La théorie des jeux:

Cours sur les Sociétés Virtuelles GMIN334
Master 2-Informatique

Jacques Ferber

LIRMM - Université Montpellier II
161 rue Ada
34292 Montpellier Cedex 5

Email: ferber@lirmm.fr
Home page: www.lirmm.fr/~ferber

Version 1.1 Sept. 2012

Présentation

- **La théorie des jeux constitue une approche mathématique de problèmes de stratégie tels qu'on en trouve en recherche opérationnelle et en économie.**

- **Elle étudie les situations où les choix de deux protagonistes - ou davantage - ont des conséquences pour l'un comme pour l'autre.**

- **Utilisé pour analyser les situations de coopération/ conflits qui prennent en compte les choix de l'autre (des autres)**

Exemple

◆ Restaurant

- n personnes sont au restaurant
- Chaque personne choisit de payer ce qu'il consomme: c'est un problème de décision individuelle.
- Avant le repas, on décide de partager la note en n, quel que soit ce qu'on mange: cela devient un jeu!!
  - ☞ Intérêt à manger plus que les autres, et que les autres mangent moins..

◆ Applications dans de nombreux domaines

- Economie, domaine militaire, gestion d'entreprise, systèmes multi-agents, etc..

Exemple et définition

- **Le jeu: Pierre/ciseau/feuille**
  - Pierre gagne contre ciseau, ciseau contre feuille, feuille contre pierre
- **Définitions:**
  - Joueurs: les protagonistes d'une situation de coopération/ compétition..
  - Choix, action: une décision
  - Stratégie: une suite de choix
  - Gain (payoff): ce que chaque joueur gagne en fonction des coups des autres

Représentation sous forme de matrices

- **Deux joueurs:**
  - pierre gagne contre ciseau, ciseau contre feuille, feuille contre pierre

	J2: P	J2: C	J2: F
J1: P	0,0	1,0	0,1
J1: C	0,1	0,0	1,0
J1: F	1,0	0,1	0,0

Jeux simultanés

- **Le principe**
  - Si jeu coopératif: les joueurs peuvent se concerter avant de faire un choix. Si jeu non coopératif, les joueurs ne peuvent pas communiquer avant..
    - On traitera plus le cas des jeux non coopératifs, plus classiques..
  - Chaque joueur $\boldsymbol{i}$ choisit sa stratégie $\boldsymbol{s_i}$ sans connaître les choix des autres.
  - Alors each joueur $\boldsymbol{i}$ reçoit son gain $\boldsymbol{u_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)}$.
  - Le jeu s'arrête
- **Une grande catégorie de jeux qui ont été très analysés**
- **Formalisation**
  - Un ensemble fini de joueurs {1, 2, …, n}
  - Espace des stratégies (choix) de chaque joueur $S_1\ \ S_2\ \ \ldots\ S_n$
  - Les fonctions de gain de chaque joueur $u_1\ \ u_2\ \ \ldots\ u_n$ où $u_i : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \rightarrow R$.
- **Exemple**

Jeux à 2 joueurs

	J2: d1	J2: d2
J1: d1	x,x	u,v
J1: d2	v,u	y,y

- **Jeux symétriques**
- **Jeu d'accord social ssi:**
  - x ou y >0 et , si x et y >0, alors x=y
  - u ou v négatif ou nul

Exemple d'accord social

- **Deux personnes, Jean et Marie, décident d'aller au restaurant..**
- **Ils ne communiquent pas, mais ils connaissent leur préférences mutuelles (informations complètes)**
- **Jean et Marie préfèrent le restau Indien à la pizzéria**
  - Un bon début de soirée en perspective

		Jean	
		Pizza	Indien
Marie	Pizza	1 , 1	0 , 0
	Indien	0 , 0	2 , 2

Exemple de jeu sans accord social: la bataille des sexes

- **Un autre jour, Jean et Marie ont décidé de sortir ensemble. Chacun préfère sortir plutôt qu'être seul..**
- **Marie préfère l'Opéra, Jean le match de foot**
- **Mais on suppose qu'ils ne communiquent pas, mais ils connaissent leur préférences (informations complètes)**
- **La solution, il faut que l'un choisisse le choix de l'autre, mais que l'autre ne change pas de choix..**
  - Une mauvaise soirée en perspective

		Jean	
		Opéra	Match foot
Marie	Opéra	2 , 1	0 , 0
	Match foot	0 , 0	1 , 2

Dilemme des prisonniers

◆ Le dilemme du prisonnier

- chaque prisonnier peut trahir (T) ou non (S)
- si aucun n'avoue (S-S) : 2 ans
- si les 2 trahissent (T-T): 4 ans
- si un seul trahit: il est libre et l'autre a 5 ans

