двумя циклическими группами порядка $n$?

**23.** Доказать, что любая подгруппа группы $\mathbb{Z}$ изоморфна $\mathbb{Z}$ или состоит только из нуля.

Отображение группы $G$ в себя, являющееся изоморфизмом, называется *автоморфизмом* группы $G$.

**24.** Найти все автоморфизмы группы $\mathbb{Z}$.

**25.** Описать все автоморфизмы группы $\mathbb{Q}$ рациональных чисел по сложению.

**26.*** Доказать, что для любого элемента $g$ группы $G$ отображение $h \mapsto ghg^{-1}$ является автоморфизмом группы $G$. (Такие автоморфизмы называют *внутренними.*)

**27.*** (Продолжение) Привести пример автоморфизма, не являющегося внутренним.

**28.** Пусть $G$ — конечная группа порядка $n$. (а) Доказать, что для любого элемента $g \in G$ отображение $f_g\colon h \mapsto gh$ является перестановкой элементов $G$ и тем самым может рассматриваться как элемент группы перестановок $S_n$. (б) Доказать, что отображение $\varphi\colon G \to S_n$, при котором $g \mapsto f_g$, является гомоморфизмом.

**29.*** (Продолжение) Тот же вопрос, если $f_g\colon h \mapsto ghg^{-1}$.



**30.** (Теорема Кэли) Доказать, что всякая конечная группа изоморфна некоторой подгруппе группы перестановок.

*Прямым произведением* групп $G$ и $H$ называется множество пар $\{(g,h) \mid g \in G, h \in H\}$ с операцией $(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$ (обозначение: $G \times H$).

**31.** (а) Доказать, что прямое произведение групп является группой. (б) Каков порядок этой группы? (в) Чему равен порядок элемента $(g,h)$, если порядки элементов $g$ и $h$ равны $m$ и $n$ соответственно? (г) Указать в группе $G\times H$ подгруппы, изоморфные $G$ и $H$ соответственно.

**32.** Будут ли изоморфны группы (а) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$; (б) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

**33.** При каких $m$ и $n$ группа $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ изоморфна $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$?

**34.*** Доказать, что любая подгруппа группы $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ либо изоморфна всей группе, либо изоморфна $\mathbb{Z}$, либо состоит из одного элемента.

**35.** Будет ли группа $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ изоморфна $\mathbb{Z}$?

**36.** Тот же вопрос для аддитивных групп $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}$.

Удивительным образом аддитивные группы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ изоморфны, но указать этот изоморфизм явно не удаётся (он строится с помощью «трансфинитной индукции»).

**37.*** Доказать, что группы $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}$ ($n$ сомножителей) при различных $n$ не изоморфны.

**38.*** Закончить и доказать утверждение: группа $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению изоморфна прямому произведению группы положительных действительных чисел по умножению и …

## Компактные метрические пространства

Метрическое пространство называют *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие этого пространства шарами радиуса $\varepsilon$.

**1.** Будет ли такое свойство равносильно полной ограниченности: ни для какого $\varepsilon > 0$ не существует бесконечного множества точек, попарные расстояния между которыми больше $\varepsilon$?

2. Пусть $M$ — вполне ограниченное пространство. Доказать, что найдётся такое $c$, что расстояние между любыми двумя точками не превосходит $c$.

3. Доказать, что во вполне ограниченном пространстве всякая последовательность имеет фундаментальную подпоследовательность.

4.* (Продолжение) Верно ли обратное?

Пространство называют *компактным*, если из всякого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

5. (а) Доказать, что отрезок компактен. (б) Доказать, что квадрат компактен.

6.* Компактны ли канторовское и бэровское пространства?

7. Пусть $x$ — точка компактного пространства $M$. Показать, что шар достаточно большого радиуса с центром в $M$ совпадает с $M$.

8. Подмножество $A$ метрического пространства $M$, рассматриваемое как метрическое пространство с индуцированной метрикой, компактно. Показать, что оно замкнуто (в пространстве $M$).

9. Доказать, что замкнутое подмножество компактного пространства компактно (как метрическое пространство с индуцированной метрикой).

10. Семейство множеств называют *центрированным*, если пересечение конечного числа любых множеств этого семейства непусто. Показать, что в компактном пространстве любое центрированное семейство множеств имеет общую точку.

11. Доказать, что в компактном пространстве любая последовательность имеет предельную точку (и сходящуюся подпоследовательность).

Как мы вскоре увидим, это свойство равносильно компактности метрического пространства.

12. Доказать, что если в пространстве любая последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность, то оно полно.



13. Доказать, что если в пространстве любая последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность, то оно вполне ограничено.

14. (Лемма Лебега) Пусть в пространстве $M$ любая последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность. Доказать, что для любого покрытия $M$ открытыми множествами найдётся такое $\varepsilon > 0$, что любой шар радиуса $\varepsilon$ целиком содержится в одном из множеств покрытия.

15. Вывести из предыдущих задач, что три свойства равносильны: (1) пространство компактно; (2) пространство полно и вполне ограничено; (3) всякая последовательность его точек имеет сходящуюся подпоследовательность.

16. Доказать, что произведение двух компактных пространств компактно.

17. Какие подмножества $\mathbb{R}^n$ компактны (с индуцированной метрикой)?

18. Доказать, что непрерывная функция на компактном пространстве (с действительными значениями) ограничена и достигает максимума и минимума.

19.* Доказать, что образ компакта при непрерывном отображении — компакт. (Как вывести отсюда утверждение предыдущей задачи?)

20.* Даны два компактных непересекающихся подмножества $A$ и $B$ (в произвольном пространстве). Доказать, что найдётся такое $\varepsilon > 0$, что расстояние между любой точкой множества $A$ и любой точкой множества $B$ не меньше $\varepsilon$.

21.* Верно ли это утверждение, если множества $A$ и $B$ лишь замкнуты? если одно из них замкнуто, а второе компактно?

Пусть $A$ и $B$ — метрические пространства. Функция $f\colon A \to B$ называется *равномерно непрерывной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что любые две точки пространства $A$, отстоящие менее чем на $\delta$, отображаются в точки, отстоящие менее чем на $\varepsilon$.

22. Показать, что непрерывная функция, определённая на компактном пространстве, равномерно непрерывна.

## Интегралы: вычисление

**1.** Доказать *формулу интегрирования по частям*:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Если $u'(x)\,dx$ обозначить через $du$, а $v'(x)\,dx$ — через $dv$, то можно написать $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

**2.** Объяснить с помощью интегрирования по частям следующее вычисление (указав функции $u$ и $v$): $\int x\sin x\,dx = -\int x\,d(\cos x) = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$.

**3.** Найти первообразные функций **(а)** $xe^x$; **(б)** $x\ln x$.

**4.*** …**(а)** $x\,\mathrm{arctg}\,x$; **(б)** $x^2\cos(3x)$.

**5.*** Найти $\ln(1000!)$ с точностью 10%.

**6.*** Вычислить первообразную функции $e^{ax}\sin(bx)$.

**7.*** Гамма-функция определяется следующим равенством: $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^a e^{-x}\,dx$ (несобственный интеграл по полупрямой определяется как предел интегралов по $[0, N]$ при $N \to +\infty$). Выразить $\Gamma(a+1)$ через $\Gamma(a)$. Почему гамма-функцию считают обобщением факториала?

