Introduction au Traitement du signal

Marc Chaumont

Introduction au Traitement du signal

- Sources utilisées pour ce cours :
  - P. Furon (http://www.ecole.ensicaen.fr/~furon/)
  - J.-P. Muller (http://www.ta-formation.com)
  - M. Chare (années précédant 2006).

Plan

- Introduction - Définition d’un signal
- La chaîne de traitement du signal
- Étude de signaux analogiques particuliers
- Numérisation ou acquisition du signal
- Étude de signaux discrets particuliers
- Le produit de convolution
- Introduction à la transformée de Fourrier

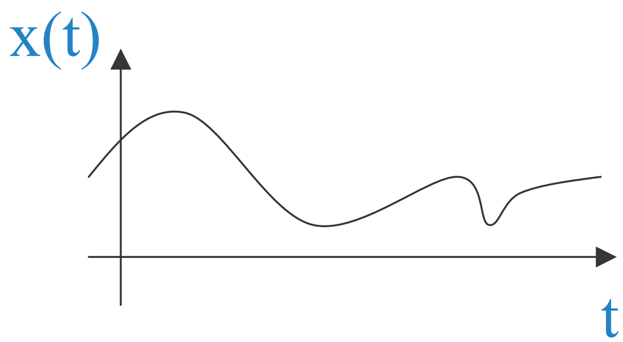
1- Introduction

1- Définition d'un signal

- Le support d'un signal peut être une tension, un courant, une onde (radio, TV, radar, infra-rouge, lumineuse) …
- L'information contenue dans un signal peut être un **message** audio, vidéo, binaire …

1- Définition d'un signal

- Un signal est une grandeur physique véhiculant une information au cours du temps.
- C'est donc une fonction notée $x(t)$ qui varie en fonction du temps t.

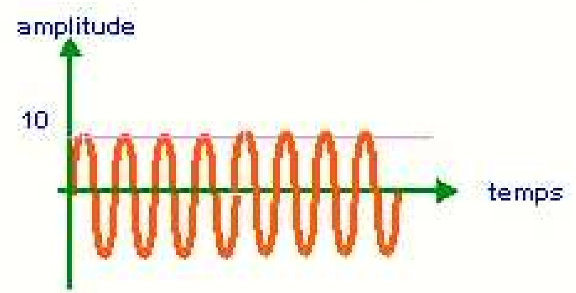


1- Définition d'un signal

L'oscillogramme

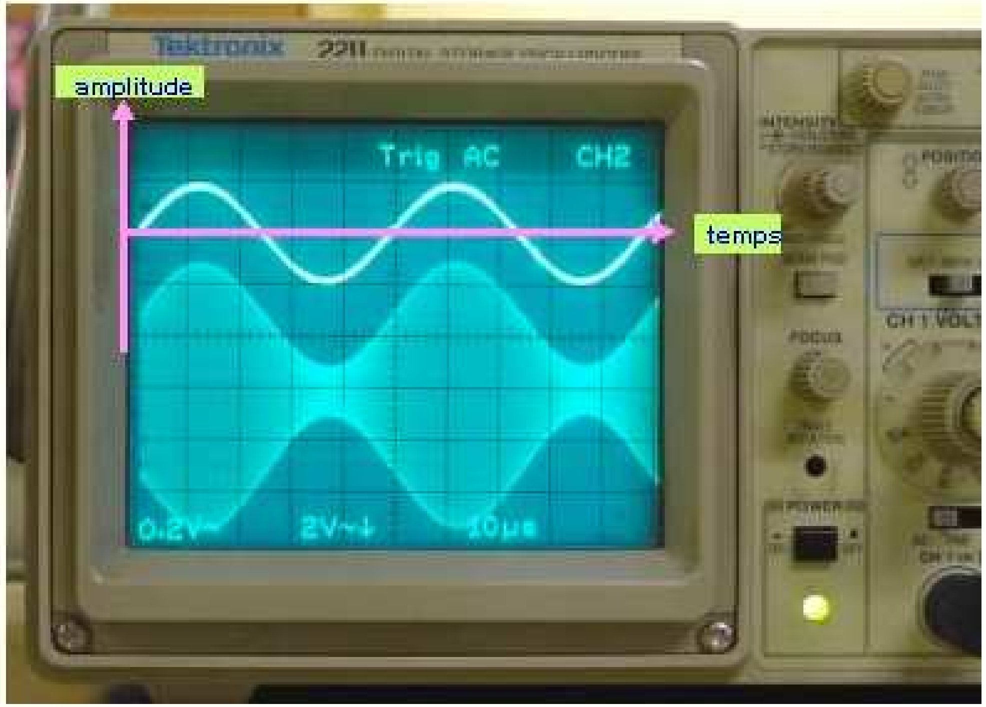
Une première façon de connaître un signal est d'observer son allure en fonction du temps donnée par l'oscillogramme.

Exemple 1 : signal $x(t) = 10\sin(400t)$



- c'est un signal sinusoïdal
- son amplitude est de 10 V
- sa pulsation vaut 400 radians/seconde
- sa fréquence vaut f = 63,7 Hz

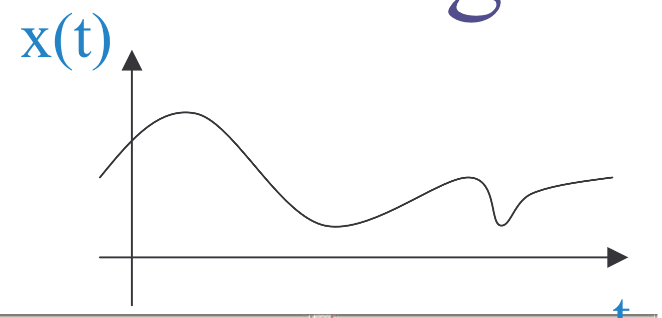
Exemple 2 : signal sinusoïdal et signal modulé en amplitude

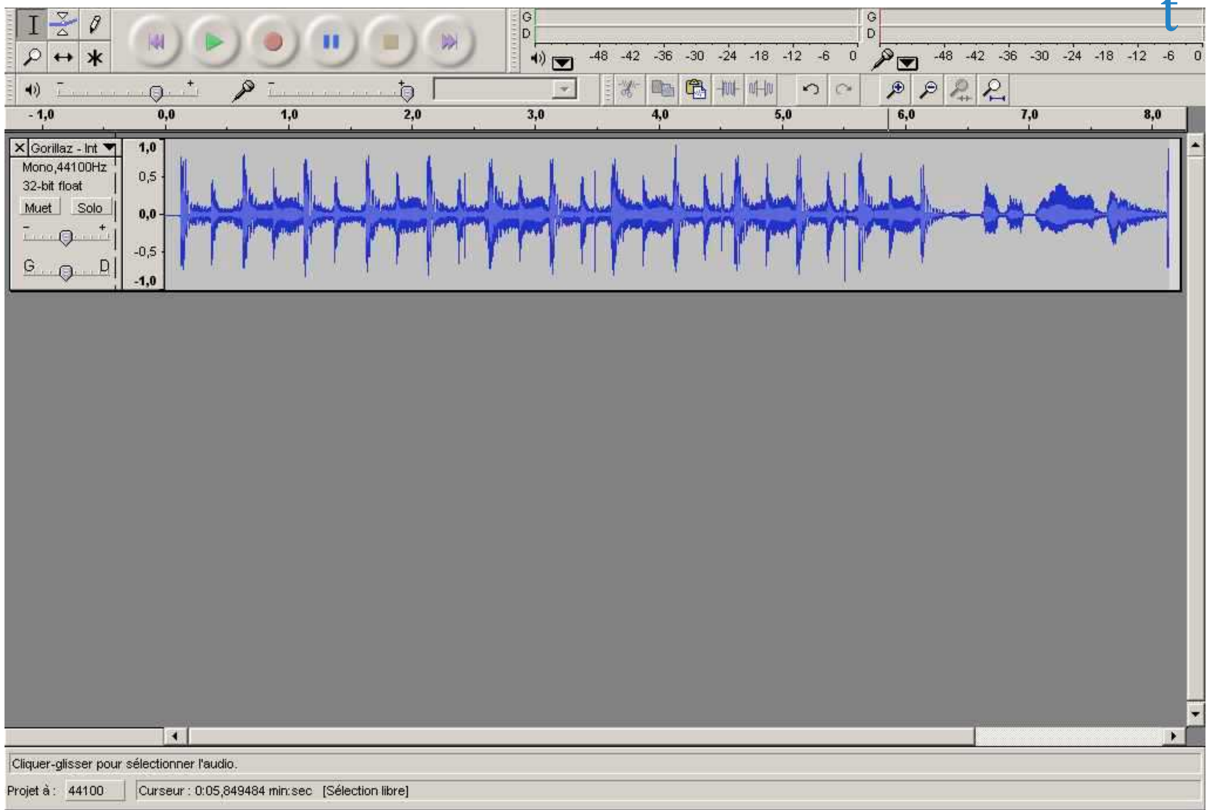


L'oscillogramme nous renseigne sur la valeur moyenne, la valeur de crête, … mais pas sur les fréquences contenues dans celui-ci

1- Définition d'un signal

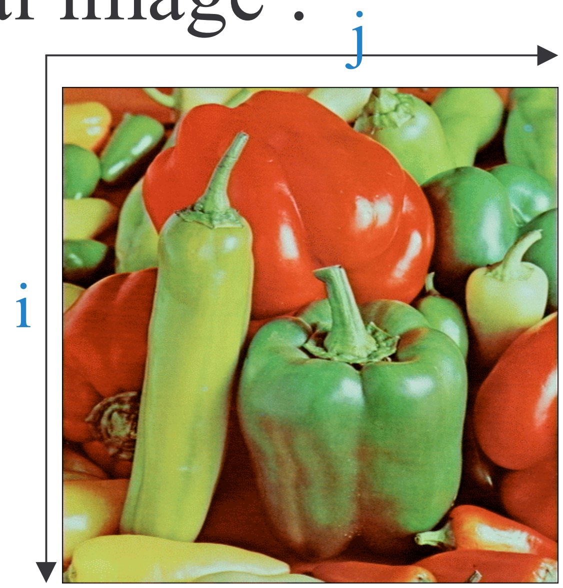
- Signal audio





1- Définition d'un signal

- Signal image :



1- Définition d'une image

- **Représentation :** Images et suite d'images ...

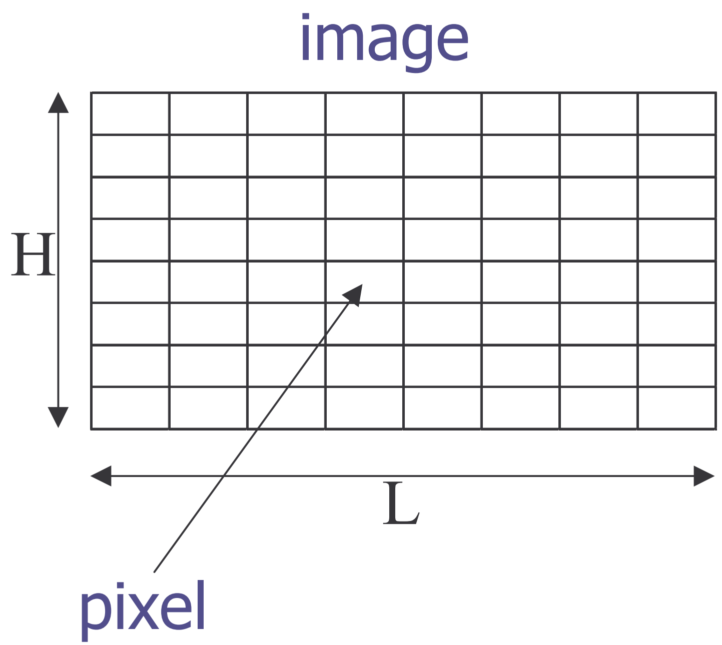
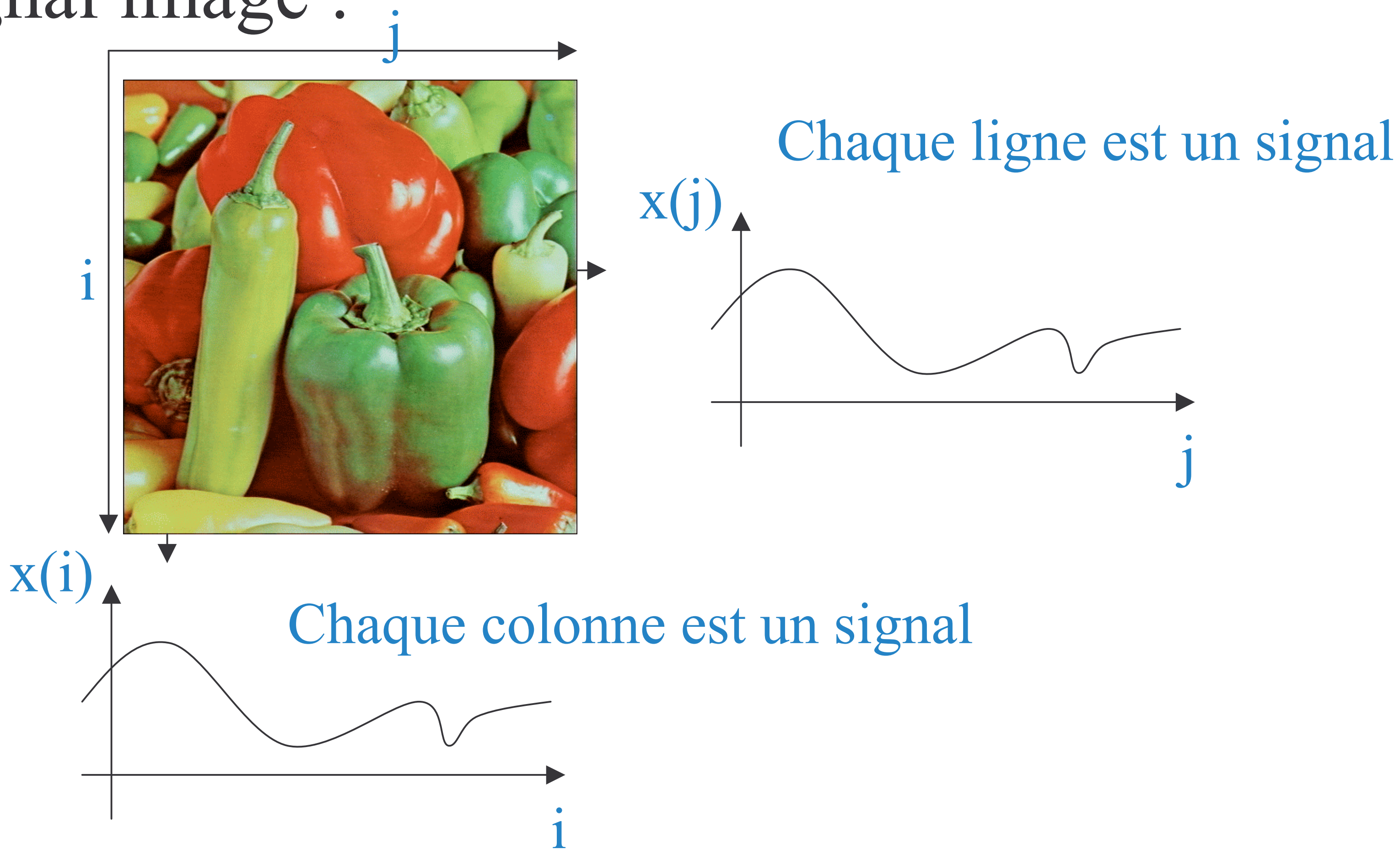


Image : tableau HxL de pixels

Pixel :
* niveau de gris ([0,255])
* couleur (RGB, YUV, ...)
* autres (multi-bande satellite, mouvement, ...)