Joueur 2

Joueur 1

	S:	T:
S:	-2,-2	-5,0
T:	0,-5	-4,-4

- x = -2, y = -4
- u = -5, v = 0
- Ce n'est pas un jeu d'accord social

Equilibre de Nash

- **L'équilibre de Nash décrit une issue d'un jeu non coopératif dans lequel aucun joueur n'a intérêt à modifier sa stratégie, compte tenu des stratégies des autres joueurs.**

- **Soit un jeu non-coopératif à n joueurs, et $s^* = (s^*_1, \ldots, s^*_n)$ une combinaison de choix stratégiques de ces n joueurs**
  - s^*_i est le choix stratégique du joueur i
  - $s^*_i \in S_i$, l'ensemble des stratégies praticables par le joueur i.
  - $u_i (s^*_1, \ldots, s^*_n)$ est le gain du joueur i lorsque s* est sélectionné.

- $\forall s_i \in S_i \; u_i (s^*_1, \ldots s^*_i, \ldots s^*_n) > u_i (s^*_1, \ldots s_i, \ldots s^*_n)$

Exemple

		Joueur 2 L	C	R
Joueur 1	T	0 , 4	4 , 0	5 , 3
	M	4 , 0	0 , 4	5 , 3
	B	3 , 5	3 , 5	6 , 6

- **La combinaison des stratégies (B, R) possède la propriété suivante:**
  - Le joueur 1 ne peut pas faire mieux que B, sachant que le joueur 2 choisit L, C ou R
  - Le joueur 2 ne peut pas mieux faire que R, sachant que le joueur 1 choisit T, B ou M
- **Il existe donc un équilibre de Nash (et en plus optimal..)**
  - tout le monde est heureux! (jeu d'accord social, on verra pourquoi avec Pareto)

Equilibre de Nash dans le dilemme du prisonnier

- **Il existe un équilibre de Nash dans le dilemme du prisonnier. Celui ou les deux trahissent !!**
  - Bien qu' il existe un autre équilibre, mais qui ne peut être choisi « rationnellement » par aucun des deux joueurs..
  - Car rester silencieux (S) ne constitue pas un équilibre: l'autre joueur pouvant améliorer son gain en jouant (T)

Joueur 2

Joueur 1

	S:	T:
S:	-2,-2	-5,0
T:	0,-5	-4,-4

Jeux de coordination

- **Jeux symétriques dans lesquels il s'agit simplement de se mettre d'accord (sans compétition)**
  - Ex: rouler à gauche ou à droite

Joueur 2

Joueur 1

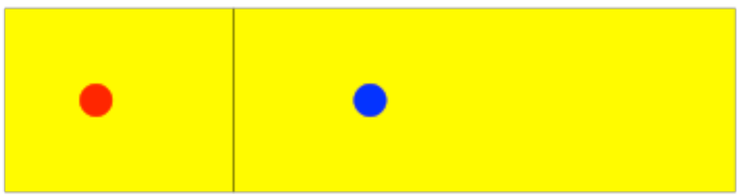
	G:	D:
G:	1,1	-1,-1
D:	-1,-1	1,1

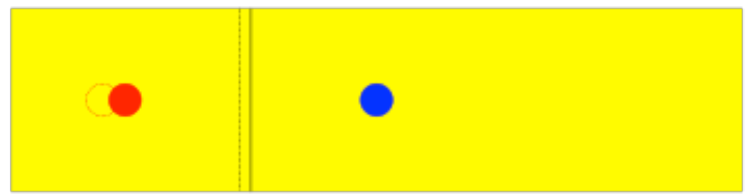
2 équilibres de Nash

Un problème politique: les marchands de glace

- **Deux marchands de glace doivent choisir un emplacement sur une plage où les clients sont répartis uniformément (prix et glaces sont les mêmes**

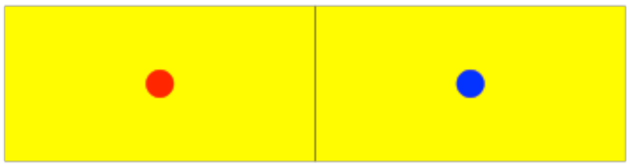
- **Emplacement au hasard:**
  - Chaque acheteur étant paresseux va vers le plus proche…
  - Donc Bleu a plus d' acheteur que Rouge (nombre proportionnel à la ligne de plage devant chaque vendeur.