**8.*** Доказать, что для дважды непрерывно дифференцируемой функции $f$ имеет место формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \int_0^h (h-t)f''(a+t)\,dt.$$

**9.*** Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для старших производных.

**10.*** Доказать, что существует предел при $a \to +\infty$ интеграла $\int_1^a (\sin x/x)\,dx$. (Аналогичная задача для рядов решается с помощью преобразования Абеля, которое аналогично интегрированию по частям.)

**11.*** Доказать, что если $f$ — непрерывно дифференцируемая функция на прямой, то $\int_0^1 f(t)\sin(nt)\,dt$ стремится к 0 при $n \to \infty$.

**12.*** (Продолжение) Доказать, что это верно и для произвольной непрерывной на $[0,1]$ функции.



**13.*** (Продолжение) Показать, что для бесконечно дифференцируемой функции с периодом 1 интеграл из задачи 11 есть $o(1/n^k)$ при любом $k$.

**14.** Пусть $F$ — первообразная функции $f$. Найти первообразную функции $x \mapsto f(ax+b)$, где $a$ и $b$ — некоторые числа.

**15.** Найти первообразные функций **(а)** $(4x-7)^8$; **(б)** $\frac{1}{25+x^2}$; **(в)** $\sin^2(3x)$; **(г)** $\sin(5x)\cos(18x)$.

**16.*** Пусть функция имеет вид $P(\sin x, \cos x)$, где $P$ — многочлен от двух переменных. Доказать, что её первообразная имеет вид $Q(\sin x, \cos x) + ax$, где $Q$ — также многочлен от двух переменных. Когда $a$ равно нулю?

**17.** Доказать *теорему о замене переменной в неопределённом интеграле*: если $F$ — первообразная функции $f$, а $\varphi$ — дифференцируемая функция, то $t \mapsto F(\varphi(t))$ есть первообразная функции $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

**18.** Объяснить с помощью теоремы о замене переменной (указав, что играет роль $F$, $f$, $\varphi$) следующее вычисление:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt = \\ = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2 \sin 2t}{4} + C = \frac{a^2}{2}\arcsin(x/a) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

**19.** Вычислить с помощью замены переменной первообразную функции $1/\sqrt{a^2 - x^2}$ (ответ мы знали и раньше).

**20.*** Вычислить первообразные функций **(а)** $\sqrt{a^2 + x^2}$; **(б)** $1/\sqrt{a^2+x^2}$. (Указание: использовать функции $\mathrm{ch}\,t = (e^t + e^{-t})/2$ и $\mathrm{sh}\,t = (e^t - e^{-t})/2$).

**21.** Объяснить с помощью теоремы о замене переменной следующее вычисление:

$$\int x^2\sin(x^3)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(x^3)\,d(x^3) = \\ = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C.$$

**22.** Найти первообразные функций (а) $xe^{-x^2}$; (б) $x/(1+x^4)$; (в) $\sin^2 2x \cos 2x$; (г) $\sqrt{1+t}/t$; (д) $1/(t\sqrt{1+t^2})$;

**23.** Дать точную формулировку и доказательство теоремы о замене переменной в определённом интеграле: интеграл $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ равен ..., если ...

**24.*** Найти интеграл $\int 1/(1+x^2)^2\,dx$.

**25.*** Обозначим через $J_n$ первообразную функции $1/(1+x^2)^n$. Доказать следующую рекуррентную формулу:

$$J_{n+1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)J_n\right).$$

Интегрируя рациональную дробь (отношение многочленов), полезно разложить её в линейную комбинацию многочлена и простейших дробей вида $1/(x-a)^k$ (если допускать комплексные $a$) или вида $1/(x-a)^k$, $1/(x^2+px+q)^k$ и $x/(x^2+px+q)^k$.

**26.*** Доказать, что такое представление всегда возможно.

**27.** Найти первообразные функций (а) $1/((x+1)(x+2))$; (б) $(x^5+1)/(x^3-1)$; (в) $1/(x^4+1)$.

**28.*** Доказать теорему о замене переменной для определённого интеграла: если $\varphi(t)$ дифференцируема и строго возрастает на отрезке $[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, обратная к ней функция дифференцируема на $[a,b]$, и функция $f$ интегрируема на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

(отметим, что первообразной у функции $f$ может не быть).

**29.** Вычислить интеграл $\int e^x \sin x\,dx$, вспомнив формулу $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

**30.** Вычислить интеграл $\int 1/(x^2+1)$ по аналогии с интегралом $\int 1/(x^2-1)$, вспомнив, что $x^2+1=(x+i)(x-i)$.

## Определители

Пусть $V$ — векторное пространство размерности $n$. Функция $d\colon V^n \to \mathbb{R}$, ставящая в соответствие $n$ векторам из $V$



некоторое число, называется *внешним произведением*, если выполнены следующие условия:

1) $d$ линейна по каждому из своих аргументов (*полилинейность*);

2) $d$ меняет знак при перестановке любых двух своих аргументов (*кососимметричность*).

**1.** Указать все такие функции (двух аргументов) в $\mathbb{R}^2$.

**2.** Доказать, что если среди векторов есть одинаковые, то их внешнее произведение равно нулю.

**3.*** (Продолжение) Показать, что требование предыдущей задачи равносильно кососимметричности (для полилинейных функций).

**4.** Пусть функция $d$ является внешним произведением и $d(x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots)=a$. Чему равно (а) $d(x_1+x_2, x_2-x_3, x_3, x_4,\ldots)$? (б) $d(x_1+x_2, x_2-x_1, x_3, x_4,\ldots)$?

**5.** Фиксируем базис в пространстве $V$ размерности $n$. Показать, что полилинейная функция на $V^k$ однозначно восстанавливается по своим значениям на наборах базисных векторов, причём эти $n^k$ значений можно выбрать произвольно.

**6.*** Полилинейные кососиммметрические функции вида $V^k \to \mathbb{R}$ (здесь $k$ не обязательно равно $n$) образуют векторное пространство. Какова его размерность?

**7.** Доказать, что два различных внешних произведения $n$ векторов в $n$-мерном пространстве отличаются постоянным множителем.

**8.** Доказать, что в $n$-мерном пространстве существует ненулевое внешнее произведение. (Указание: тут важно, что произведение нечётного числа транспозиций не может быть тождественной перестановкой.)

**9.** В каком случае (не являющееся тождественно нулевым) внешнее произведение обращается в нуль на $n$ векторах?

Говоря о внешнем произведении $n$ векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$, мы будем полагать, что произведение стандартных базисных векторов $e_1,\ldots,e_n$ равно 1. (Здесь $e_i$ — вектор, у которого на $i$-м месте стоит единица, а остальные — нули.)

Векторы $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ можно считать столбцами матрицы $n \times n$; их внешнее произведение (нормированное, см. выше) называют *определителем* матрицы и обозначают $\det(a_1, \ldots, a_n)$ или $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$.