1- Définition d'un signal

- Signal image :



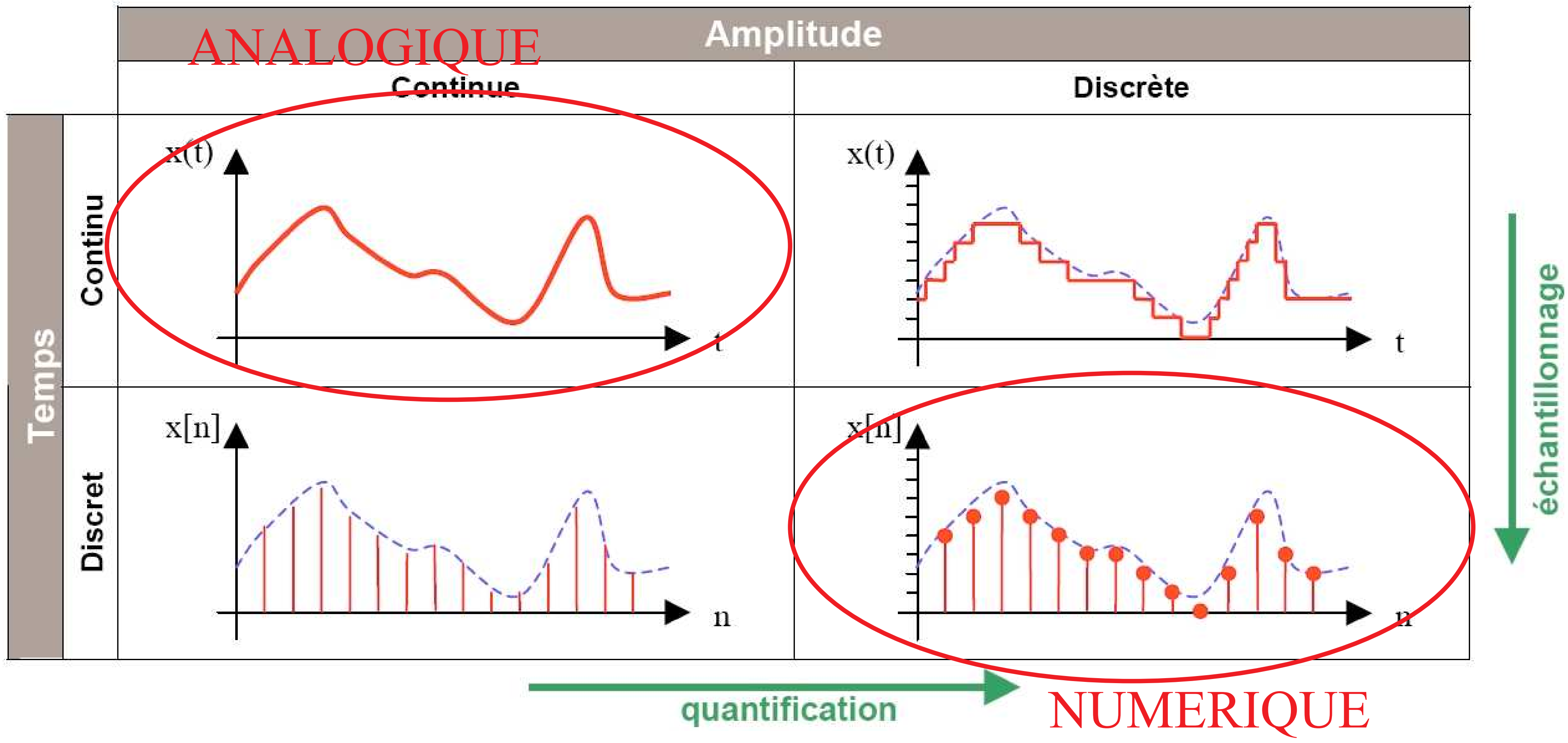
1- Phénoménologie

On considère la nature de l'évolution du signal en fonction du temps. Il apparaît deux types de signaux :

- **Les signaux déterministes :** ou signaux certains, leur évolution en fonction du temps peut être parfaitement modélisée par une fonction mathématique. On retrouve dans cette classe les signaux périodiques, les signaux transitoires, les signaux pseudo-aléatoires, etc…
- **Les signaux aléatoires :** leur comportement temporel est imprévisible. Il faut faire appel à leurs propriétés statistiques pour les décrire. Si leurs propriétés statistiques sont invariantes dans le temps, on dit qu'ils sont stationnaires.

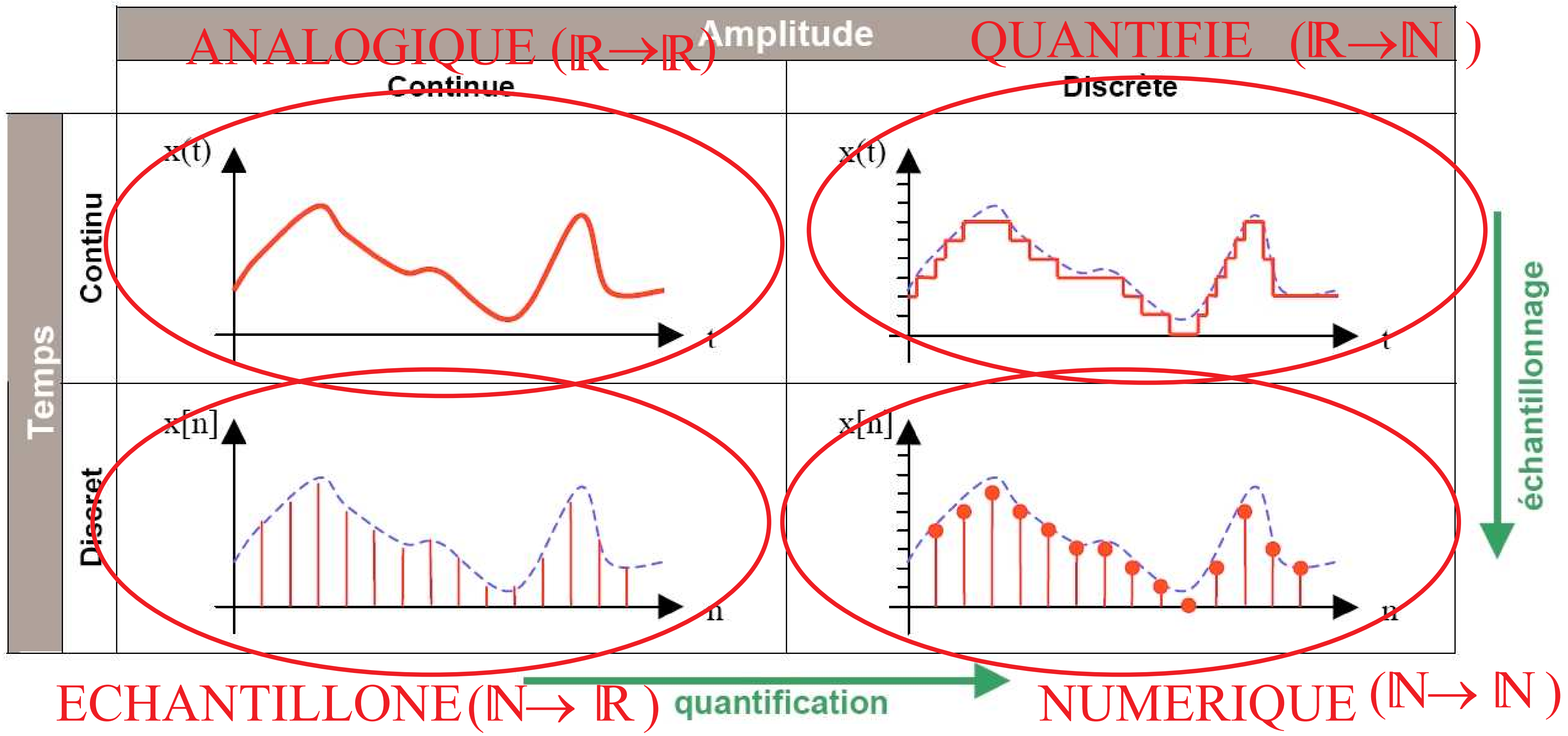
1- Classification morphologique

On distingue les signaux à variable continue des signaux à variable discrète ainsi que ceux dont l'amplitude est discrète ou continue.



1- Classification morphologique

On distingue les signaux à variable continue des signaux à variable discrète ainsi que ceux dont l'amplitude est discrète ou continue.

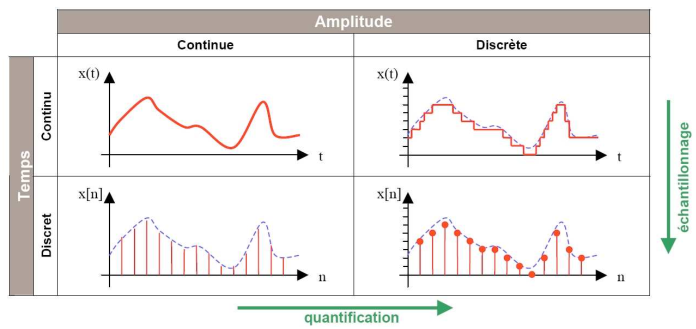


1- Analogique vs. numérique

Stockage analogique

Stockage numérique

On distingue les signaux à variable continue des signaux à variable discrète ainsi que ceux dont l'amplitude est discrète ou continue.



1- Classification morphologique

- On obtient donc quatre classes de signaux :
  - Les signaux **analogiques** : dont l'amplitude et le temps sont continus.
  - Les signaux **quantifiés** : dont l 'amplitude est discrète et le temps continu.
  - Les signaux **échantillonnés** : dont l'amplitude est continu et le temps discret.
  - Les signaux **numériques** : dont l 'amplitude et le temps sont discrets.

1- Notion de bruit

Un *bruit* correspond à tout phénomène perturbateur gênant la transmission ou l'interprétation d'un signal.

<u>Remarque :</u>
Les notions de signal et bruit sont très relatives. Pour un technicien des télécommunications qui écoute un émetteur lointain relayé par un satellite, le signal provenant d'une source astrophysique (soleil, quasar) placée malencontreusement dans la même direction est un bruit. Mais pour l'astronome qui s'intéresse à la source astrophysique, c'est le signal du satellite qui est un bruit.

1.2.3 Rapport signal sur bruit

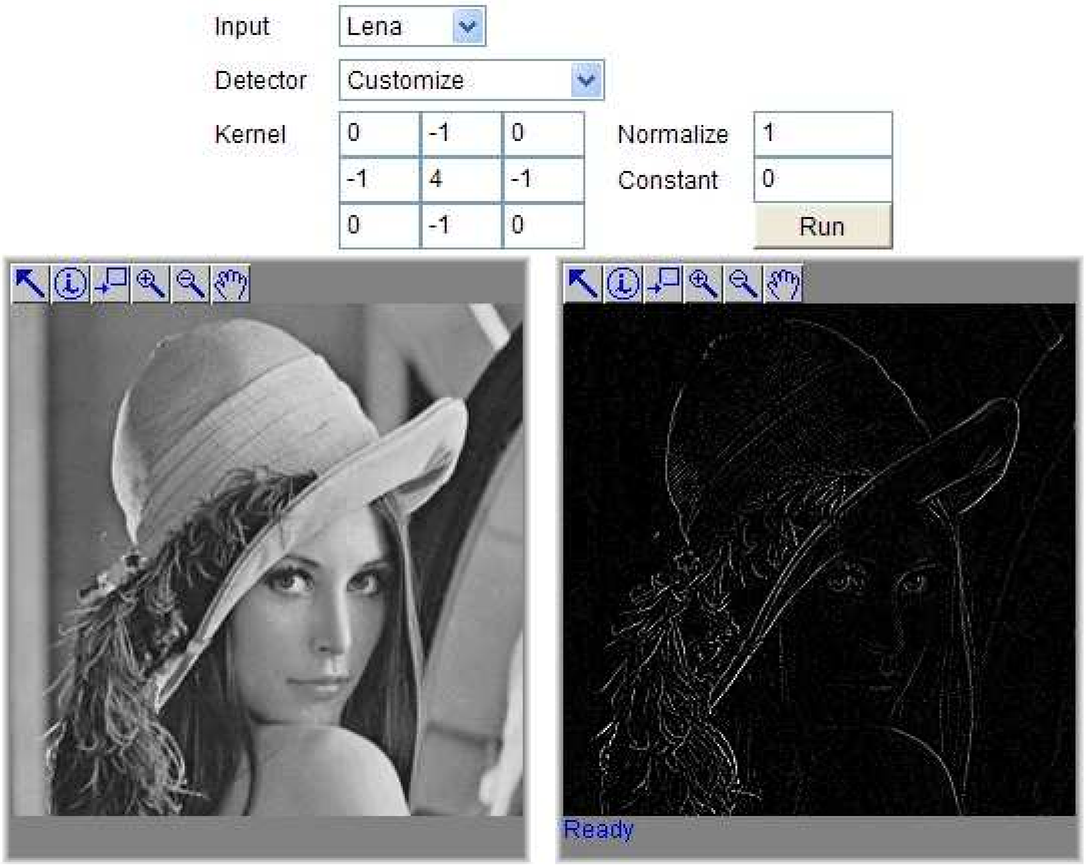
Le *rapport signal sur bruit* mesure la quantité de bruit contenue dans le signal. Il s'exprime par le rapport des puissances du signal (P_S) et du bruit (P_N). Il est souvent donné en décibels (dB).

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10\log\frac{P_S}{P_N}}$$

1- Qu’est ce que le traitement du signal

- L’objectif du traitement d’un signal est de **modéliser** ou **d’interpréter** le signal sachant qu’un signal est porteur d’une information (image, son, …).
- L’objectif du traitement d’un signal est également de **caractériser** les systèmes traitant le signal.

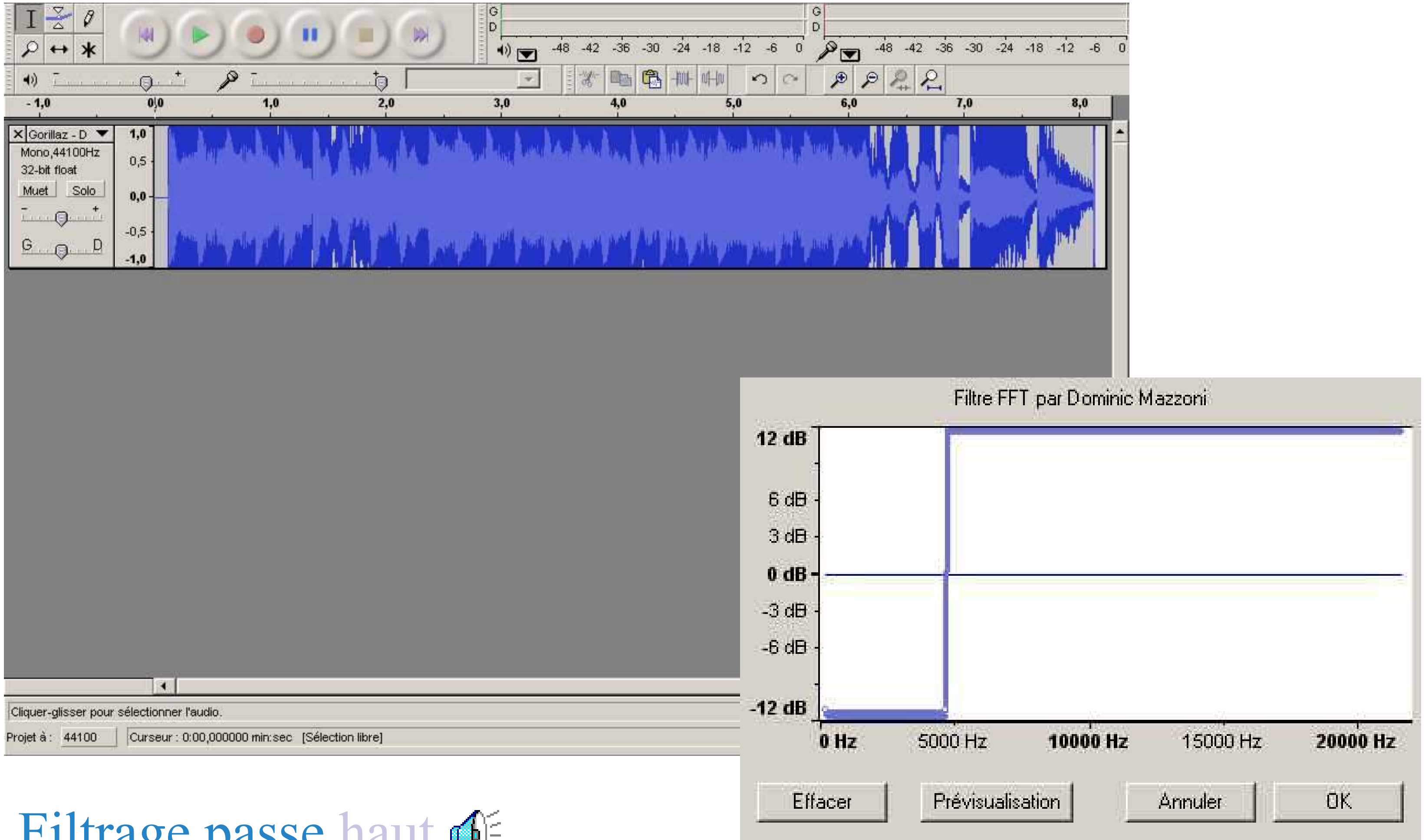
1- Exemple de traitement du signal



Détection de contour

© 2005 EPFL

1- Exemple de traitement du signal



Filtrage passe haut

1- Domaines d'application du TNS

- **Domaines d'application du TNS** *(article tiré du site adaptyv.com)*
  Le traitement du signal est un secteur en forte croissance: radiotéléphonie (GSM, GPRS, EDGE, UMTS,...), applications multimédia , instrumentation, médical, etc... Les capacités des processeurs DSP sont de plus en plus importantes, et les prix de ces processeurs ont diminué. On en utilise donc de plus en plus. La liste suivante, non exhaustive, donne un aperçu des fonctions et applications de traitement du signal dans des secteurs majeurs.

1- Domaines d'application du TNS

- **AUDIO**
  Fonctions DSP: réverbération, contrôle de tonalité, écho, filtrage, compression audio, égalisation en fréquence, transposition de fréquence, effets "spatiaux", surround
  Applications: instruments de musiques et amplificateurs, consoles de mixage, équipements d'enregistrement digitaux ou non, équipements de diffusion, cartes pour PC, jeux et jouets, auto-radios, lecteurs de CDRom, TV, hauts parleurs haut de gamme...

1- Domaines d'application du TNS

- **TRAITEMENT DE LA PAROLE**
  Fonctions DSP: synthèse et reconnaissance vocale, compression, lecture de texte, emails, sms, transposition de fréquence, filtrage, enregistrement et playback
  Applications: enregistreurs sans support magnétique, répondeurs-enregistreurs, boîtes vocales, systèmes de sécurité par reconnaissance vocale, interphones, cartes pour PC, jeux et jouets...

1- Domaines d'application du TNS

- **TELECOMMUNICATIONS**
  Fonctions DSP: modulation et transmission, démodulation et réception, compression, commutation, routage, DTMF, encryptage, amélioration des signaux, annulation d'écho, multiplexage
  Applications: modems, fax, autocommutateurs publics et privés, accueils automatiques, radio-téléphones, pagers, systèmes GPS, vidéo téléphones, systèmes satellite, boucle locale radio, faisceaux hertziens...

1- Domaines d'application du TNS

- **INSTRUMENTATION ET MESURE**
  Fonctions DSP: transformée de Fourier rapide (FFT), Filtrage, synthèse de forme d'onde, filtrage adaptatif, calculs rapides
  Applications: équipements de tests et mesures, analyse de vibration, Cartes d'entrées-sorties pour PC, systèmes auto: injection contrôlée, ABS, contrôle actif du bruit (générateurs d' "anti-bruit"), systèmes de forage pétrolier, instruments sismiques , mesure de puissance, simulateurs de vols, analyseurs de réseaux, générateurs de signaux...

1- Domaines d'application du TNS

- **ELECTRONIQUE MEDICALE**
  Fonctions DSP: filtrage, annulation d'écho, FFT 2D et 3D, générateurs de signaux
  Applications: équipements d'assistance respiratoire et cardiaque, échographies, analyseurs biologiques, surveillance pré-natale, kinésithérapie, scanners, IRM, oreillettes, podométrie...

1- Domaines d’application du TNS

- **TRAITEMENT D'IMAGE**
  Fonctions DSP: filtrage "spatial", FFT 2D et 3D, reconnaissance de forme, lissage, filtrage, compression image
  Applications: lecteurs de codes à barres, recherche sous-marine d'objets, systèmes d'inspection automatique, reconnaissance d'empreintes digitales, TV numérique, sonars, radars, robotique, manipulation et enregistrement des images...

1- Domaines d'application du TNS

- **INDUSTRIE - CONTROLE DE MOTEURS**
  Fonctions DSP: filtrage, FFT, PID, calculs rapides, réduction de bruit.
  Applications: contrôle de vitesse de moteur, robotique, gestion de puissance, générateurs, ascenseurs, climatisations, contrôle de trafic, systèmes de navigation, disques durs, analyseurs de vibrations...

1- Spécificités du TNS

- La chaîne de TNS nécessite un **filtre analogique performant à l'entrée**. La présence de ce filtre analogique est justifiée par la nécessité d'éliminer les fréquences élevées du signal d'entrée afin de respecter le **théorème de Shannon**.
- La chaîne de TNS est un mélange de matériel ("hard") et de logiciel ("soft"). 2 exemples de "hardware": FFT , DSP

1- Avantage du TNS

- Manipulation d'un grand nombre de données (scalaires, vectorielles, matricielles, multidimensionnelles)
- Charges de calcul importantes (multiplications, additions)
- Intégration et complexité des tâches réalisées
- Précision pouvant être élevée (liée au nombre de bits du CAN et du DSP)
- Pas de dérive (température, vieillissement)

1- Avantage du TNS

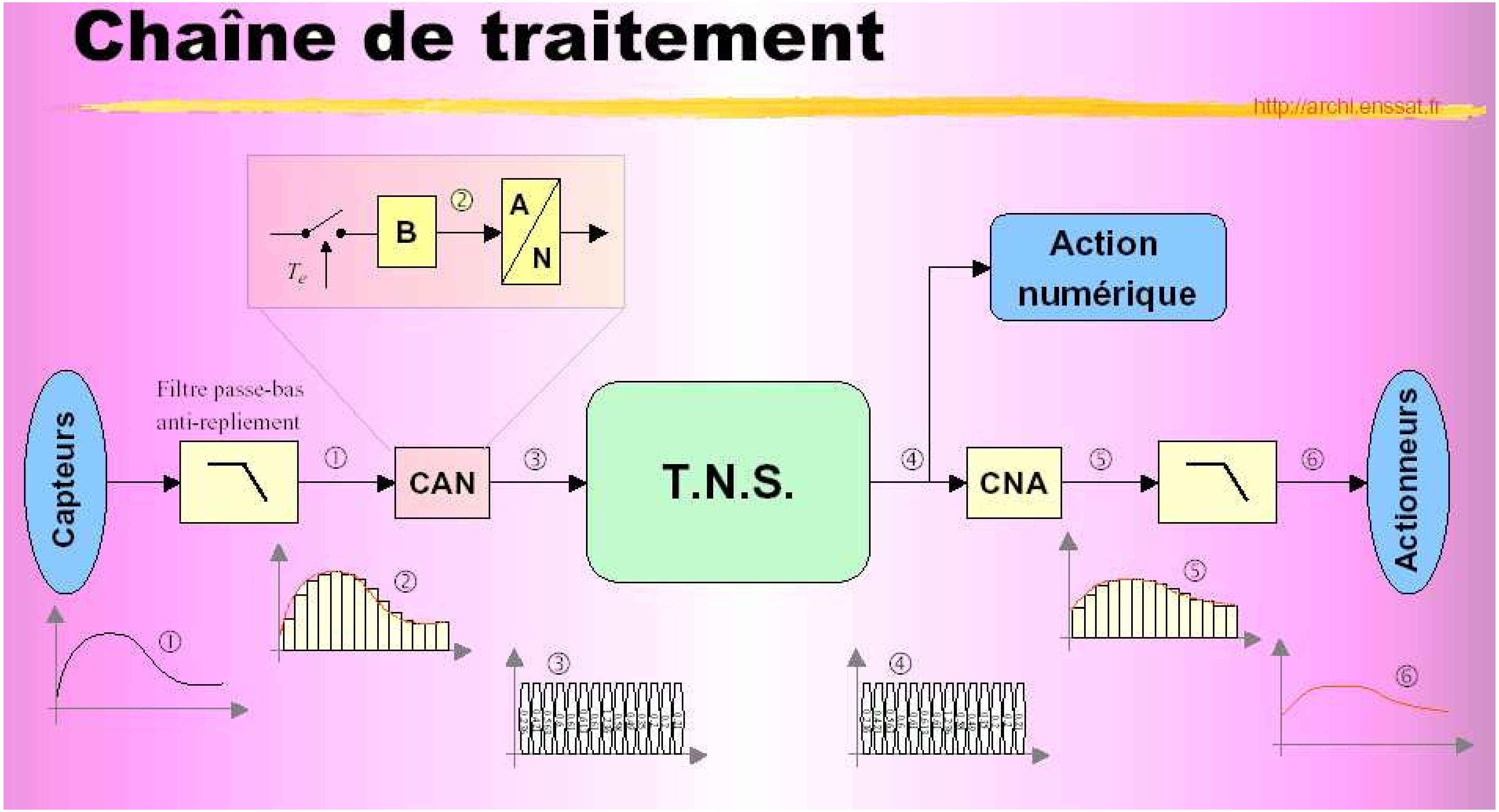
- Simulation ou exécution sur ordinateur ; exécution en temps réel au moyen de structures spécialisées DSP
- Architectures et algorithmes permettant le travail en "temps réel"
- Une simple modification des coefficients en mémoire (par programmation ou transfert de données) permet de passer d'un filtre numérique à un autre.

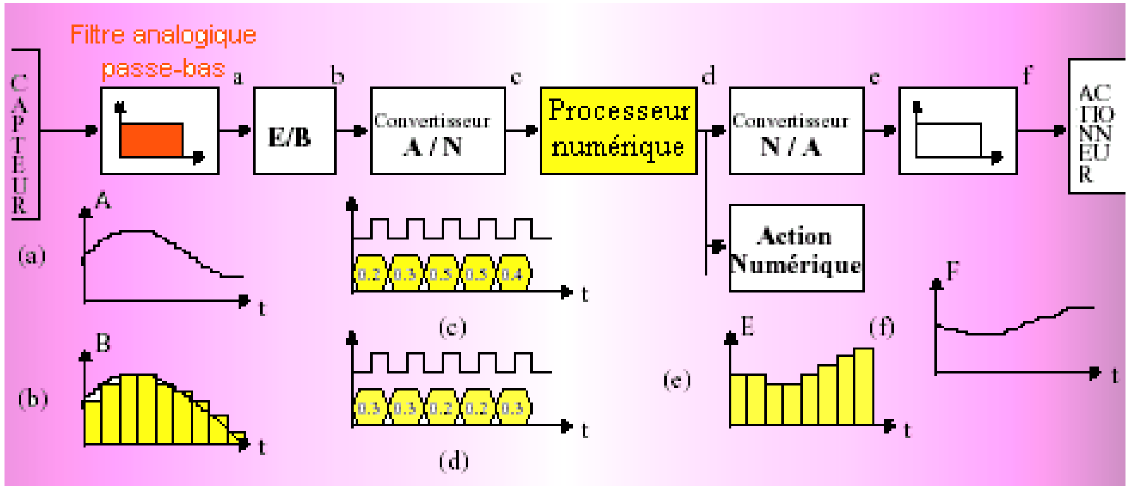
1- Inconvénients du TNS

- Nécessité d'une vitesse de calcul élevée si on souhaite une bande passante large, d'où un compromis précision - vitesse de calcul.
- La réalisation de systèmes simples est relativement complexe : par exemple, un système du premier ordre, réalisable au moyen d'une résistance et d'un condensateur, demande beaucoup de matériel si on le réalise avec des moyens numériques.

2- La chaîne de traitement

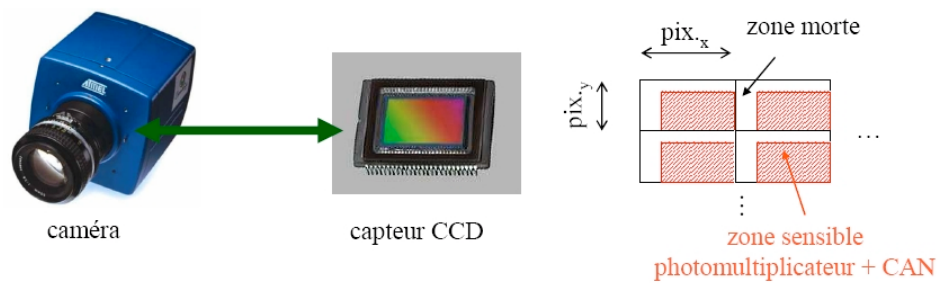
2- Représentation d'une chaîne de traitement numérique du signal





- Un **capteur** fournit le signal d'entrée

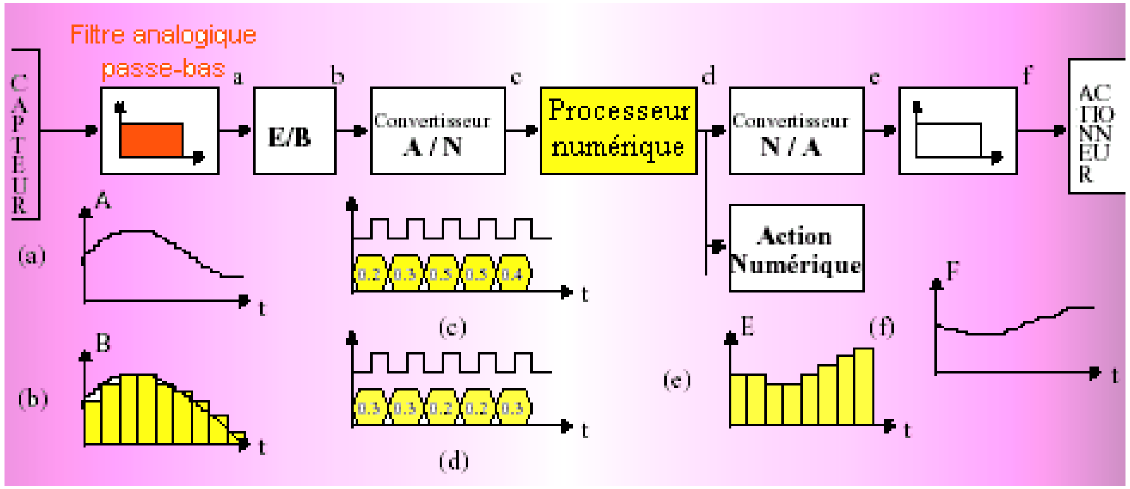
Un exemple de capteur/numériseur : le CCD



un pixel peut être :

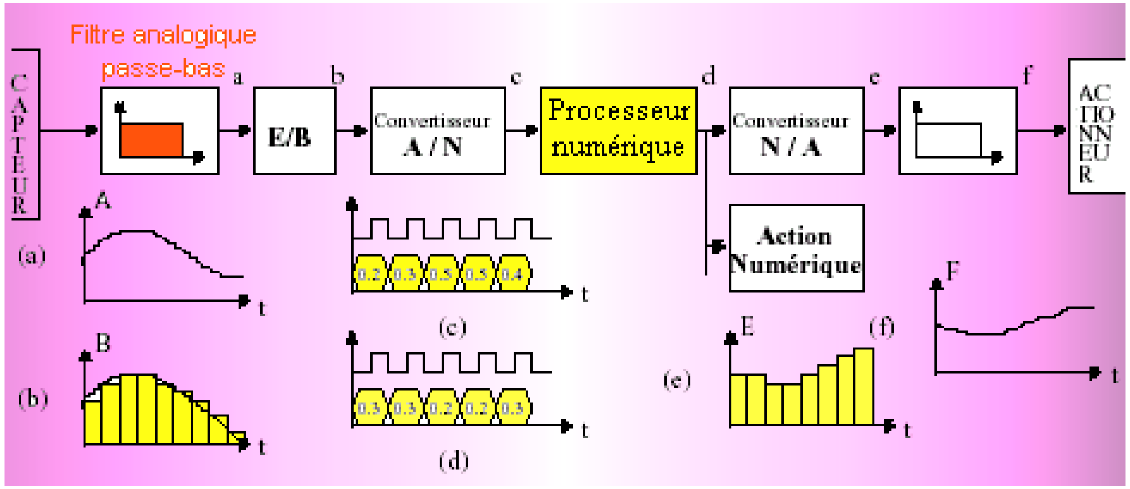
avec une **zone morte** ou **plein**
rectangulaire ou **carré** ($pix._x = pix._y$)

unité de mesure = pixel !!!
attention au **grandissement**

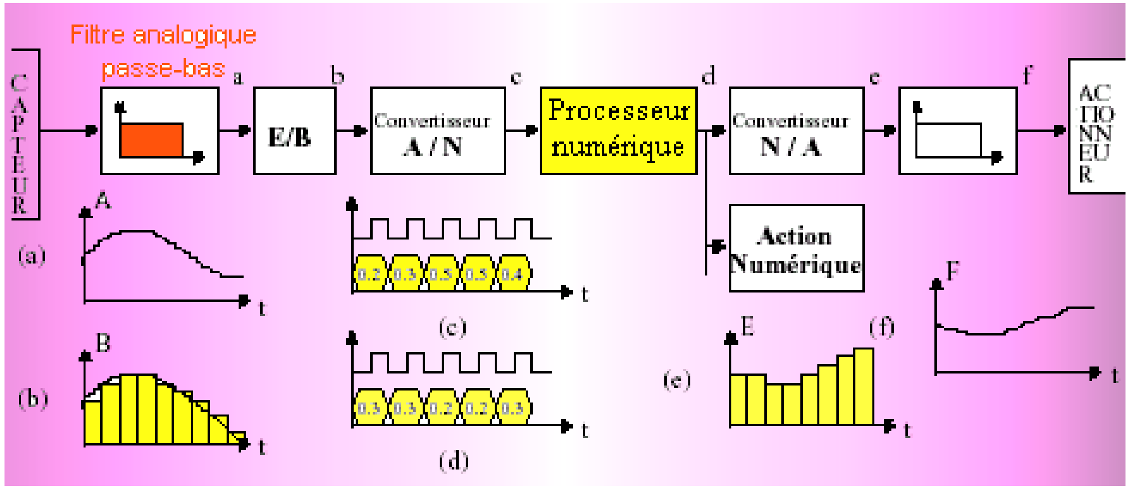


- Un **filtre analogique** (a) passe-bas limite la bande passante du signal d'entrée, en relation avec la fréquence d'échantillonnage f_{ech}.