**10.** Выписать формулу для определителя матрицы размера $2 \times 2$.

**11.** Тот же вопрос для матриц $3 \times 3$.

**12.** Числа $x_1, \ldots, x_n$ образуют решение системы линейных уравнений $x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = b$ (где $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}^n$). Доказать *правило Крамера*: $x_i \det(a_1, \ldots, a_n) = \det(a_1, \ldots, b, \ldots, a_n)$, где в правой части вектор $b$ стоит на $i$-м месте (вместо $a_i$). Остаётся ли это правило верным, если система имеет не одно решение?

**13.** Найти площадь треугольника (или параллелограмма), если известны координаты его вершин.

**14.*** Найти объём тетраэдра (или параллелепипеда), если известны координаты его вершин. (Указание: как разрезать куб на 6 равных тетраэдров?)

**15.*** Каков геометрический смысл внешнего произведения в $\mathbb{R}^2$ или в $\mathbb{R}^3$? (Ответ: «ориентированный объём».)

**16.*** Какова наименьшая площадь треугольника, все вершины которого имеют целые координаты? Каков наименьший объём тетраэдра, все вершины которого имеют целые координаты?

**17.*** Доказать, что если все вершины куба имеют целые координаты, то его сторона — целое число. (Аналогичное утверждение для плоскости неверно.)

**18.*** Указать аналог векторного произведения для трёх векторов в $\mathbb{R}^4$.

**19.** Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор. Рассмотрим два внешних произведения в $\mathbb{R}^n$ — стандартное (обозначаемое $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$), а также $Av_1 \wedge \ldots \wedge Aw_n$. Как мы знаем (задача 7), они отличаются множителем. Показать, что этот множитель равен определителю матрицы оператора $A$ в стандартном базисе.

**20.** (Продолжение) Вывести отсюда, что определитель произведения матриц равен произведению определителей.



**21.** Доказать формулу для определителя $(n \times n)$-матрицы:

$$\det \|a_{ij}\| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

(здесь сумма берётся по всем перестановкам $\sigma$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, а $\operatorname{sgn} \sigma$ равно 1 для чётных перестановок и $(-1)$ для нечётных).

**22.** Доказать, что определитель верхнетреугольной матрицы

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & l_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & l_n \end{pmatrix}$$

равен $l_1 l_2 \ldots l_n$.

**23.** Доказать, что определитель матрицы не меняется при транспонировании.

**24.** Что произойдёт с определителем, если из столбца матрицы вычесть другой столбец этой матрицы? переставить столбцы матрицы? сделать те же действия со строками?

**25.** Используя предыдущую задачу, найти определитель

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**26.*** Найти *определитель Вандермонда*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

(Указание: когда этот многочлен обращается в нуль?)

**27.** Используя предыдущую задачу, показать, что многочлен степени меньше $n$ однозначно определяется своими значениями в любых $n$ точках.

**28.** Доказать, что если матрица размера $(m+n)\times(m+n)$ разбита на квадраты $m\times m$, $n\times n$ и прямоугольники $m\times n$ и $n\times m$, причём один из прямоугольников — нулевой, то её определитель равен произведению определителей квадратов $m\times m$ и $n\times n$.

**29.** Пусть $A\colon V\to V$ — линейный оператор в $n$-мерном пространстве, в котором задано внешнее произведение. Показать, что выражение $Av_1\wedge\ldots\wedge Av_n$ (как функция векторов $v_1,\ldots,v_n$) также является внешним произведением. Согласно задаче 7, это внешнее произведение пропорционально исходному; коэффициент пропорциональности называют *определителем* оператора $A$.

**30.** Показать, что определитель оператора определён корректно (не зависит от выбора внешнего произведения). Чему равен определитель композиции операторов? У каких операторов определитель отличен от нуля? Чему равен определитель обратного оператора?

**31.** Показать, что определитель оператора равен определителю его матрицы (в любом базисе).

**32**.* Объяснить геометрический смысл определителя оператора. (Ответ: коэффициент изменения объёма.)

Обозначим через $A_{ij}$ матрицу размера $(n-1)\times(n-1)$, полученную из матрицы $A$ вычеркиванием $i$-й строки и $j$-го столбца.

**33.** Доказать формулу разложения определителя по $i$-й строке:

$$\det A=(-1)^{i+1}a_{i1}\det A_{i1}+\ldots+(-1)^{i+n}a_{in}\det A_{in},$$

а также аналогичную формулу разложения по $i$-му столбцу.

**34.** Для данной матрицы $A$ рассмотрим матрицу $B$, для которой $b_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ji}$. Вычислить произведения $AB$ и $BA$.

**35.** Написать формулу, выражающую элементы обратной матрицы через элементы исходной.

**36**.* Доказать, что многочлены $P(x)=p_nx^n+\ldots+p_0$ и $Q(x)=q_mx^m+\ldots+q_0$ (где $p_n\neq0$ и $q_m\neq0$) имеют общий



корень в поле комплексных чисел тогда и только тогда, когда найдутся ненулевые многочлены $s(x)$ и $t(x)$ степеней меньше $m$ и $n$ соответственно, для которых $s(x)P(x)+t(x)Q(x)=0$.

**37**.* (Продолжение) Сформулировать условия на $s$ и $t$ как систему линейных уравнений. Указать требование на коэффициенты многочленов $P$ и $Q$ (обращение в нуль некоторого определителя), при котором $P$ и $Q$ имеют общий корень в $\mathbb{C}$. Доказать, что этот определитель (называемый *результантом* $P$ и $Q$) равен $p_n^m q_m^n\prod_{i,j}(x_i-y_j)$, где $x_1,\ldots,x_n$ — корни многочлена $P$, а $y_1,\ldots,y_m$ — корни многочлена $Q$.

**38**.* (Продолжение) При каком условии многочлен $t^3+pt+q$ имеет кратный корень?

**39**.* Найти определитель матрицы размера $n\times n$:

$$\begin{pmatrix} x & y & 0 & \ldots & 0\\ 0 & x & y & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y & 0 & 0 & \ldots & x \end{pmatrix}$$

**40**.* Вычислить определитель матрицы размера $2n\times 2n$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \ldots & 0 & b\\ 0 & a & \ldots & b & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & b & \ldots & a & 0\\ b & 0 & \ldots & 0 & a \end{pmatrix}$$

(на двух диагоналях стоят числа $a$ и $b$, остальные — нули).

Вектор $x$ называется *собственным вектором* оператора $A\colon V\to V$, если $Ax$ пропорционально $x$, то есть $Ax=\lambda x$ для некоторого числа $\lambda$. Это число $\lambda$ называется *собственным значением*, соответствующим собственному вектору $x$.

**41**.* Собственные векторы $x_1,\ldots,x_k$ оператора $A$ имеют различные собственные значения $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$. Показать, что векторы $x_1,\ldots,x_k$ линейно независимы.

**42**.* Имеется оператор $A$ в $n$-мерном пространстве. Используя определители, указать многочлен степени $n$, корнями которого являются собственные значения оператора $A$ и только они. (Отсюда следует, что у оператора в $n$-мерном пространстве может быть не более $n$ собственных значений.)

**43.*** Оператор $A$ в $n$-мерном пространстве имеет $n$ различных собственных значений. Показать, что их произведение равно определителю матрицы оператора $A$.