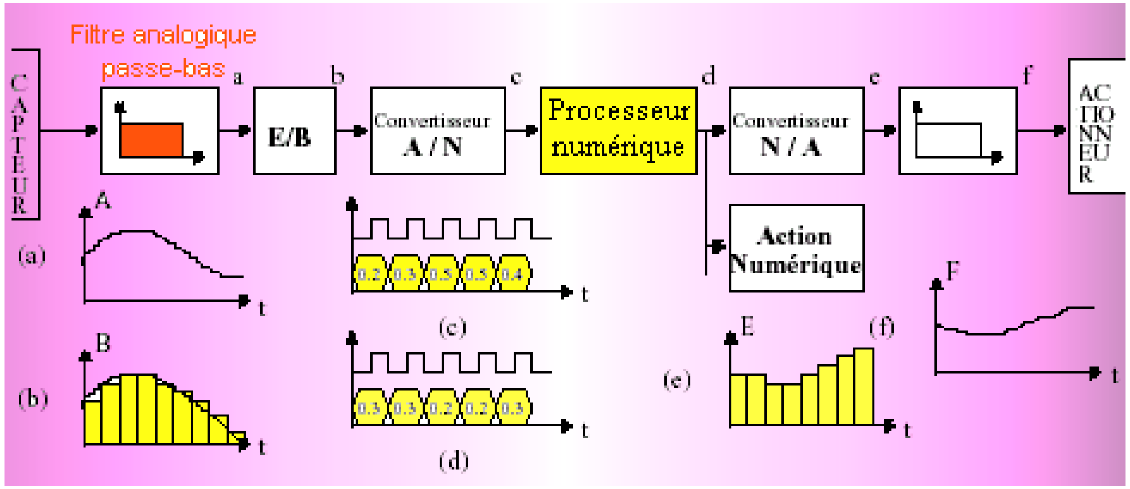
  Dans la plupart des cas ce filtre est indispensable, et son rôle est d'éliminer toute composante de fréquence supérieure à la fréquence de Shannon $f_{ech}/2$ afin de ne pas subir le phénomène de repliement de spectre (aliasing)



- Un bloc de conversion analogique numérique constitué:
- d'un **échantillonneur-bloqueur** (E/B) qui échantillonne le signal à la fréquence f_{ech}, puis le bloque, c'est-à-dire *le maintient constant le temps nécessaire pour réaliser l'opération de conversion analogique* numérique qui va suivre. Au cours du temps, il en résulte un signal analogique en marches d'escalier (b).



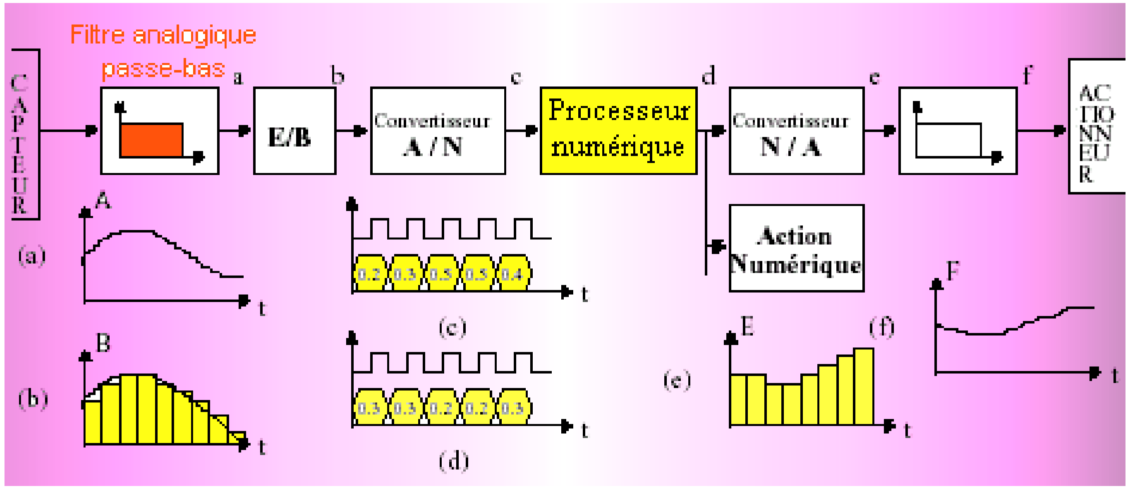
- Un **convertisseur analogique-numérique (CAN)** qui transforme le signal analogique en un signal numérique (c) avec un pas de quantification propre à la résolution du convertisseur
- Cette quantification détermine la précision avec laquelle le signal d'entrée est connu (CAN 8 bits, 12 bits, 16 bits ...).
- Elle introduit un **bruit** aléatoire appelé "bruit d'entrée" qui sera amplifié par l'algorithme du processeur numérique.
- L'échantillonneur-bloqueur est généralement intégré avec le CAN.



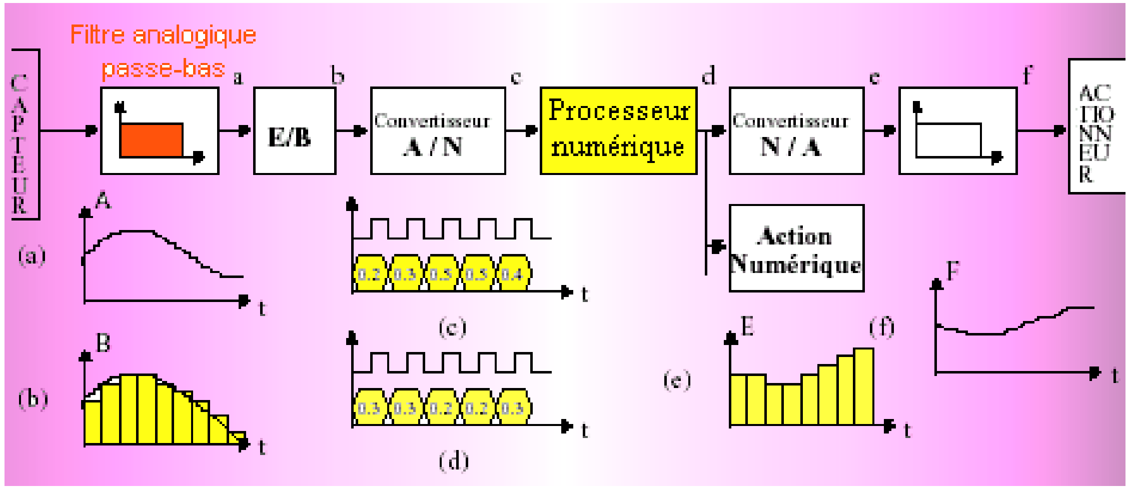
- Le **processeur numérique** réalise l'opération de filtrage proprement dite qui consiste en un ou plusieurs **algorithmes** plus ou moins complexes.
- Ce processeur peut être un ordinateur, un microcontrôleur, un DSP, un processeur multimédia, un FPGA ou une structure hardware-software.

DSP : Digital Signal Processing

FPGA : Field-Programmable Gate Array : Une puce programmable



- Les algorithmes (RIF, RII, DFT, FFT, convolution, corrélation...) sont des suites d'opérations qui font intervenir un plus ou moins grand nombre de multiplications, additions, décalages, mémorisations. Ces opérations peuvent être en virgule fixe, flottante ou flottante par blocs, récursives ou non récursives, scalaires, vectorielles ou matricielles, et faire intervenir des calculs d'adressage simples, complexes ou inexistants...



- Selon le cas, le signal numérique résultant (d) sera utilisé tel quel ou restitué, reconstruit, sous forme analogique (e) au moyen d'un **convertisseur numérique-analogique (CNA)** et d'une opération de lissage (filtre passe-bas ou convolution) (f) .

Filtres analogiques et filtres numériques: comparaisons

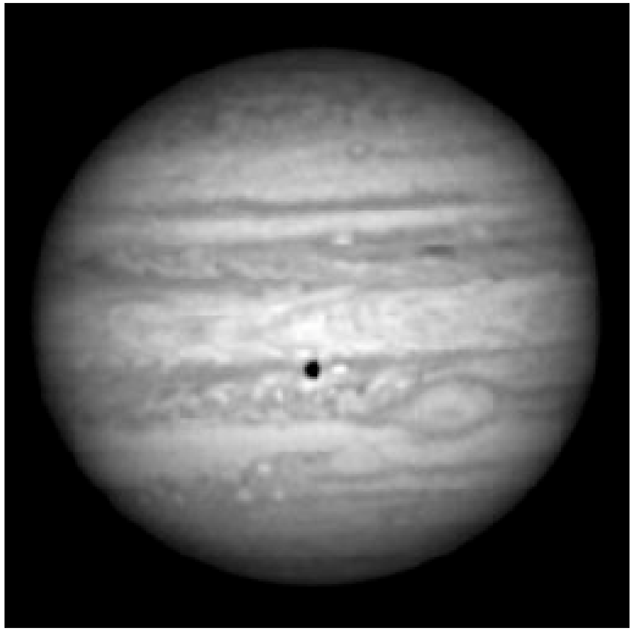
	Filtre analogique	**Filtre numérique**
Structure	amplificateurs (AO, transistors...) + résistances + condensateurs*	multiplieurs + additionneurs + mémoires**
Mémorisation du passé	charge des condensateurs*	contenu des mémoires**
Addition des informations	loi des nœuds, somme des courants	additionneur numérique
Equation	différentielle, continue	aux différences, discrète
Coefficients de l'équation	constante de temps RC par exemple	entrée de coefficients d'un multiplieur numérique
Fonction de transfert	F(p)	F(z)
Prise en compte de l'information	continuelle	échantillonnée

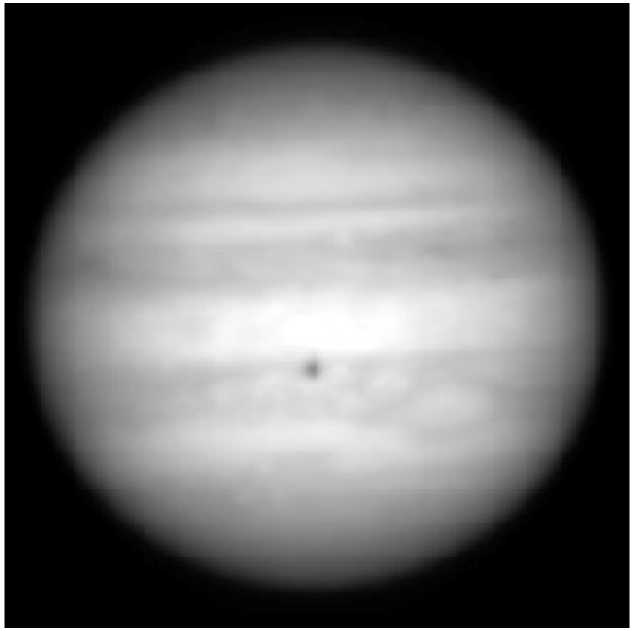
* ou tout autre structure mémorisant un état ou de l'énergie ...

** registres de latches D, RAM, ROM ...

2- Exemple de traitement numérique

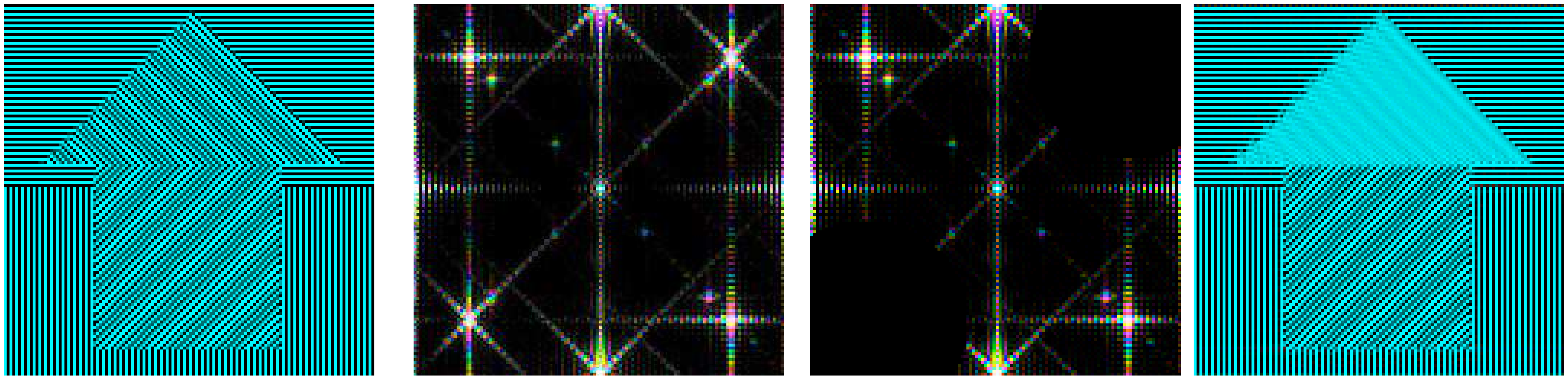
- Application d’un flou





2- Exemple de traitement numérique

- Masquage fréquentiel :



TF Masque fréquentiel TF^{-1}

3- Étude de signaux analogiques particuliers

3- Signaux particuliers

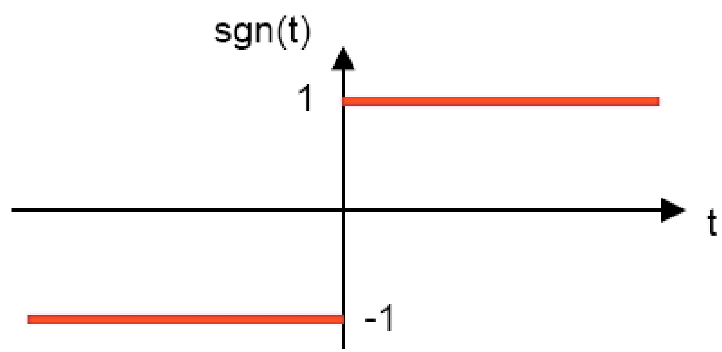
- L’objectif du traitement d’un signal est de modéliser ou d’interpréter celui-ci sachant qu’un signal est porteur d’une information (image, son, …).

- Voici donc quelques fonctions mathématiques de base couramment utilisés en traitement du signal

3- Signaux particuliers

1.4.1 Fonction signe

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases} -1 & \text{pour} \quad t<0 \\ +1 & \text{pour} \quad t>0 \end{cases}$$

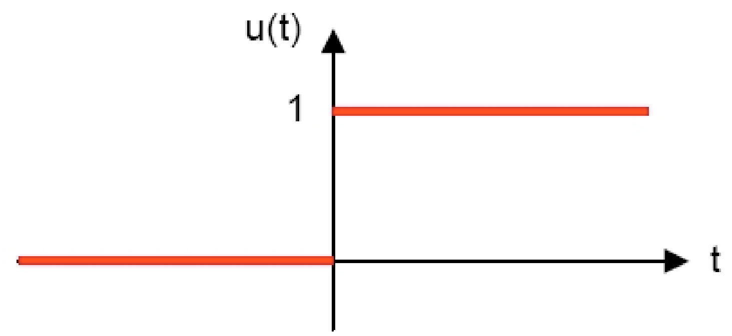


Par convention, on admet pour valeur à l'origine : sgn (t) =0 pour t=0.

3- Signaux particuliers

1.4.2 Fonction échelon

$$u(t)=\begin{cases}0 & \text{pour } t<0 \\ 1 & \text{pour } t>0\end{cases}$$



Par convention, on admet pour valeur à l'origine: u (t) = ½ pour t=0.
Dans certains, il sera préférable de lui donner la valeur 1.