**44.*** (Продолжение) Показать, что их сумма равна сумме диагональных элементов матрицы оператора $A$.

**45.*** Показать, что любой оператор в $\mathbb{R}^3$ имеет хотя бы один собственный вектор.

## Множества меры 0

Множество $A \subset \mathbb{R}$ *имеет меру* 0, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества $A$ конечным или счётным числом интервалов, сумма длин которых не превосходит $\varepsilon$. (Заметим, что общего определения меры у нас нет, так что слова «мера 0» надо воспринимать как идиому.)

**1.** (а) Доказать, что подмножество множества меры 0 также имеет меру 0. (б) Доказать, что всякое конечное или счётное множество имеет меру 0. (в) Доказать, что объединение конечного или счётного числа множеств меры 0 также имеет меру 0.

**2.** Доказать, что отрезок ненулевой длины не является множеством меры 0. (Указание: воспользоваться компактностью отрезка.)

**3.** Изменится ли определение множества меры 0, если разрешать только конечные объединения интервалов?

**4.** Выбросим из отрезка интервал, являющийся его средней третью; с каждым из двух оставшихся отрезков поступим точно так же; затем сделаем то же самое с каждым из четырёх оставшихся отрезков и так далее. Точки, которые не будут выброшены ни на каком шаге, образуют *канторово множество*. (а) Привести пример точки канторова множества, не имеющей вида $m/3^n$ при целых $m$ и $n$. (б) Показать, что канторово множество замкнуто. (в) Показать, что канторово множество несчётно. (г) Показать, что канторово множество имеет меру 0.



**5.*** Рассмотрим множество чисел на отрезке $[0, 1]$, в десятичном разложении которых нет цифры 7. Имеет ли оно меру 0?

**6.*** Пусть $A$ — множество меры 0. Показать, что множество квадратов всех чисел из множества $A$ также имеет меру 0.

**7.*** Число $\alpha \in [0, 1]$ будем называть хорошим, если доля единиц среди первых $N$ членов его двоичной записи стремится к $1/2$ при $N \to \infty$. Показать, что почти все числа отрезка $[0, 1]$ хорошие (множество плохих чисел имеет меру 0).

**8.*** Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция, а $E$ — множество нулей функции $f'$. Показать, что множество $f(E)$ имеет меру 0.

**9.*** Множества $A$ и $B$ имеют меру 0. Можно ли утверждать, что множество $A + B$, состоящее из всех сумм вида $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$, имеет меру 0?

**10.*** Функция $f$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, множество $A \subset [0, 1]$ имеет меру 0. Можно ли утверждать, что множество $f(A)$ имеет меру 0?

**11.*** (а) Показать, что окружность можно представить в виде счётного объединения непересекающихся множеств, любые два из которых отличаются поворотом. (б) Могут ли эти множества иметь меру 0?

**12.** Дать определение множества меры 0 для подмножеств плоскости. Зависит ли оно от выбора системы координат?

**13.*** Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ — множество меры 0. Рассмотрим те значения $x$, при которых $x$-сечение $A_x$ множества $A$ (множество тех $y$, при которых $\langle x, y\rangle \in A$) нельзя покрыть интервалами с суммой длин не больше 1. Показать, что такие $x$ образуют множество меры 0.

**14.*** (Продолжение) Показать, что множество тех $x$, при которых $A_x$ не является множеством меры 0, является множеством меры 0.

## Факторгруппы

С каждым гомоморфизмом $\varphi\colon G \to H$ связаны две подгруппы. *Ядро* гомоморфизма обозначается $\operatorname{Ker}\varphi$ и состоит из всех элементов $g \in G$, для которых $\varphi(g) = e$. *Образ* гомоморфизма обозначается $\operatorname{Im}\varphi$ и состоит из элементов $\varphi(g)$ для всех $g \in G$.

**1.** Доказать, что ядро гомоморфизма $\varphi\colon G \to H$ является подгруппой группы $G$, а образ — подгруппой в $H$.

**2.** Доказать, что гомоморфизм $\varphi\colon G \to H$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\varphi = H$ и $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$.

**3.** Группа $G$ конечна, $\varphi\colon G \to H$ — гомоморфизм. Доказать, что $|G| = |\operatorname{Ker}\varphi| \cdot |\operatorname{Im}\varphi|$. (Здесь $|X|$ — число элементов множества $X$.)

**4.*** Любая ли подгруппа группы $G$ является ядром некоторого гомоморфизма?

**5.*** Пусть $\varphi_1\colon G \to H_1$ и $\varphi_2\colon G \to H_2$ — гомоморфизмы, причём $\operatorname{Ker}\varphi_1 = \operatorname{Ker}\varphi_2$. Доказать, что группы $\operatorname{Im}\varphi_1$ и $\operatorname{Im}\varphi_2$ изоморфны.

**6.** Пусть $\varphi\colon G \to H$ — гомоморфизм. Показать, что его ядро обладает таким свойством: если $g_1g_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$, то и $g_2g_1 \in \operatorname{Ker}\varphi$.

Подгруппа $H$ группы $G$ называется *нормальной* (часто используется обозначение $H \triangleleft G$), если $g^{-1}hg \in H$ для любых $g \in G$, $h \in H$.

**7.** Доказать, что нормальность равносильна свойству, указанному в задаче 6.

Пусть $H$ — подгруппа группы $G$. Множества вида $gH$ (произведение фиксированного элемента $g \in G$ на все элементы подгруппы $H$ называют *левыми смежными классами* $G$ *по* $H$; множества вида $Hg$ — *правыми*.

**8.** (а) Доказать, что левые смежные классы задают разбиение группы $G$ (любой элемент принадлежит ровно одному классу). (б) Доказать, что это разбиение совпадает с аналогичным для правых смежных классов тогда и только когда, когда $H$ — нормальная подгруппа.

Очевидно, в абелевой группе любая подгруппа нормальна.

**9.** Указать подгруппу в $S_3$, не являющуюся нормальной.

**10.*** Доказать, что если порядок подгруппы $H$ равен половине порядка группы $G$, то $H$ нормальна.



**11.** Закончить и доказать утверждение: элементы $g_1$ и $g_2$ принадлежат одному и тому же смежному классу по подгруппе $\operatorname{Ker}\varphi$, если при гомоморфизме $\varphi$ ...

**12.** Доказать, что ядро гомоморфизма — нормальная подгруппа.

**13.** Пусть $H$ — подгруппа группы $G$. Определим операцию умножения на множестве левых смежных классов следующим образом: $g_1H \cdot g_2H = g_1g_2H$. (а) Почему это определение может не быть корректным? (б) Доказать, что если $H$ нормальна (т. е. левые смежные классы совпадают с правыми), то это определение корректно, и множество смежных классов с такой операцией является группой.

Эта группа называется *факторгруппой* группы $G$ по подгруппе $H$ и обозначается $G/H$.

**14.** Объяснить смысл обозначения $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ для группы вычетов по модулю $n$.

**15.*** Доказать, что факторгруппа $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ изоморфна группе комплексных чисел, равных по модулю единице, с операцией умножения.

**16.*** Объяснить, почему факторгруппу $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ по подгруппе $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ называют тором. (Тор — результат склеивания цилиндра в бублик.)

**17.** (Теорема о гомоморфизме) Пусть $\varphi\colon G \to H$ — гомоморфизм. Доказать, что группа $\operatorname{Im}\varphi$ изоморфна факторгруппе $G/\operatorname{Ker}\varphi$.