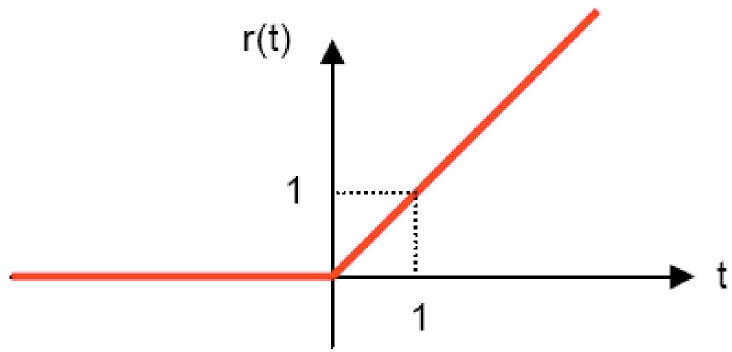
Cette fonction est aussi appelée Heavyside

3- Signaux particuliers

1.4.3 Fonction rampe

$$r(t) = t \, . \, u(t)$$

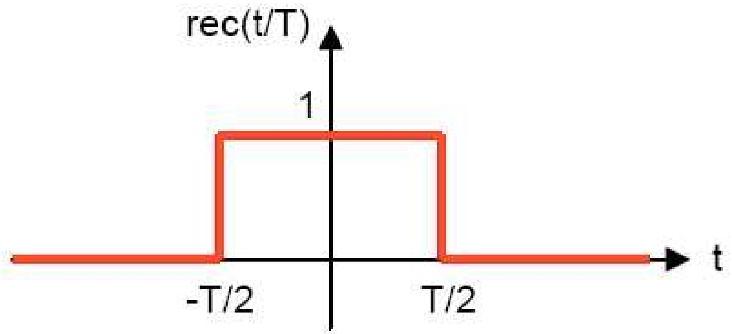
$$= \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau$$



3- Signaux particuliers

1.4.4 Fonction rectangulaire

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \left|\frac{t}{T}\right| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pour } \left|\frac{t}{T}\right| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



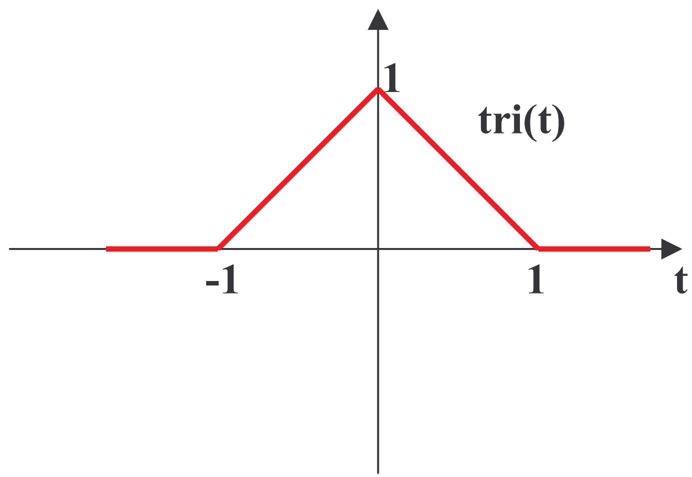
On l'appelle aussi fonction porte.
Elle sert de fonction de fenêtrage élémentaire.

On prend souvent rect(-T/2) = rect(T/2) = 1/2

3- Signaux particuliers

- Fonction triangulaire

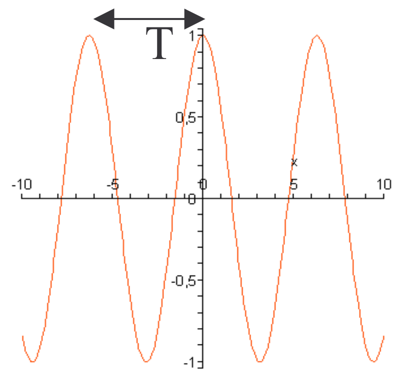
- $\mathrm{tri}(t) = \begin{cases} 1-|t| \text{ pour } |t| \leq 1 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$



3- Signaux particuliers

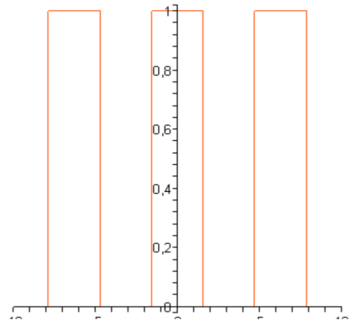
- Signal T-périodique

- Le signal x est T-périodique si $\forall\, k \in \mathbb{Z}$:
  - $x(t+kT) = x(t)$
  - Il y a « un motif qui se répète » dans le temps
  - Exemple : $x(t) = \cos(t)$

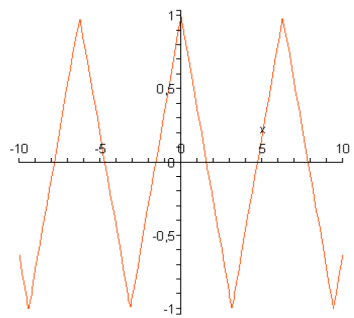


3- Signaux particuliers

- Remarque : il est simple de créer des fonction T-périodique à partir des fonctions rectangle et triangle vues précédemment :
  - $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \mathrm{rect}(t+kT)$



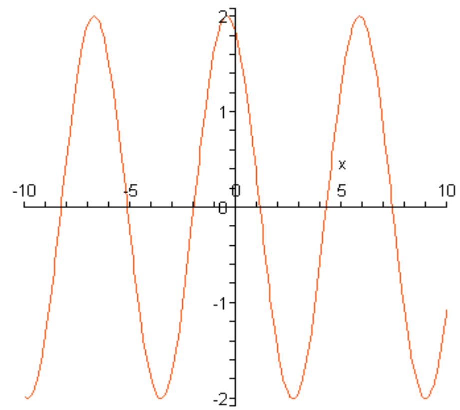
  - $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \mathrm{tri}(t+kT)$



3- Signaux particuliers

- Signal sinusoïdal pur :
  - $x(t) = \alpha \sin(\omega t + \phi)$
  - $|\alpha|$ est l'amplitude maximum
  - ω est la pulsation ($T=2\pi/\omega$ et $f=1/T$)
  - ϕ est la phase
  - Exemple :

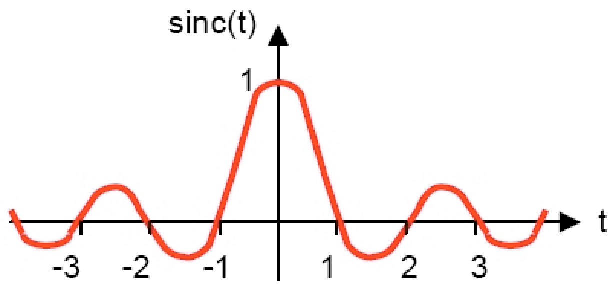
$$w := 1$$
$$\alpha := 2$$
$$\varphi := 2$$
$$f := t \to \alpha \sin(w\,t + \alpha)$$



3- Signaux particuliers

1.4.7 Fonction sinus cardinal

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



Cette fonction joue un rôle très important en traitement du signal.

- **Propriétés :**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(t)\,dt = 1$$

$$\lim_{t\to 0} \mathrm{sinc}(t) = 1$$

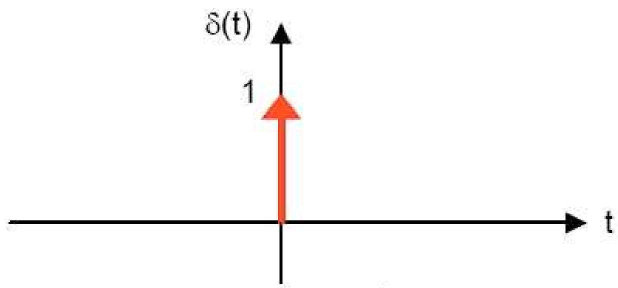
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(t)\,dt = 1$$

$$\lim_{t\to +\infty} \mathrm{sinc}(t) = 0$$

3- Impulsion de Dirac

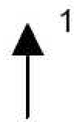
1.4.5 Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac correspond à une fonction porte dont la largeur T tendrait vers 0 et dont l'aire est égale à 1.



$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & \text{pour } t=0\\ 0 & \text{pour } t\neq 0\end{cases}$$

$\delta(t)$ ne peut être représentée graphiquement. On la schématise par le symbole



Attention: le **1** marqué sur la flèche pleine représente l'aire de cette impulsion (et non la hauteur de l'impulsion).

On peut encore considérer $\delta(t)$ comme la dérivée de la fonction échelon : $\delta(t)=\dfrac{du(t)}{dt}$.

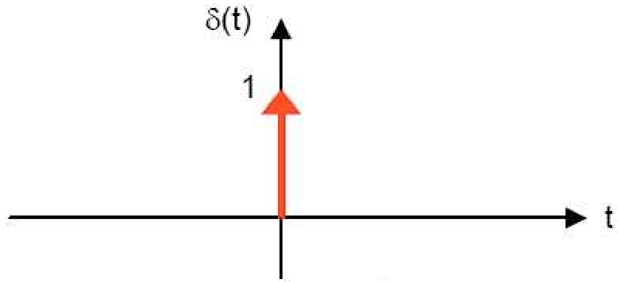
3- Impulsion de Dirac

- Mathématiquement la fonction de dirac se défini par :
  - Une aire valant 1 : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$
  - Une valeur nulle sauf en 0 : $\delta(t) = 0 \ \forall t \neq 0$
  - $\delta(t)$ n'est pas une fonction mais est pratique pour représenter les impulsions brèves (décharge d'un condensateur, collision de 2 boules de billard …).

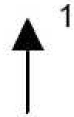
3- Impulsion de Dirac

1.4.5 Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac correspond à une fonction porte dont la largeur T tendrait vers 0 et dont l'aire est égale à 1.



$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & \text{pour } t=0\\ 0 & \text{pour } t\neq 0\end{cases}$$

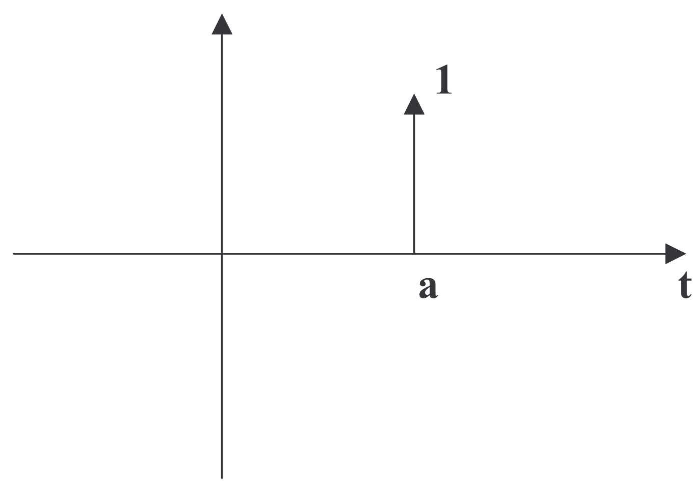
$\delta(t)$ ne peut être représentée graphiquement. On la schématise par le symbole 

<u>Attention:</u> le **1** marqué sur la flèche pleine représente <u>l'aire</u> de cette impulsion (et non la hauteur de l'impulsion).

On peut encore considérer $\delta(t)$ comme la dérivée de la fonction échelon : $\delta(t)=\dfrac{du(t)}{dt}$.

3- Impulsion de Dirac

- Dirac décalée en a :
  - $\delta(t-a)$ est tel que :
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)\,dt = 1$
  - $\delta(t-a) = 0 \ \forall t \neq 0$



3- Impulsion de Dirac (propriétés)

Intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t)\,dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

Produit

$$x(t).\delta(t) = x(0).\delta(t) = x(0)$$

$$x(t).\delta(t-t_0) = x(t_0).\delta(t-t_0) = x(t_0)$$

3- Impulsion de Dirac (propriétés)

Identité

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Translation

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

$$x(t - t_1) * \delta(t - t_0) = x(t - t_1 - t_0)$$

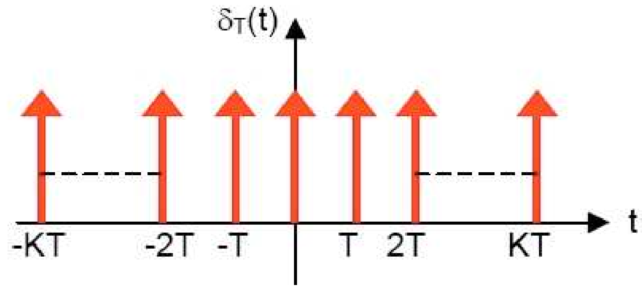
Changement de variable

$\delta(a.t) = |a|^{-1}\,\delta(t)$ avec en particulier $\delta(\omega) = \dfrac{1}{2\pi f}\delta(t)$

3- Peigne de dirac

1.4.6 Peigne de Dirac

On appelle *peigne de Dirac* une succession périodique d'impulsions de Dirac.



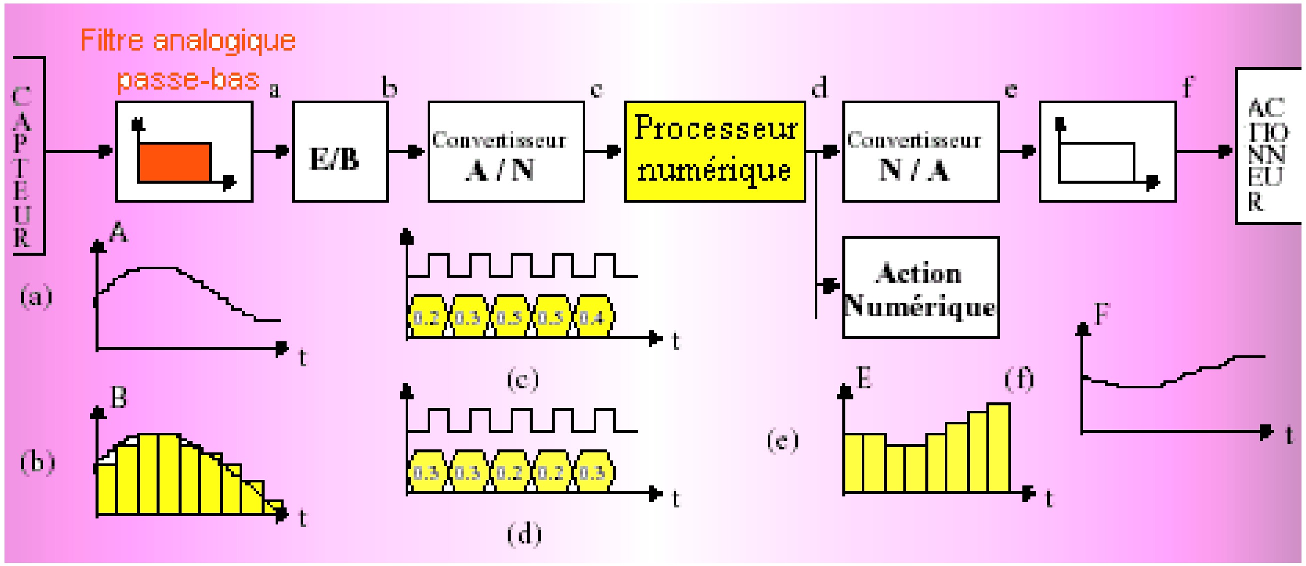
$$\delta_T(t) = \sum_{k \to -\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

T est la période du peigne.
Cette suite est parfois appelée *train d'impulsions* ou *fonction d'échantillonnage.*
Ce type de signal est principalement utilisé en échantillonnage .

4- Numérisation
ou acquisition du signal

4- Numérisation
ou acquisition du signal

- 2 notions pour le passage d'un signal continu à un signal discret :
  – La fréquence d'échantillonage f_{ech}
  – La nombre de bits pour représenter le signal discret.



4- Numérisation ou acquisition du signal

- Puisque tout système de traitement numérique travaille sur des nombres, il est nécessaire de transformer le signal analogique d'entrée e(t) en une suite "équivalente" de données numériques e_n. L'acquisition de cette suite e_n nécessite une double approximation …

4- Numérisation ou acquisition du signal

- **Approximation 1 : Dans le domaine temporel**, la fréquence d'échantillonnage est limitée vers le haut par les performances du matériel et vers le bas par le respect du théorème de Shannon en relation avec le spectre du signal d'entrée.

4- Numérisation ou acquisition du signal

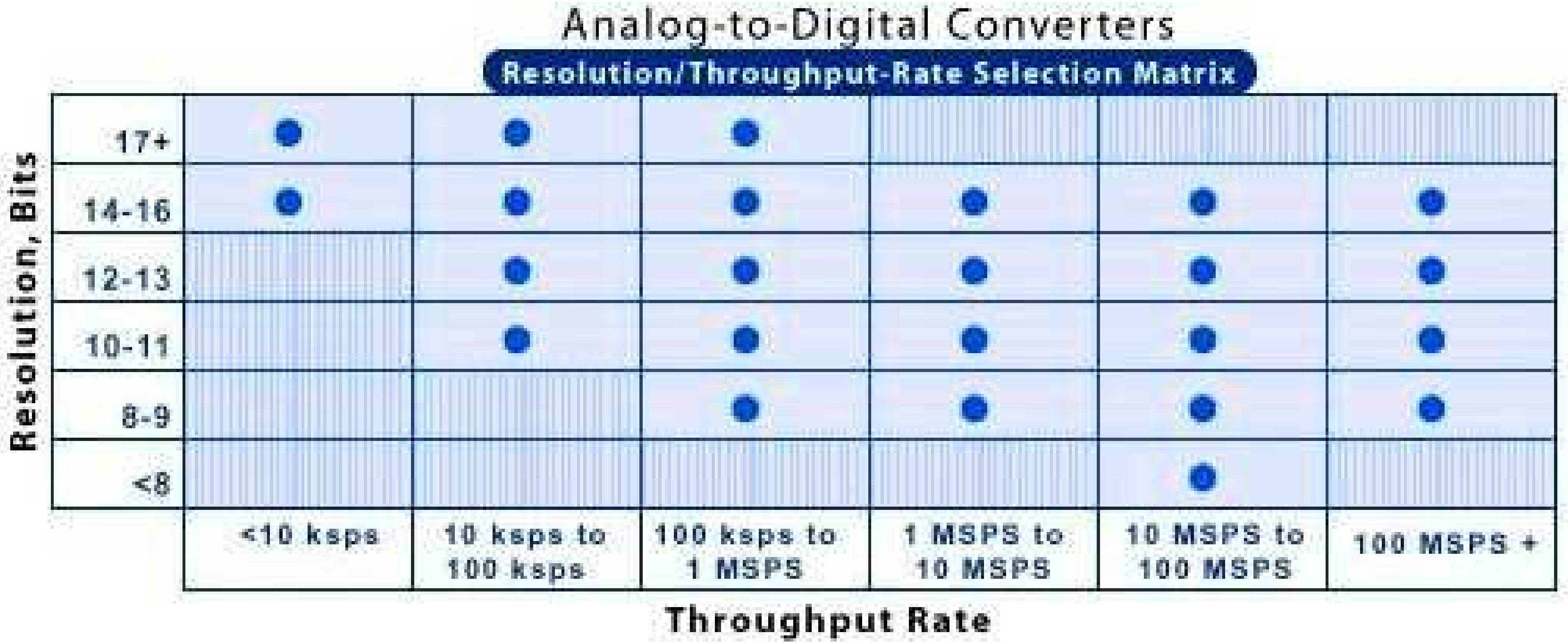
- L'acquisition des données d'entrée est limitée par le temps d'exécution de l'élément le plus lent de la chaîne de traitement numérique (CNA ou processeur numérique). L'acquisition ne pourra donc se faire qu'à intervalle de temps **T** supérieur au temps d'exécution de l'élément le plus lent.
  T est la période d'échantillonnage et $f_{ech} = 1/T$ est la fréquence d'échantillonnage
- Le **théorème de Shannon** stipule que f_{ech} doit être supérieure à 2 fois la plus haute fréquence f_{max} contenue dans le spectre du signal d'entrée analogique à numériser. $f_{ech} > 2 * f_{max}$

4- Numérisation ou acquisition du signal

- **Approximation 2 : Dans le domaine des amplitudes**, le **c**onvertisseur **a**nalogique-**n**umérique (CAN) ne peut représenter qu'un nombre fini de valeurs discrètes. Par exemple, un convertisseur 8 bits disposera de 256 valeurs discrètes et un 12 bits de 4096.

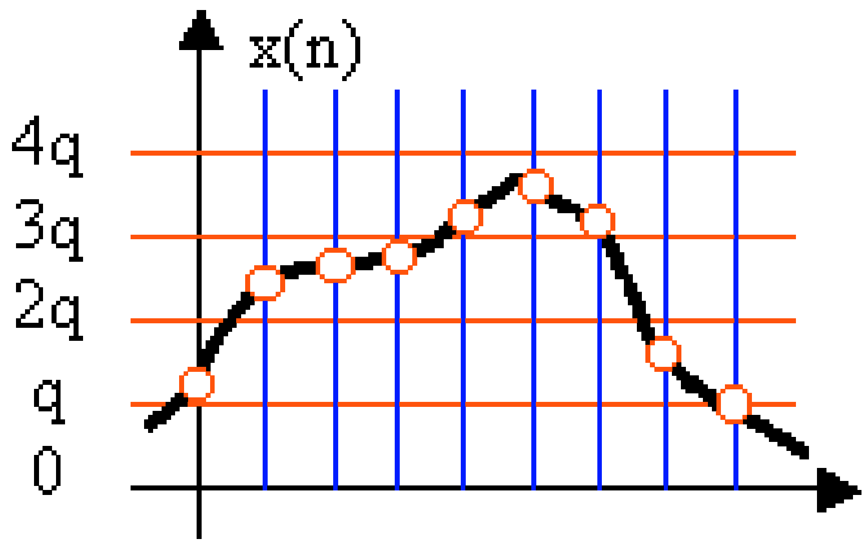
4- Numérisation
ou acquisition du signal

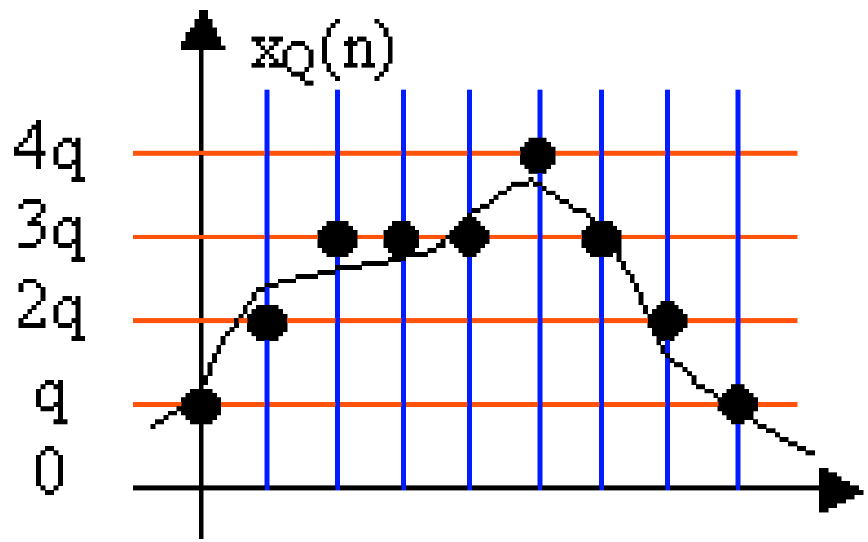
- Illustration du nombre fini de valeurs discrètes (Résolution en bits)



4- Numérisation ou acquisition du signal

- Le CAN introduit un **pas de quantification q** égal au plus faible poids qu'il peut manipuler.





4- Numérisation ou acquisition du signal

- L'erreur aléatoire qui est liée à cette quantification est à l'origine d'un bruit de conversion analogique.
- Le signal d'entrée numérisé sera caractérisé par son **rapport signal/bruit**. Ce bruit de conversion analogique, amplifié par les caractéristiques du filtre réalisé, ira s'ajouter aux bruits de la structure de calcul pour donner le rapport S/B du signal de sortie.

4– L’aspect temporel de l’échantillonnage, retour sur le théorème de Shanon.

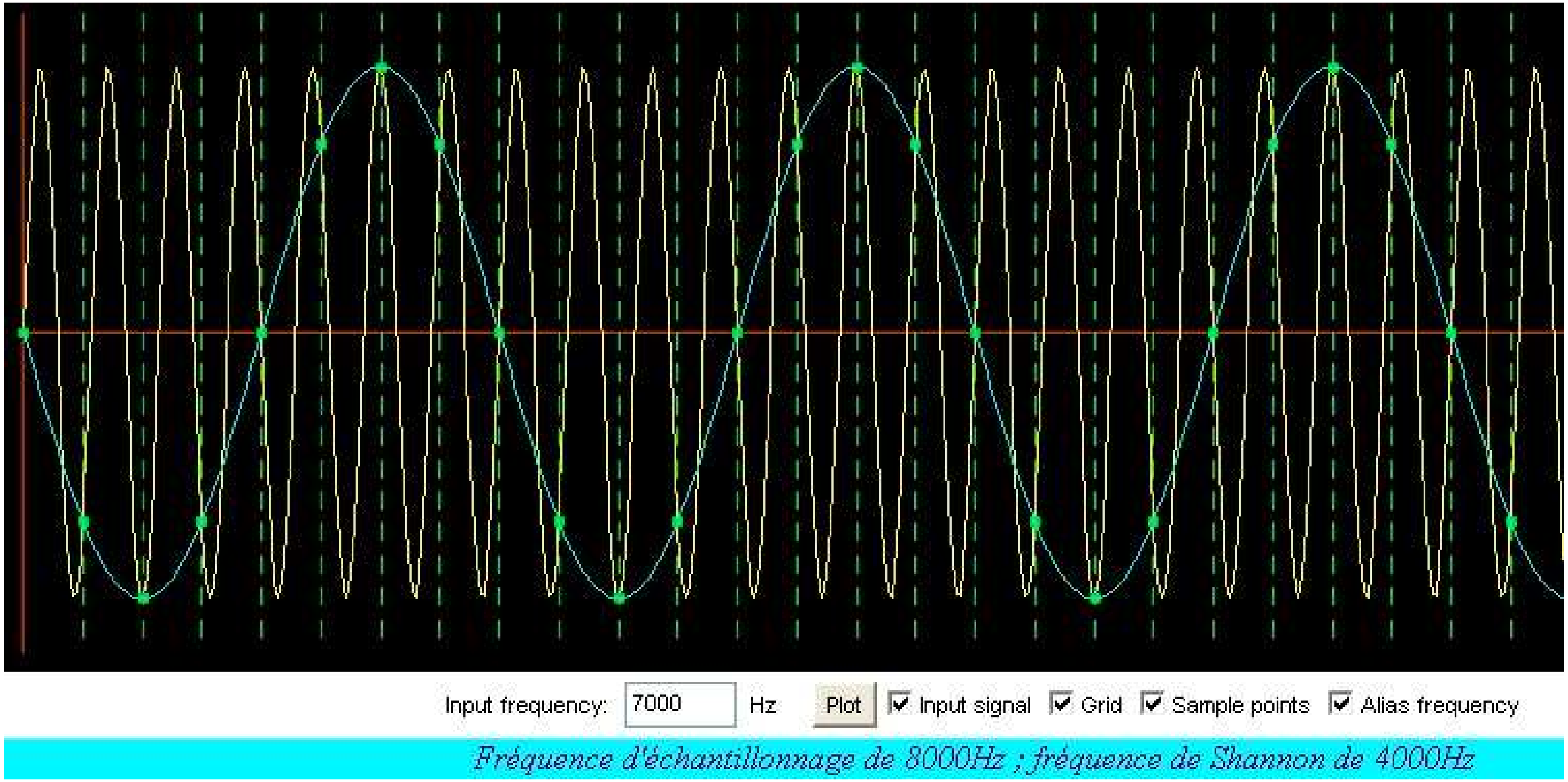
- Le théorème d'échantillonnage de Shannon dit qu'un signal temporel peut être reconstitué pour tout t à partir de ses échantillons si la fréquence d'échantillonnage f_{ech} est supérieure ou égale au double de sa fréquence de coupure f_c.

4– L’aspect temporel de l’échantillonnage, retour sur le théorème de Shanon

- Voilà pourquoi il est généralement nécessaire (mais pas toujours, car il existe des cas particuliers...), pour échantillonner convenablement un signal analogique, de le filtrer préalablement afin que son spectre n'ait pas de fréquences supérieures à la fréquence de repliement $f_{ech}/2$. Dans le cas contraire, il y aurait "**repliement**" du spectre et substitution de la fréquence d'origine au profit d'une autre.

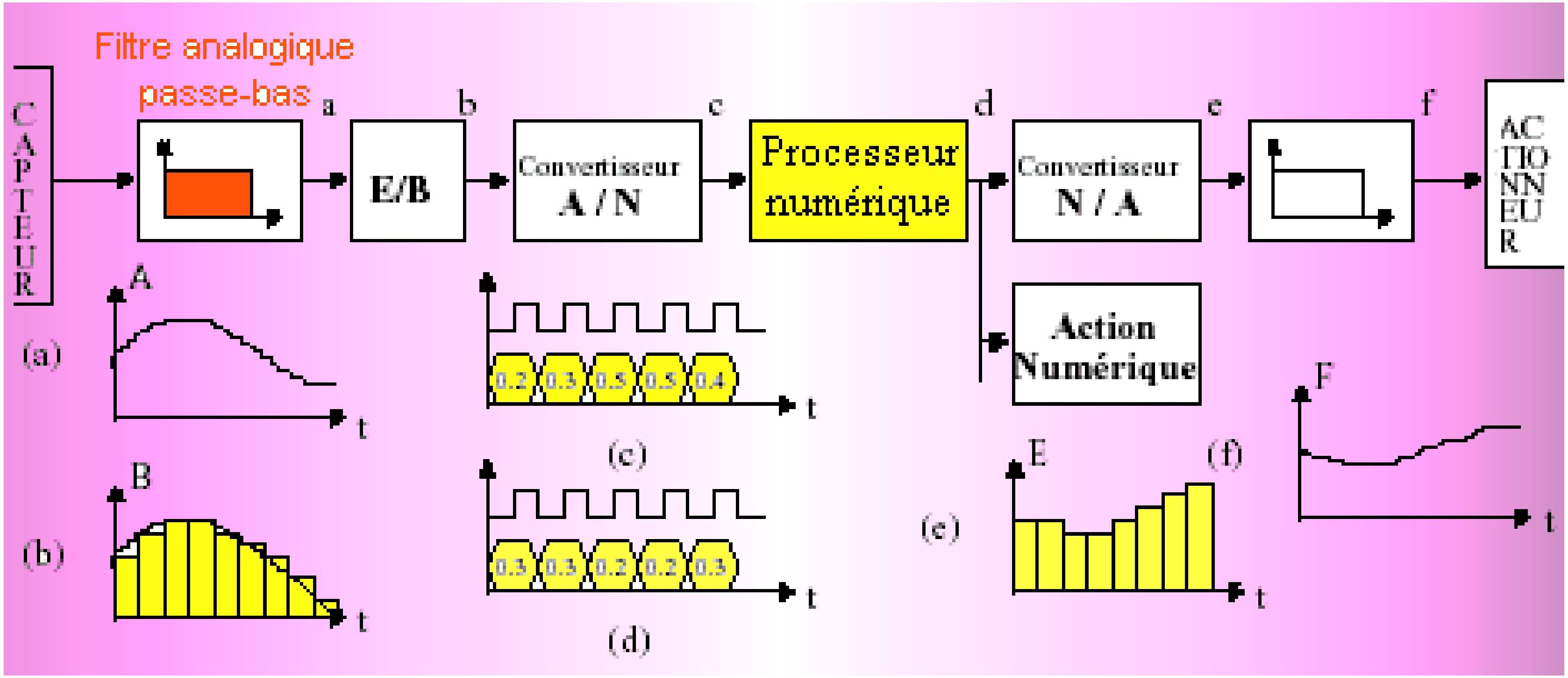
4– L'aspect temporel de l'échantillonnage, retour sur le théorème de Shanon

- Illustration d'un repliement de spectre



4– L'aspect temporel de l'échantillonnage, retour sur le théorème de Shanon

- D'ou le filtre passe bas (a) …

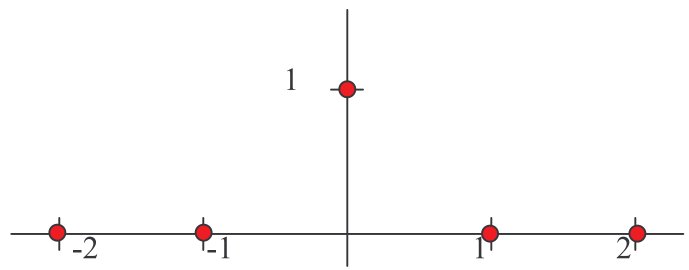


5- Signaux discrets

5- Signaux discrets élémentaires

- Échantillon unité

$$d(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k=0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