Словами: «гомоморфный образ группы // изоморфен факторгруппе // по ядру гомоморфизма».

**18.** Что даёт эта теорема для рассмотренных ранее примеров гомоморфизмов?

**19.*** В группе движений плоскости рассмотрим подгруппу параллельных переносов и подгруппу вращений (вокруг данной точки). Будут ли эти подгруппы нормальными? Если да, каковы будут факторгруппы?

**20.*** Найти факторгруппу группы комплексных чисел, модуль которых равен единице (с операцией умножения) по её подгруппе, составленных из корней степени $n$ из единицы.

**21.*** Доказать, что всякая конечная абелева группа изоморфна факторгруппе группы $\mathbb{Z}^n$ (при некотором $n$) по некоторой её подгруппе.

**22.*** Доказать, что всякая конечная абелева группа изоморфна прямой сумме циклических.

**23.*** Построить группу $F$ и два её элемента $f_1$ и $f_2$ с таким свойством: для любой группы $G$ и любых двух элементов $g_1, g_2 \in G$ существует единственный гомоморфизм $F \to G$, переводящий $f_1$ в $g_1$ и $f_2$ в $g_2$. (Такая группа называется *свободной* группой с образующими $f_1$ и $f_2$.)

**24.*** (а) Описать все замкнутые подгруппы группы $\mathbb{R}$. (б) Описать все замкнутые подгруппы группы $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

## Вероятности

Пусть задано конечное множество, и каждому его элементу приписано неотрицательное число, причём сумма этих чисел равна 1. Такое множество называют *вероятностным пространством* (конечным), его элементы называют *исходами*, а приписанные им числа — *вероятностями* исходов.

Пример ($n$-кратное бросание честной монеты). Исходами являются последовательности из $n$ нулей и единиц (орлов и решек); все исходы равновероятны (имеют вероятность $1/2^n$).

*Событием* называют множество исходов; *вероятностью* события называют сумму вероятностей составляющих его исходов. Если все исходы равновероятны, то вероятность события есть отношение числа «благоприятных» исходов (входящих в событие) к общему числу исходов. Вероятность события $A$ обозначают $\Pr[A]$.

**1.** Найти вероятность того, что при $n$-кратном бросании честной монеты (а) не выпадет ни одного орла; (б) выпадет не более одного орла; (в) выпадет хотя бы один орёл; (г) выпадет ровно два орла; (д) выпадет нечётное число орлов.

**2.** Какое событие при 100-кратном бросании честной монеты более вероятно: выпадение 49 орлов или 50 орлов? Во сколько раз?

**3.** Каково вероятностное пространство для $n$-кратного бросания «честной» игральной кости (на гранях написаны числа от 1 до 6)? Что вероятнее: при шести бросаниях получить хотя бы одну шестёрку или не получить ни одной шестёрки?



**4.** Игральную кость бросили два раза и результаты сложили. Какое значение суммы наиболее вероятно?

**5.** Игральную кость бросили $n$ раз. (а) Какова вероятность выпадения ровно $k$ шестёрок? (б) При каком $k$ эта вероятность максимальна?

**6.** Колоду из $N$ карт, на которых написаны числа $1, \ldots, N$, тасуют в случайном порядке. (а) Каково соответствующее вероятностное пространство? (б) Какова вероятность того, что число 1 будет стоять на первом месте? (в) Какова вероятность того, что число 3 будет идти раньше числа 2, но после числа 1?

**7.*** (Продолжение) Какова вероятность того, что ни одна карта не будет стоять на прежнем месте (карта с числом $i$ не будет стоять на $i$-м месте)?

**8.** В лотерее надо указать 6 чисел от 1 до 49, при розыгрыше также выбирают случайно 6 чисел от 1 до 49. Какова вероятность (а) угадать все шесть чисел? (б) не угадать ни одного числа из шести? (в) угадать ровно 5 чисел из шести?

**9.** Даны вероятности событий $A$, $B$ и «$A$ и $B$» (произошли оба события $A$ и $B$). Найти вероятность события «$A$ или $B$» (произошло хотя бы одно из событий $A$ и $B$)?

**10.*** Имеются $n$ событий, причём вероятность каждого из них равна $p$. Показать, что вероятность того, что произойдут не менее $k$ из этих событий одновременно, не больше $np/k$.

*Условной вероятностью* события $A$ при условии события $B$ называют отношение $\Pr[A|B] = \Pr[A \text{ и } B]/\Pr[B]$. (Предполагается, что $\Pr[B] > 0$.)

**11.** (а) Найти условную вероятность выпадения двух орлов в двух бросаниях, если известно, что хотя бы один орёл выпал; (б) ...что на первом шаге выпал орёл; (в) ...что на втором шаге выпал орёл.

Событие $A$ называют *независимым* от события $B$, если $\Pr[A|B] = \Pr[A]$.

**12.** Доказать, что отношение независимости симметрично: если $A$ независимо от $B$, то $B$ независимо от $A$.

**13.** Будут ли события «выпало чётное число» и «выпало число, делящееся на 3» независимы при бросании кости?

**14.** (**а**) Будут ли (для трёх бросаний монеты) события «при первом бросании монеты выпал орёл» и «выпало ровно два орла» независимы? (**б**) Тот же вопрос для событий «при первом бросании выпал орёл» и «число орлов нечётно». (**в**) Тот же вопрос для событий «при первом бросании выпал орёл» и «при втором и третьем бросании был хотя бы один орёл».

**15.** Событие $B$ и событие $C$ независимы от события $A$. Можно ли утверждать, что событие «$B$ и $C$» независимо от события $A$?

**16.*** Монету бросают $n$ раз. Событие $A$ определяется результатами первых $k$ бросаний, событие $B$ — результатами последних $n-k$ бросаний. Показать, что события $A$ и $B$ независимы.

**17.*** Дать определение независимости трёх событий $A$, $B$ и $C$ (из которого следовала бы попарная независимость, а также, скажем, независимость события $A$ и события «$B$ и $C$»).

**18.** Найти условную вероятность $\Pr[A|B]$, если известна условная вероятность $\Pr[B|A]$, а также безусловные вероятности $\Pr[A]$ и $\Pr[B]$. (Ответ к этой задаче называют *формулой Байеса*.)

**19.** Какое вероятностное пространство естественно рассматривать для бросаний несимметричной монеты с вероятностью выпадения орла $p$? (Указание: бросания независимы.)

**20.*** Имеется $N$ мешков по $N$ монет, в каждом мешке $\lambda$ фальшивых. Мы проверяем наугад по одной монете из мешка. Каковы вероятности найти среди них $0, 1, 2, \ldots$ фальшивых (при $N \to \infty$ и фиксированном $\lambda$)?

**21.*** В очередь за газетами ценой в полтинник становятся в случайном порядке $n$ человек с полтинниками и $n$ человек с рублями. Какова вероятность того, что всем хватит сдачи, если изначально ни у них, ни у продавца других денег нет?

## Блуждания

На прямой дороге стоит пьяный, который делает случайным образом шаги вперёд и назад (с вероятностью $1/2$).



**1.** Найти вероятность его попадания в данную точку дороги (**а**) через один шаг; (**б**) через два шага; (**в**) через пять шагов.

**2.** Для какой точки вероятность оказаться там через $n$ шагов будет наибольшей? Показать, что эта вероятность стремится к нулю при $n \to \infty$.

**3.*** Найти среднее значение квадрата смещения за $n$ шагов (рассматриваются все $2^n$ вариантов его движения, для каждого варианта смещение возводится в квадрат и берётся среднее арифметическое).

**4.*** Показать, что вероятность отойти на расстояние более чем $n/100$, сделав $n$ шагов в случайном направлении, стремится к нулю при $n \to \infty$.

Пусть теперь на дороге в $k$ шагах впереди от пьяного имеется канава. Пусть $p(n,k)$ — вероятность не упасть в канаву за $n$ шагов. Например, $p(0,1) = 1$ и $p(1,1) = 1/2$ (шаг вперёд приводит к падению, шаг назад — нет).

**5.** (**а**) Найти $p(n,k)$ при $n = 1, 2, 3, 4$ (и при всех $k$). (**б**) Как найти значения $p(n,k)$ при данном $n$ и при всех $k$, если известны значения $p(n-1,k)$ при всех $k$?

**6.** (**а**) Показать, что $p(n,k)$ убывает с ростом $n$ (для фиксированного $k$) и потому стремится к некоторому пределу $p_\infty(k)$. (**б**) Как связаны $p_\infty(k-1)$, $p_\infty(k)$ и $p_\infty(k+1)$? (**в**) Показать, что $p_\infty(k) = 0$ при всех $k$.

Последнее утверждение часто выражают так: каково бы ни было начальное расстояние до канавы, *почти наверняка* пьяный рано или поздно свалится в неё.

**7.** Игрок приходит в игорный дом и играет в орлянку (ставит рубль, с вероятностью $1/2$ проигрывает его, а с вероятностью $1/2$ получает ещё рубль). Когда деньги кончаются, он уходит, разорившись. Показать, что каков бы ни был начальный капитал игрока, вероятность не разориться после $n$ партий стремится к нулю с ростом $n$.

**8.*** Пусть вероятность сделать шаг вперёд (к канаве) равна $1/3$, а вероятность пойти назад равна $2/3$. Какова вероятность избежать падения в канаву, находясь на расстоянии $k$ шагов от неё?

**9**.* Показать, что с ростом $n$ вероятность не вернуться ни разу в исходную точку, сделав $n$ шагов (по дороге без канав), стремится к нулю.

**10**.* Пусть теперь на дороге есть две канавы: впереди в $k$ шагах и позади в $l$ шагах. Найти вероятность свалиться в ту и в другую канавы (пределы вероятности сделать это за $n$ шагов при $n \to \infty$).

**11**.* Игрок приходит в игорный дом с капиталом в $k$ рублей и играет, пока не проиграется или пока не выиграет $l$ рублей. Какова вероятность того, что он уйдёт с выигрышем?

**12**.* Пьяный блуждает по круговому шоссе длиной в $n$ шагов. Отметим точку шоссе, в которую он придёт позже всего. (Это может быть любая точка шоссе, кроме исходной.) Какова вероятность того, что ей окажется точка шоссе, соседняя с исходной?

**13**.* (Продолжение) Показать, что все точки шоссе, кроме исходной, имеют равную вероятность оказаться последними.

Рассмотрим теперь блуждание по двумерной сетке (точка находится в одном из узлов и с вероятностью $1/4$ может сдвинуться влево, вправо, вверх и вниз.

**14**.* Предположим, что точка находится внутри области, ограниченной канавой (скажем, прямоугольной формы). Показать, что вероятность не попасть в канаву после $n$ шагов стремится к $0$ при $n \to \infty$.

**15**.* В кольце между двумя канавами находится точка. Рассмотрим вероятности свалиться в ту и другую канаву после $n$ шагов. (а) Показать, что эти вероятности имеют пределы при $n \to \infty$ (обозначим их через $p_1(x)$ и $p_2(x)$, где $x$ — исходная точка) и что $p_1(x) + p_2(x) = 1$ при всех $x$ внутри кольца. (б) Величины $p_1$ и $p_2$ можно найти экспериментально: сделаем рёбрами сетки проводники единичного сопротивления, подадим во все точки внутренней канавы потенциал $1$, а во все точки внешней — потенциал $0$. Показать, что потенциал в точке $x$ равен $p_1(x)$. (в) Пусть $A$ — точка внутри канавы. Рассмотрим вероятность вернуться в точку $A$, не попав в канаву (начав блуждания из $A$). Показать, что эта вероятность равна $1 - \frac{1}{4R}$, где $R$ — электрическое сопротивление между точкой $A$ и точками канавы (мы считаем, что все точки канавы соединены проводником нулевого сопротивления).



**16**.* (Продолжение) (а) Показать, что сопротивление между квадратной канавой размера $2N \times 2N$ и её центром стремится к бесконечности при $N \to \infty$. (б) Показать, что это сопротивление заключено между $c_1 \log N$ и $c_2 \log N$ при некоторых $c_1$ и $c_2$. (Указание: токи распределяются так, чтобы выделяемая энергия была минимальной.)

**17**.* Показать, что точка, блуждающая по плоскости, почти наверное вернётся в начальное положение.

**18**.* Показать, что для трёхмерного пространства аналогичное утверждение неверно.

## Разное

**1**. Черепаха ползла $N$ минут. При этом её наблюдали несколько человек, каждый по одной минуте — иногда несколько сразу, но так, что она ни в какой момент не оставалась без наблюдения. За время наблюдения каждого человека она проползла не более метра. Доказать, что общее расстояние, которая она проползла, не больше $2N$ метров.

**2**. Имеется последовательность из $mn + 1$ чисел. Доказать, что она имеет либо возрастающую подпоследовательность длины $m + 1$, либо убывающую длины $n + 1$.

**3**. Имеется несколько кружков с пересекающимися участниками. Мы хотим в каждом из них выбрать старосту так, чтобы ни один человек не был старостой сразу двух кружков. Доказать, что следующее условие необходимо и достаточно: объединение любых $k$ кружков содержит не менее $k$ человек.

**4**. Построить касательную, проходящую через заданную точку (а) к окружности (б) к параболе одной линейкой.

**5**. Доказать, что конечным числом внутренностей парабол нельзя покрыть плоскость.

**6**. Доказать, что если круг покрыт бумажными полосками, то сумма ширин этих полосок не меньше диаметра круга.

7. Объединение $N$ фигур имеет площадь $N$. Доказать, что для любого $k < N$ можно выбрать из них $k$ фигур, площадь объединения которых не меньше $k$.

8. Единичный квадрат разрезан на квадраты. Доказать, что стороны всех квадратов рациональны.

9. Прямоугольник можно разбить на квадраты. Доказать, что его стороны соизмеримы.

10. $N$ школьников решали $N$ задач. Каждый из них решил $k$ задач ($k \leqslant N$) и каждую задачу решило $k$ школьников. Доказать, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решённых им задач и все задачи были рассказаны.

11. Доказать, что любая перестановка элементов прямоугольной матрицы есть композиция трёх перестановок: первая и третья внутри строк, вторая внутри столбцов.

12. В бесконечной двумерной таблице все числа положительны и каждое из них есть среднее арифметическое четырёх своих соседей. Доказать, что все числа равны. (Предостережение: числа не обязательно целые!)