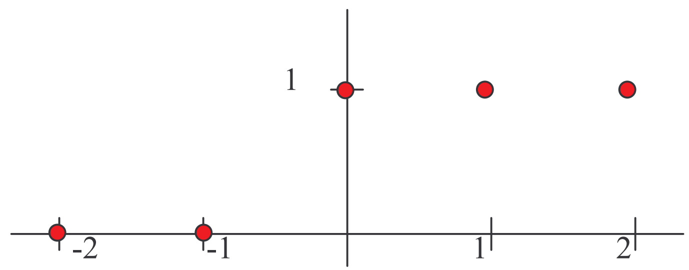


Attention à ne pas confondre avec l'impulsion de Dirac où l'amplitude est $+\infty$ en $t=0$

5- Signaux discrets élémentaires

- Échelon unité

$$u(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

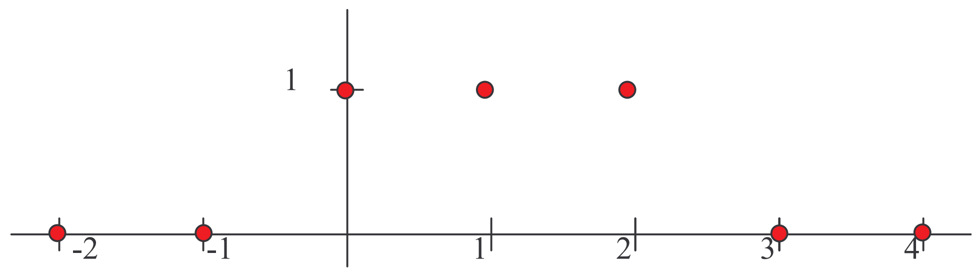


C'est la fonction Heavyside échantillonnée avec une période de 1 et tel que $u(0) = 1$

5- Signaux discrets élémentaires

- Signal rectangulaire

$$\text{rect}_K(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq k \leq K\text{-}1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$



Exemple avec K=3

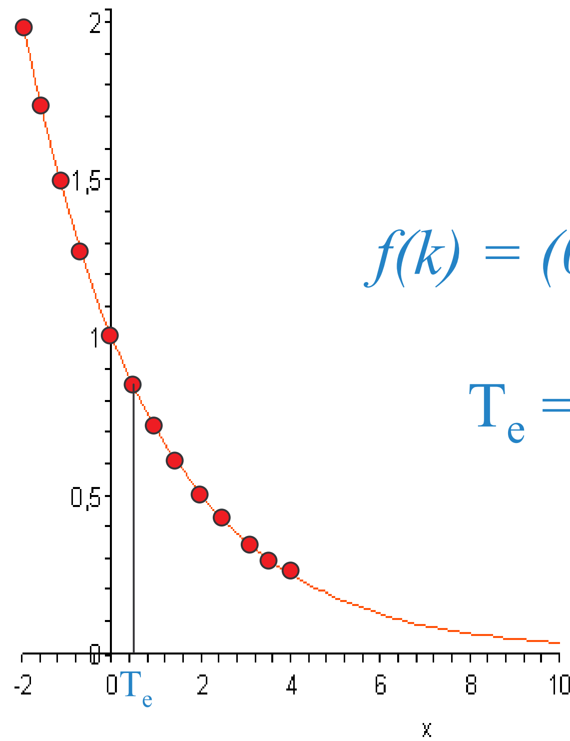
Différent du signal continu rectangle qui lui est centré en 0

5- Signaux discrets élémentaires

- Signal exponentiel

$$x(k) = a^{kT_e}$$

Si $0<a<1$ suite décroissante
Si $a>1$ suite croissante



$f(k) = (0,5)^{0,5.k}$

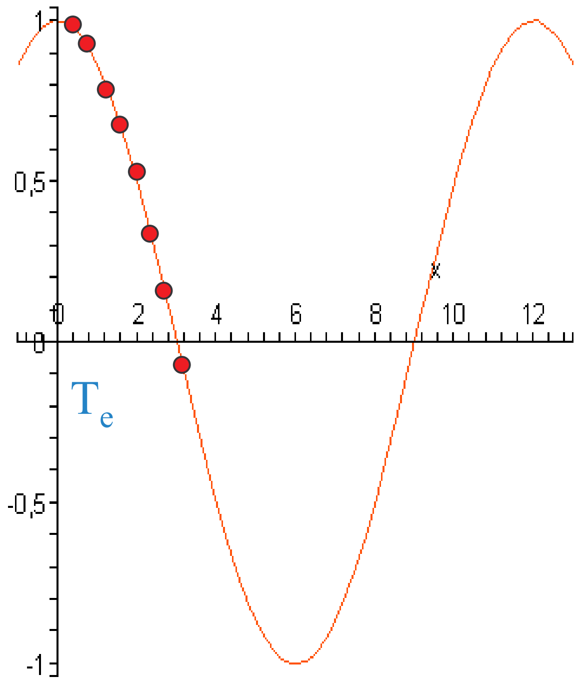
$T_e = 0,5$

5- Signaux discrets élémentaires

- Signal sinusoïdal :

  Discrétisation de $x(t) = \sin(w.t) = \sin(2\pi t/T)$ avec une période T_e : $x(k) = \sin(2\pi k T_e/T)$ et $k \in \mathbb{Z}$

Exemple : $\cos(2\pi k T_e/T)$ avec
$T_e = T/12$ et $T=2$



5- Relations entre signaux

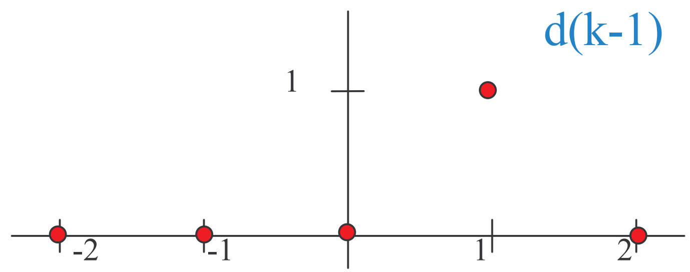
- Signaux décalés:

  signal retardé de $n.T_e$: $x(k-n)$

  signal avancé de $n.T_e$: $x(k+n)$

Exemple : Échantillon unité retardé :

$$d(k-n) = \begin{cases} 1 \text{ si } k=n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$



6- Convolution de signaux

6- Convolution discrète

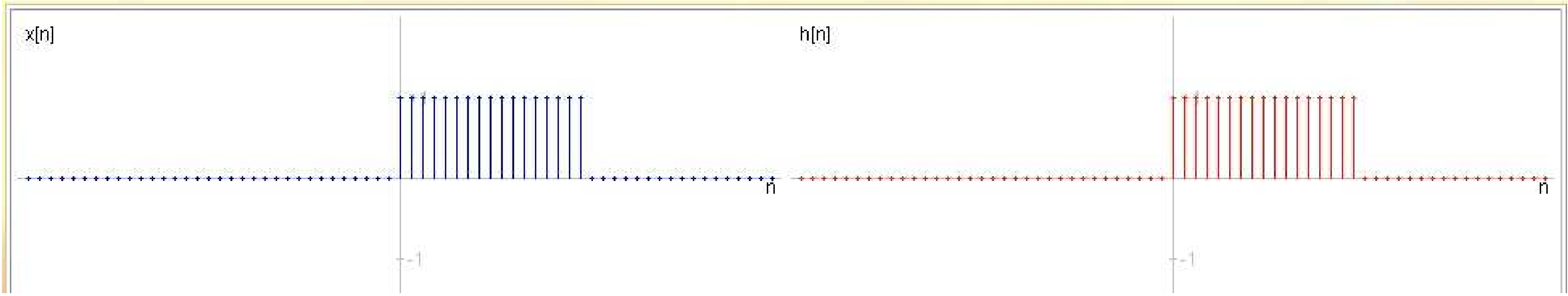
- On appelle le produit de convolution de deux signaux discrets f et g, l'expression :

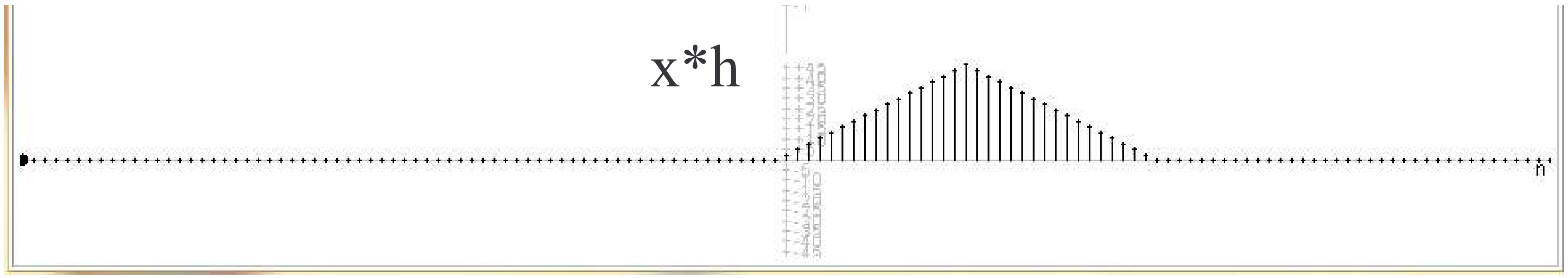
$$f(k)*g(k) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} f(i).g(k-i)$$

On note cette opération *

Le produit de convolution de f et g s'écrit f*g

6- Convolution discrète





6- Convolution discrète

- Propriété :
  - commutativité : $f * g = g * f$
  - associativité : $(f * g) * h = f * (g * h)$
  - distributivité de * sur + : $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

6- Opérateurs 2D de convolution discrète

1/9	1/9	1/9		0	-1	0		-2	-1	0
1/9	1/9	1/9	...	-1	5	-1	...	-1	1	1
1/9	1/9	1/9		0	-1	0		0	1	2
flou				contraste+				repoussage		

1/16	2/16	1/16		.	.	.		.	.	.
2/16	4/16	2/16	...	.	.	.	...	.	.	.
1/16	2/16	1/16		.	.	.		.	.	.
blur gaussien				.				.		

dérivées première

Roberts	1	0	0		0	-1	0
	0	-1	0	ou	1	0	0
	0	0	0		0	0	0
Prewit	-1	0	1		1	1	1
	-1	0	1	ou	0	0	0
	-1	0	1		-1	-1	-1
Sobel	-1	0	1		1	2	1
	-2	0	2	ou	0	0	0
	-1	0	1		-1	-2	-1

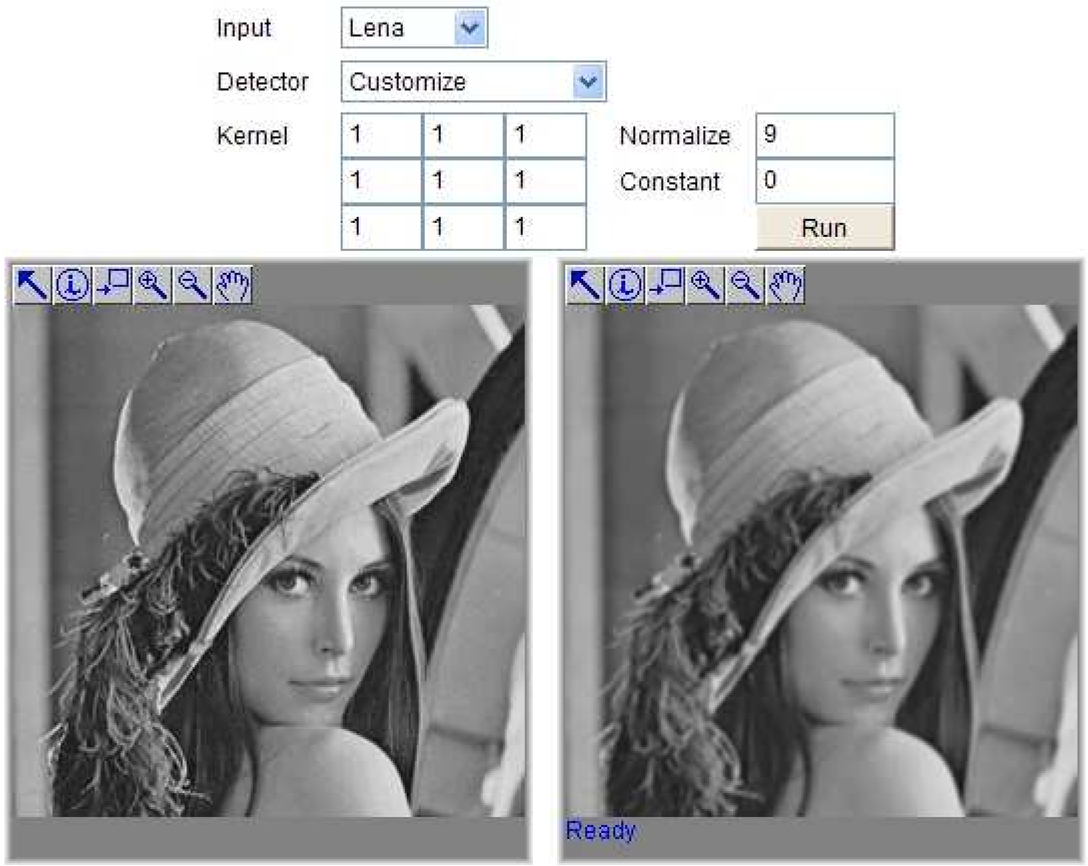
dérivées seconde

0	0	0		0	1	0
1	-2	1	...	0	-2	0
0	0	0		0	1	0

laplaciens (détection de contours) Σ (coeff)=0

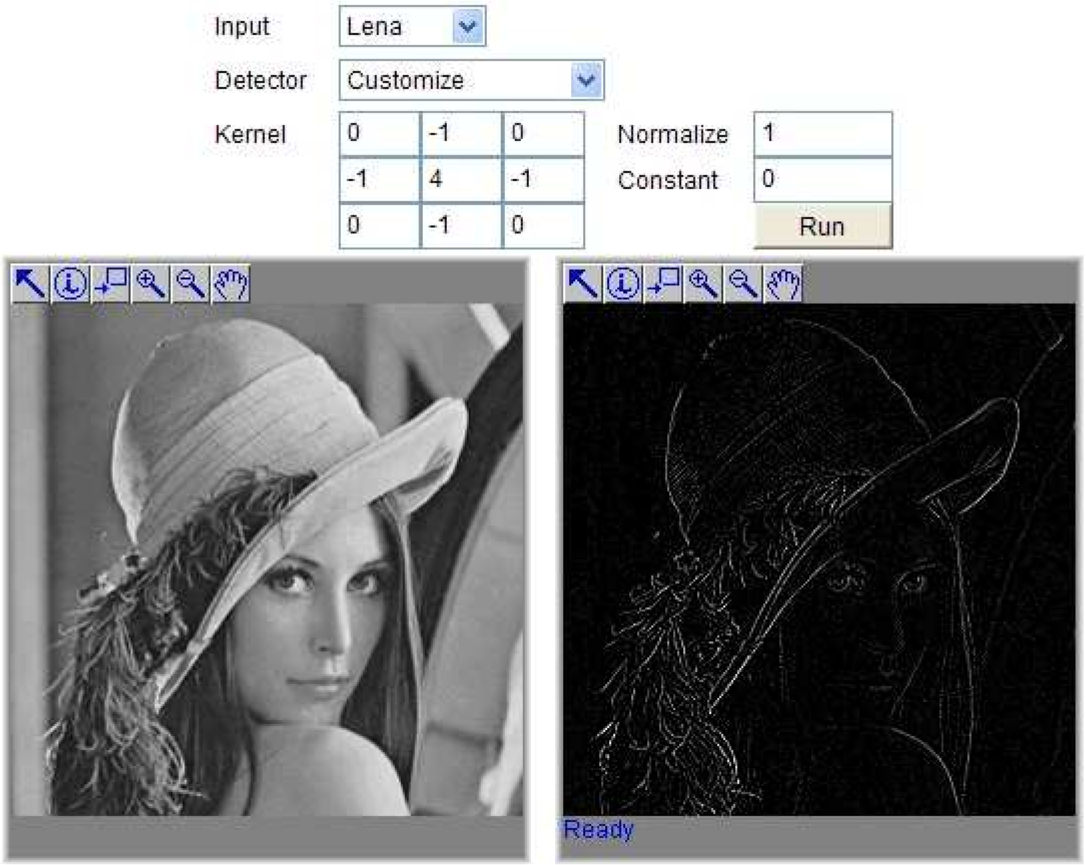
0	-1	0		-1	-1	-1		1	-2	1
-1	4	-1	...	-1	8	-1	...	-2	4	-2
0	-1	0		-1	-1	-1		1	-2	1

6- Exemple de flou



© 2005 EPFL

6- Exemple contour



© 2005 EPFL

6 - Convolution de signaux continus

- **Rappel sur la convolution de signaux continus:**
- Le comportement d'un système linéaire invariant dans le temps et à temps continu, d'entrée x(t) et de sortie y(t), est décrit par l'intégrale de convolution

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v)\,x(t-v)\,dv$$

- dans laquelle la réponse impulsionnelle (présumée connue) du système est h(t).
- On note * l'opération de convolution .