13. Существует ли многочлен (а) от одной переменной (б) от двух переменных, который всюду положителен, но точная нижняя грань его значений равна нулю?

14. Доказать, что для комплексного многочлена степени меньше $n$ значение в центре правильного $n$-угольника есть среднее арифметическое его значений в вершинах.

15. (Продолжение) Доказать, что для комплексного многочлена значение в центре окружности равно его среднему по окружности.

16. Дан граф и две его вершины А и Б. Доказать, что следующие условия эквивалентны: (1) из А в Б ведут два пути, которые не имеют общего ребра; (2) нельзя удалить одно ребро так, чтобы А и Б лежали в разных компонентах связности.

17. (а) Доказать, что если многочлен от одной переменной всюду положителен, то он представляется в виде суммы квадратов многочленов. (б) Верно ли это утверждение для многочленов от двух переменных?



18. Привести пример монотонно возрастающей функции на отрезке $[0, 1]$, множеством точек разрыва которой является (а) множество всех рациональных точек отрезка; (б) произвольное счетное множество $\{a_1, a_2, \ldots\} \subset [0, 1]$.

19. Привести пример всюду дифференцируемой функции $f(x)$, имеющей при $x = 0$ локальный минимум, и такой, что производная $f'(x)$ не сохраняет знака ни в какой односторонней окрестности точки $0$.

20. Функция $F(x)$ имеет период $1$ и равна $|x|$ при $-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2$. Определим функцию $f_n(x)$ равенством $f_n(x) = F(x) + \frac{1}{4}F(4x) + \frac{1}{16}F(16x) + \cdots + \frac{1}{4^n}F(4^n x)$. (а) Построить графики функций $f_0, f_1, f_2, f_3$; (б) Доказать, что предел $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ существует при всех $x$ и является непрерывной функцией; (в) Доказать, что $f(x)$ не имеет производной ни при каком $x$; (г) Доказать, что $f(x)$ не монотонна ни на одном интервале действительной прямой.

21. Указать бесконечно дифференцируемую функцию $f(x)$, равную $0$ при $|x| \geqslant 2$ и равную $1$ при $|x| \leqslant 1$.

22. На плоскости дано $n$ прямых общего положения (никакие две прямых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке). Доказать, что среди частей, на которые эти прямые делят плоскость, не меньше $n-2$ треугольников.

23. После проведения шахматного турнира оказалось, что для каждого непустого множества его участников существует участник, набравший нечетное число очков в играх с участниками, вошедшими в это множество. Доказать, что число участников турнира четно.

24. На листе клетчатой бумаги нарисован квадрат (стороны идут по линиям сетки). В крайних клетках квадрата (на границе) расставлены числа. Доказать, что можно единственным образом заполнить числами оставшиеся клетки квадрата так, чтобы число в каждой клетке равнялось среднему арифметическому своих соседей.

## Контрольная работа

1. Даны три вектора $a, b, c$ на плоскости. В каких случаях можно найти числа $\lambda, \mu, \nu$, не равные нулю одновременно,

для которых $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$ и $\lambda + \mu + \nu = 0$? (Ответ сформулировать в геометрических терминах.)

**2.** Лежит ли функция $\sin x$ в линейной оболочке функций $\cos 2x$ и $\sin 2x$?

**3.** Рассмотрим пространство многочленов степени не больше 7, делящихся на многочлен $(x-1)(x-2)$. Какова его размерность? Указать базис в этом пространстве.

**4.** Те же вопросы для многочленов степени не выше 7, делящихся на $x^2+x+1$.

**5.** При каких $\lambda$ векторы $(\lambda, 1, 0)$, $(0, \lambda, 1)$, $(0, 0, \lambda-1)$ линейно зависимы?

**6.** Доказать, что если любой вектор $k$-мерного пространства $V$ линейно выражается через векторы $x_1, \ldots, x_n$, то из этих векторов можно выбрать базис (отбросив часть).

**7.** Сколькими способами можно выбрать базис в предыдущей задаче? (Указать максимальное и минимальное число вариантов, считая, что все векторы ненулевые.)

**8.** В магическом кубе $2 \times 2 \times 2$ суммы по любых прямым, параллельным осям координат, а также по любой из главных диагоналей равны. Найти размерность пространства таких кубов.

## Контрольная работа

**1.** Оператор $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Указать все векторы, для которых $Fx$ пропорционально $x$, и соответствующие коэффициенты пропорциональности.

**2.** Система линейных уравнений с целыми коэффициентами и правыми частями имеет решение, в котором одна из координат иррациональна. Показать, что она имеет бесконечно много решений.

**3.** Какую матрицу имеет оператор $\varphi$ (действующий в двумерном пространстве) в базисе $e_1, e_1+e_2$, если он имеет в базисе $e_1, e_2$ матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

**4.** Тот же вопрос для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.



**5.** Тот же вопрос для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

**6.** Даны различные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$; в каждой из точек $\alpha_i$ задано значение многочлена $P$ и всех его производных, меньших $k_i$. Доказать, что по таким данным всегда можно восстановить многочлен степени меньше $k_1 + \ldots + k_m$, причём единственным образом.

**7.** Найти числа $p, q$, для которых $A^3 + pA^2 + qA + r = 0$, где $A$ — матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**8.** Доказать, что для всякого оператора $\varphi$ найдётся многочлен $P$, для которого $P(\varphi)) = 0$. (Подстановка оператора в многочлен имеет смысл, так как операторы можно возводить в степень и умножать на числа.)

**9.** Доказать, что если $\varphi\colon U \to U$ — линейный оператор, для которого $\varphi^n = 0$, то оператор $E + \varphi$ (отображающий $x$ в $x + \varphi(x)$) обратим. (Указание: обратный оператор есть многочлен от $\varphi$.)

# Популярные лекции по математике

Большинство задач, решаемых школьниками, обсуждается с ними на уроках, так что решения они не записывают. Чтобы научить школьников писать связные математические тексты, мы время от времени (не чаще раза в неделю) рассказывали им что-либо не очень сложное (рассказ длился не более одного урока) и достаточно замкнутое в себе, а затем просили принести письменное изложение рассказанного. В этом разделе мы приводим темы таких лекций (с комментариями).

## 1997 – 1998 год

1. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики для целых чисел. (Разные доказательства).

2. Теорема Эйлера о соотношении $В - Р + Г = 2$ для выпуклого многогранника. (Доказательство с проектированием на плоскость и удалением рёбер).

3. Проективная геометрия и двойное отношение. (Параллельное и центральное проектирование. Двойное отношение, его сохранение при проективных преобразованиях. Применение к «задаче о бабочке».)

4. Проективная геометрия, продолжение. (Проективные преобразования совпадают с дробно-линейными.)

5. Непланарные графы. (Полный пятивершинник и граф «три дома, три колодца» нельзя нарисовать на плоскости так, чтобы никакие два ребра не пересекались — доказательство с помощью формулы Эйлера.)

6. Теорема Дезарга. (Различные доказательства.)

7. Гармонический ряд, бесконечность множества простых. (Доказательство с помощью бесконечного произведения.)

8. Экстремальные задачи. ((а) Задача о минимальном пути света у зеркала. Принцип Ферма. (б) Система стремится в положение с минимальной энергией: шар в ямке. (в) Груз на пружине (сумма энергии тяготения и энергии пружины, вывод формулы $F = -kx$ из соображений энергии). (г) Физическое решение задачи о минимальном пути. (д) Преломление, закон Снеллиуса.)



9. Построение квадратных корней циркулем и линейкой. (Построение правильного пятиугольника. Теорема: координаты всех построенных объектов выражаются через координаты исходных с помощью операций сложения, умножения и взятия квадратного корня.)

10. Экстремальные задачи, продолжение. (Разные решения задачи $XA + XB + XC \to \min$ для треугольника $ABC$: (а) Три грузика — равновесие сил. (б) Задача при фиксированном $AX$: отражение света в окружности. Другое доказательство равенства всех углов. (в) Решение с поворотом на $120°$. (г) Другое математическое решение. (д) Задача о мыльной плёнке.)

11. Дроби Фарея. (Возьмём дроби $0/1$ и $1/1$. Далее, между каждыми двумя дробями $a/b$ и $c/d$ будем записывать новую дробь $\frac{a+c}{b+d}$. Тогда мы в конце концов получим все несократимые дроби отрезка $[0, 1]$.)

12. Эллипс. (Определение эллипса как геометрического места точек, сумма расстояний от которых до двух данных постоянна. Три доказательства свойства касательной к эллипсу (сравнение скоростей, принцип Ферма и отражение от прямой). Эллипс как сечение цилиндра (шары Данделена).)

13. Последовательность Фибоначчи. (Явная формула для чисел Фибоначчи: поиск геометрических последовательностей среди всех фибоначчиевых.)

14. Парабола. (Парабола как предел эллипсов и как геометрическое место точек. Фокальное (оптическое) свойство; уравнение параболы. Задача: на доске нарисовали параболу $y = x^2$ и стёрли оси координат — восстановить оси и единичный отрезок.)

15. Checkers. (О задачах, связанных с игрой «checkers», где фишки перепрыгивают друг через друга. [Рассказывал на английском языке наш гость из США J. Bem.])

## 1998 – 1999 год

1. Малая теорема Ферма и теорема Вильсона. (Малая теорема Ферма: если $p$ простое, то $a^p \equiv a (\mathrm{mod}\ p)$. Теорема Вильсона: если $p$ простое, то $(p-1)! + 1$ делится на $p$.)

2. Теорема Брианшона. (Если шестиугольник описан около окружности, то три его большие диагонали (соединяющие вершины через три) будут пересекаться в одной точке. Доказательство с помощью гиперболоида.)

3. Производящие функции. (Понятие о производящих функциях. Уравнение на производящую функции для чисел Фибоначчи и явная формула для чисел Фибоначчи.)

4. Теорема Кантора – Бернштейна. (Если $A$ равномощно подмножеству $B$, а $B$ равномощно подмножеству $A$, то $A$ и $B$ равномощны.)

5. Описание всех пифагоровых троек. (Общие формулы для «несократимых» пифагоровых троек: $(b^2 - a^2, 2a, a^2 + b^2)$, где $a$ и $b$ взаимно просты и имеют разную чётность.)

6. Системы линейных уравнений. (Если неизвестных больше, чем уравнений, то у системы есть ненулевое решение. Доказательство с приведением к ступенчатому виду.)

7. Основная теорема алгебры. (Всякий многочлен с комплексными коэффициентами степени больше 1 (то есть не константа) имеет хотя бы один корень. (Следствие: имеет линейный множитель. Следствие: разлагается на линейные множители.) Доказательство: «дама с собачкой» — подсчёт индекса кривой.)

8. Кососимметрические формы в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. (Кососимметрическая форма зависит только от значения на $n$ базисных векторах; формулы для ориентированной площади и объёма.)

9. Векторное произведение и его свойства. (Определение векторного произведения с помощью кососимметической формы. Билинейность, геометрические свойства, запись в координатах.)

10. Индукция и фундированные множества. (Когда в упорядоченном множестве можно применять индукцию? Примеры решения задач.)

11. Основная теорема о симметрических многочленах. (Любой симметрический многочлен есть линейная комбинация произведений элементарных симметрических многочленов. Доказательство с индукцией по старшему члену.)



12. Конечные поля. Мультипликативная группа конечного поля. (Если $F$ — конечное поле, то мультипликативная группа $F^*$ — циклическая.)

13. Вложенные параллелепипеды. (Сумма измерений внутреннего параллелепипеда меньше суммы измерений внешнего. Три доказательства.)

## 1999 – 2000 год

1. Принцип Дирихле и линейная алгебра. (Равносильность условий $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ и $\operatorname{Im}\varphi = V$ для линейного оператора $\varphi\colon V \to V$. Дискретная задача о теплопроводности, распределение токов и задача об удалении/добавлении сопротивления в электрическую цепь.)

2. Кватернионы. (Матричная модель кватернионов. Норма, обратимость. Кватернионы образуют тело.)

3. Производящие функции, продолжение. (Подсчёт числа счастливых билетов с помощью производящих функций.)

4. Полуцелые прямоугольники. (Если прямоугольник разбит на несколько меньших, и у каждого из них одна из сторон целая, то этим свойством обладает и исходный прямоугольник. Различные доказательства.)

5. Алгебраические числа. (Алгебраические числа (корни многочленов с целыми коэффициентами) образуют поле. Минимальный многочлен алгебраического числа.)

6. Теорема Дирихле. (Простых чисел в прогрессиях $4k+1$, $4k+3$ бесконечно много.)

7. Проективная плоскость и квадрики. (Квадрики на проективной плоскости. Сведение уравнения четвёртой степени к кубическому с помощью пучка квадрик.)

8. Игра «Рубль и два». (Двое играют в такую игру: один загадывает монету достоинством в один рубль или в два, а другой отгадывает. Если второй угадывает, он получает монету, если нет, платит первому некоторую сумму. Какой должна быть эта сумма (чтобы игра была честной)? [Эту задачу решили (и рассказывали решение) сами школьники.])

9. Теорема Лиувилля. (Приближение действительных чисел рациональными. Число $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ трансцендентно.)

## Литература

[1] Гервер М. Л., Константинов Н. Н., Кушниренко А. Г. Задачи по алгебре и анализу, предлагавшиеся учащимся 9 и 10 классов. В сб.: Обучение в математических школах. М.: 1965.

[2] Константинов Н. Н. Введение в математический анализ (курс задач для IX – X классов). В сб.: Углублённое изучение алгебры и анализа. Составители С. И. Шварцбурд, О. А. Боковнев, М.: Просвещение, 1977, с. 6–76.

[3] Давидович Б. М., Пушкарь П. Е., Чеканов Ю. В. Математический анализ в математических классах пятьдесят седьмой школы. М.: МЦНМО, Черо, 1998.

Издательство Московского Центра
непрерывного математического образования

Вёрстка: М. Ушаков, В. Шувалов

Лицензия ИД №01335 от 24.03.2000 г.

Подписано в печать 16.05.2000. Формат 84 × 108/32.
Печать офсетная. Печ. л. 8,5
Тираж 1000 экз. Заказ 4900

МЦНМО
121002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Отпечатано в Производственно-издательском
комбинате ВИНИТИ.
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403.
Тел. 554-21-86