6 - Convolution de signaux continus

- Le comportement d'un système linéaire invariant dans le temps et à temps continu, d'entrée x(t) et de sortie y(t), est décrit par l'intégrale de convolution

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v)x(t-v)\,dv$$

6 - Convolution de signaux continus

- Propriété :
  - commutativité : $f * g = g * f$
  - associativité : $(f * g) * h = f * (g * h)$
  - distributivité de $*$ sur $+$: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

6- Quelques convolutions classiques

- produit de convolution par un signal porte :
  - représente la valeur moyenne de ce signal sur la taille de la porte
- produit de convolution par une impulsion de Dirac
  - redonne le signal (l'impulsion de Dirac est neutre pour la convolution).

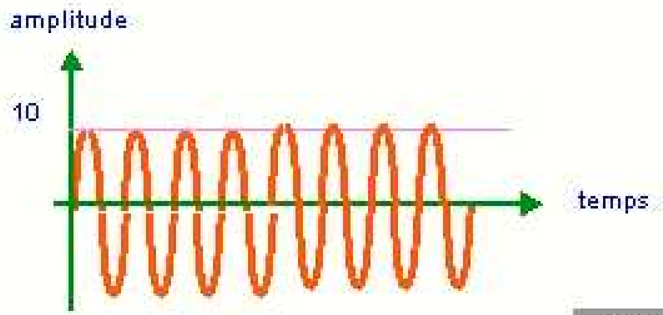
6 - Convolution de signaux continus

- La convolution continue est la succession des opérations de **Retournement, Translation, Multiplication & Intégration (RTMI)**

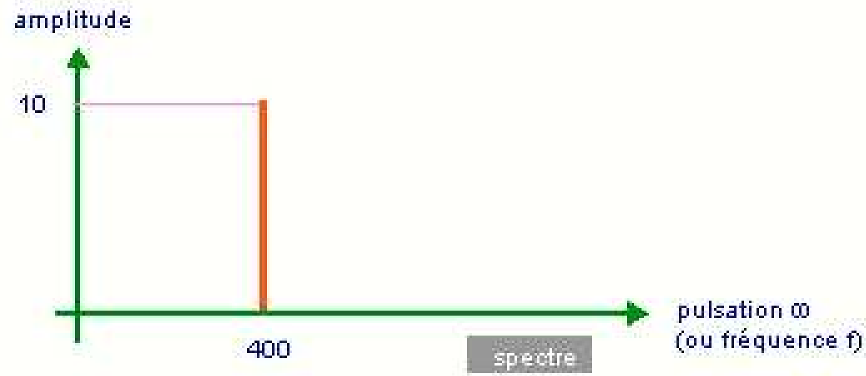
7- Quelques mots sur l'aspect fréquentiel du signal ...

Pour voir les fréquences contenues dans un signal, on le représente sous la forme d'un diagramme amplitude-fréquence appelé spectre :

Exemple 1 : le signal $x(t) = 10\sin(400t)$ est un signal sinusoïdal d'amplitude 10 et de pulsation 400



oscillogramme



spectre

Exemple 2 : fréquences captées par une antenne entre 88 et 108 MHz (bande FM)

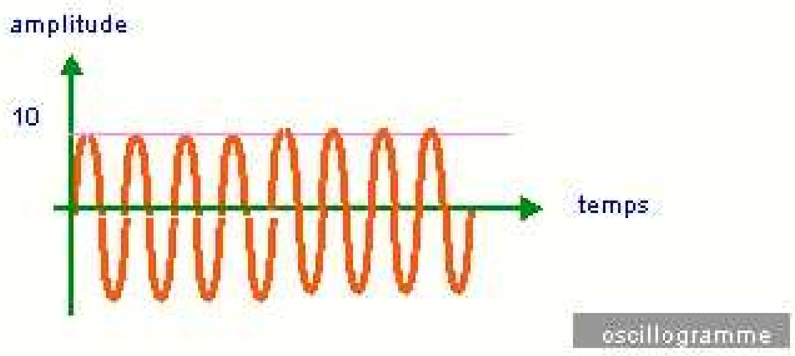
1 : France-Musique 91,2 MHz
2 : France-Inter 95,7 MHz
3 : Radio France alsace 102,4 MHz
4 : France-Info 105,7 MHz

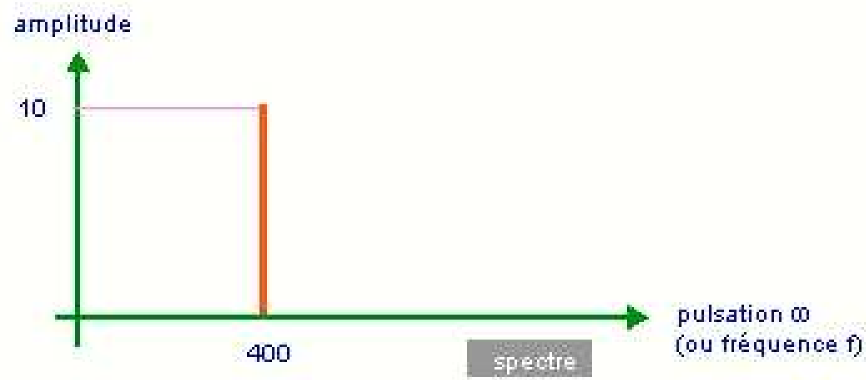
7- La transformée de Fourier

- La transformée de Fourier permet de représenter en fréquence (représentation spectrale) un signal

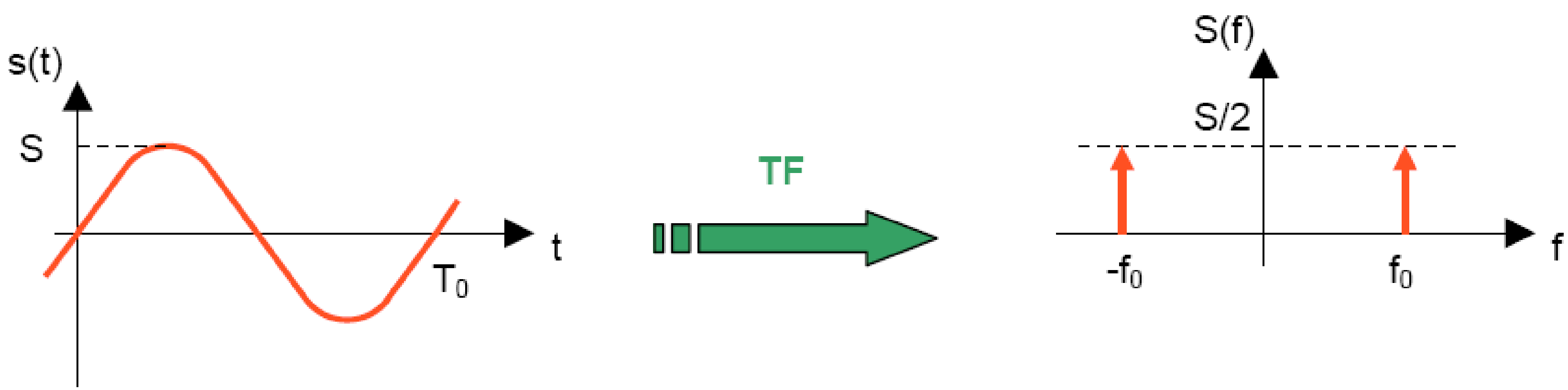
Pour voir les fréquences contenues dans un signal, on le représente sous la forme d'un diagramme amplitude-fréquence appelé spectre :

Exemple 1 : le signal $x(t) = 10\sin(400t)$ est un signal sinusoïdal d'amplitude 10 et de pulsation 400





7- La transformée de Fourier



<u>Remarques :</u>

❶ La transformée de Fourier d'une fonction sinusoïdale de fréquence f_0 est représentée par deux impulsions de Dirac centrée sur les fréquences $-f_0$ et $+f_0$. Bien entendu, l'impulsion centrée sur f_0 n'a pas d'existence physique.

❷ Le spectre d'une décomposition en série de Fourier sera donc un spectre discontinu de raies aux fréquences des sinusoïdes présentes dans la décomposition.

7- Illustration de la TF

- Exemple de signal analysé par une TF

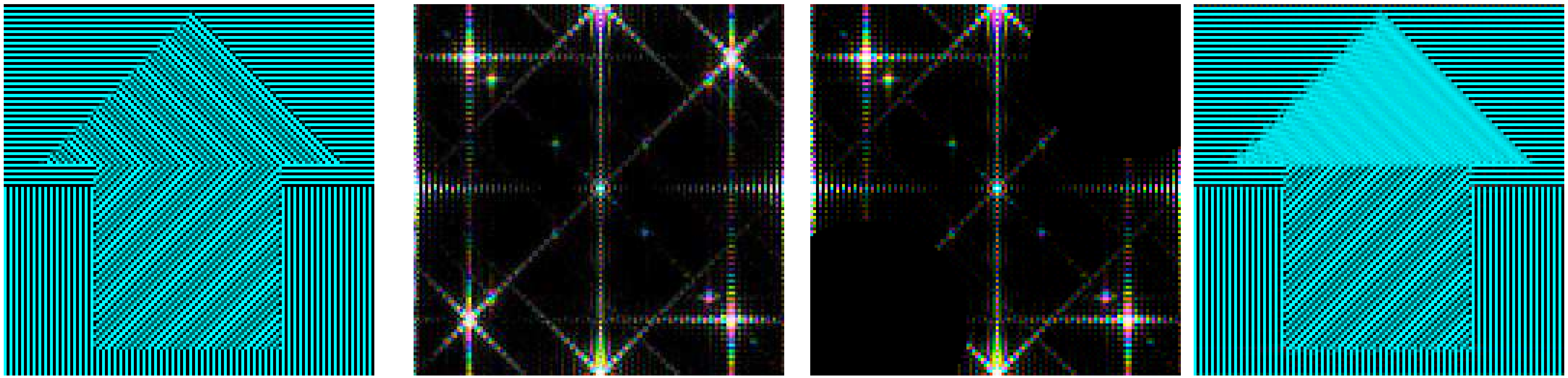
- Rappel :

  wave number : pulsation (ω)

  $T=2\pi/\omega$, $f=1/T$ … $f = \omega/2\pi$

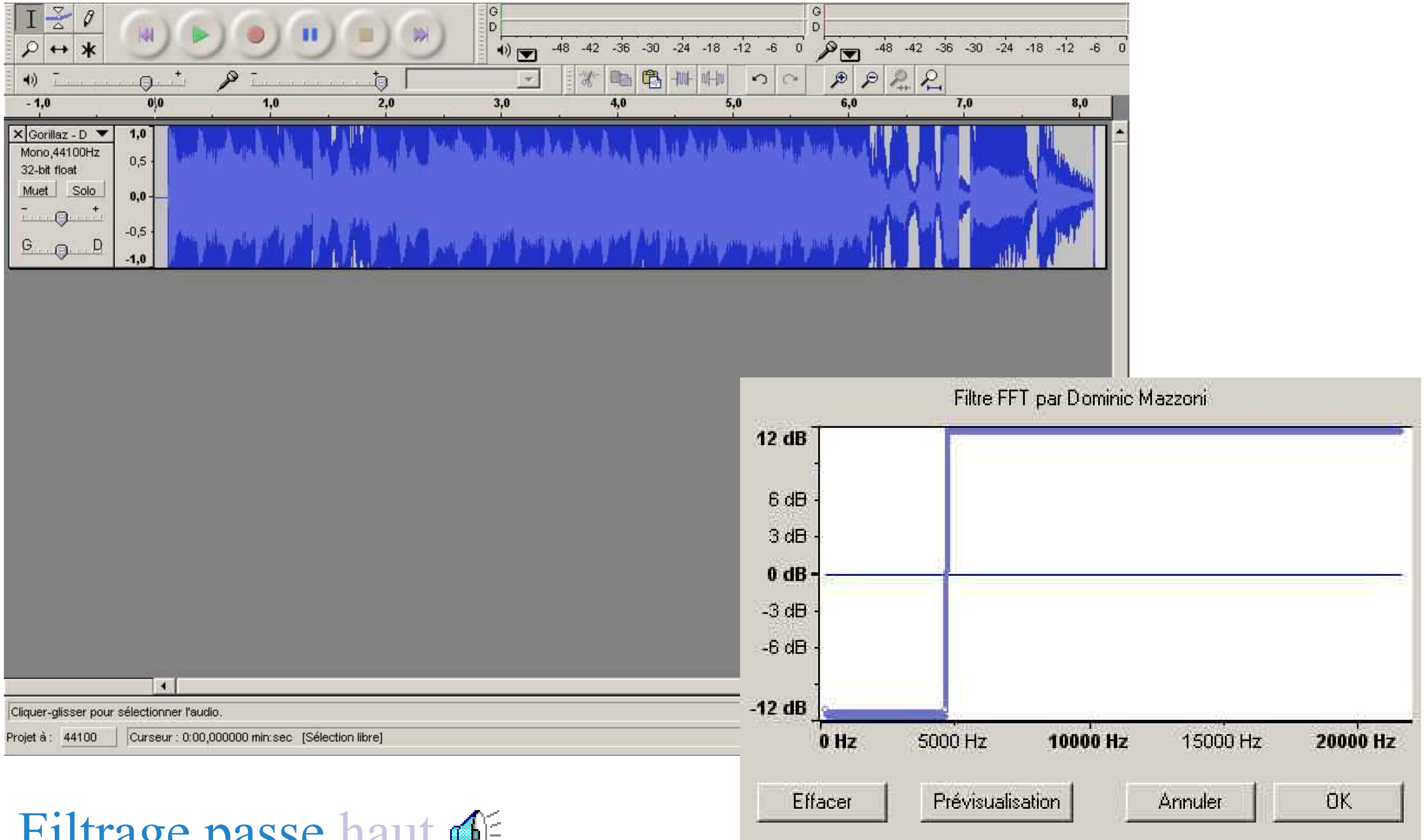
7- Exemple de traitement numérique

- Masquage fréquentiel :



TF Masque fréquentiel TF^{-1}

7- Exemple de traitement numérique



* Filtrage passe haut

7- La transformée de Fourier

Transformée de Fourier de Dirac :

$$s(t) \xrightarrow{TF} S(f)$$

$$\delta(t) \longrightarrow 1$$

$$\delta(t-\tau) \longrightarrow e^{-2j\pi f\tau}$$

$$e^{-2j\pi f_0 t} \longrightarrow \delta(f+f_0)$$

Egalité de Parceval :

Pour un signal d'énergie finie, l'énergie du signal est identique dans les domaines temporel et fréquentiel.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 \, df}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{(formule d'Euler)}$$

2.2.2 Propriétés

	s(t)	S(F)
Linéarité	$\alpha.s(t) + \beta.r(t)$	$\alpha.S(f) + \beta.R(f)$
Translation	$s(t-t_0)$	$e^{-2j\pi f t_0} S(f)$
	$e^{2j\pi f_0 t} s(t)$	$S(f-f_0)$
Conjugaison	$s^*(t)$	$S^*(-f)$
Dérivation	$\frac{d^n s(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n S(f)$
Dilatation	$s(at)$ avec $a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} S(\frac{f}{a})$
Convolution	$s(t) * r(t)$	$S(f) \bullet R(f)$
	$s(t) \bullet r(t)$	$S(f) * R(f)$
Dualité	S(t)	s(-f)

7- La transformée de Fourier

2.2.1 Définition

Soit s(t) un signal déterministe. Sa transformée de Fourier est un fonction, généralement complexe, de la variable *f* et définie par :

$$\boxed{S(f) = TF[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt}$$

Si cette transformée existe, la transformée de Fourier inverse est donnée par :

$$\boxed{s(t) = TF^{-1}[S(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, e^{j2\pi ft}\, df}$$

Remarque :

On appelle **spectre** de *s* le module de la transformée de Fourier de *s*.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{(formule d'Euler)}$$

Conclusion - Points à retenir

- Notion de signal analogique vs numérique
  - acquisition, échantillonnage, théorème de Shannon, quantification
- Convolution de signal
- Transformation de Fourier
  - représentation fréquentielle d’un signal

Fin