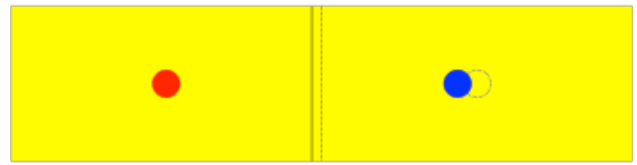




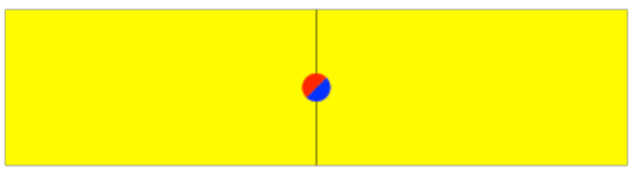
Marchands de glace #2

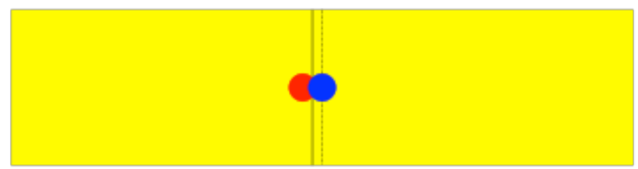
- Même en cas de symétrie, chacun à intérêt à aller vers le centre de la plage





- Résultat final: les marchands se retrouvent au centre (équilibre de Nash)





- Mais pas un équilibre optimal, si l'on prend en compte le déplacement des clients...

Optimum de Pareto

- **Préférence au sens de Pareto $>_P$:**
  - Entre les états des agents d'un jeu
  - $(u_1,\ldots u_i,\ldots u_n) >_P (u'_1,\ldots u'_i,\ldots u'_n)$ ssi $\forall i \in [1,n],\ u_i \geq u'_i$
- **Optimum de Pareto: maximum de cette relation**
- **on ne peut augmenter le gain d'un agent sans diminuer celui d'un autre**
  - Très souvent utilisé en économie pour décrire un monde optimum

Accord social

- **Choix des restaus et accord social:**
  - Deux équilibres de Nash (P-I et I-P)
  - Un optimum de Pareto (I-I)

		Jean: Pizza	Jean: Indien
Marie	Pizza	1 , 1	0 , 0
	Indien	0 , 0	2 , 2

Pareto et l'économie

- **Utilitarisme stricte: principe du plus grand bonheur:**
  - On cherche à augmenter les gains (le bonheur, la satisfaction) de l'ensemble de la population.
  - Mais si les gains des riches augmentent au détriment des pauvres?
  - Pareto permet d'atteindre les états les plus satisfaisants et l'utilitarisme (la somme des gains) de partager les états de Pareto en préférant les états les plus satisfaisants.
- **Néanmoins Pareto n'est ni équitable, ni « social »:**
  - Sur l'ensemble des états de Pareto on peut préférer les états offrant les plus grands biens..
    - ☞ L'augmentation des riches si elle ne diminue pas la richesse des pauvres est donc meilleure au sens de Pareto et de l'utilitarisme.

Pareto et l'économie

- **Le cas d'un système n'offrant que des possibilités de plus grandes richesses**
  - Tous les états sont des optima de Pareto, car l'augmentation des richesses de l'un ne se fait jamais au détriment des richesses de l'autre..
  - Le critère utilitariste considère que l'état D, D est bien meilleur que les autres états, mais cela n'est pas très équitables en terme de répartition de richesses
  - Mais il n'est pas sûr de ce fait que le joueur 1 joue D, car il n'a aucun intérêt pour lui.. (en jouant C, il a pratiquement la même assurance de gains)

Joueur 2

Joueur 1

	A	B	C	D
A	5, 10	10, 20	10, 30	15, 40
B	10, 20	10, 30	15,30	15, 50
C	15, 30	20, 40	20, 50	20, 50
D	20, 20	20, 50	20, 70	20, 200

Les équilibres du dilemme des prisonniers

Joueur 2

Joueur 1

	S:	T:
S:	-2,-2	-5,0
T:	0,-5	-4,-4

- **équilibre de Nash: (T,T)**
- **optimum de Pareto: (S,S)**

Les équilibres

- **Lorsque Pareto inclut dans Nash, pas de pbs..**
- **Lorsque Pareto n'est pas inclus dans Nash:**
  - pbs de coopération. Le moindre écart peut faire repasser dans l'équilibre de Nash qui n'est pas optimal au sens de Pareto (ex: dilemme du prisonnier).
- **Question: comment obtenir l'optimum de Pareto?**
  - Par la coopération…
  - Communication
  - ou itération (et évolution)

Compétition sur les dilemmes du prisonnier

- **Lancé par Axelrod.. Livre en 1984 (Donnant donnant)**
- **Idée:**
  - Mettre en compétition des programmes qui jouent au dilemme du prisonnier itératif.
- **Le nombre d'itération**
  - Nombre n est connu d'avance
  - Nombre peut s'arrêter à n'importe quel moment
- **On fait la somme à la fin des gains obtenus**

Stratégies sur des suites (1)

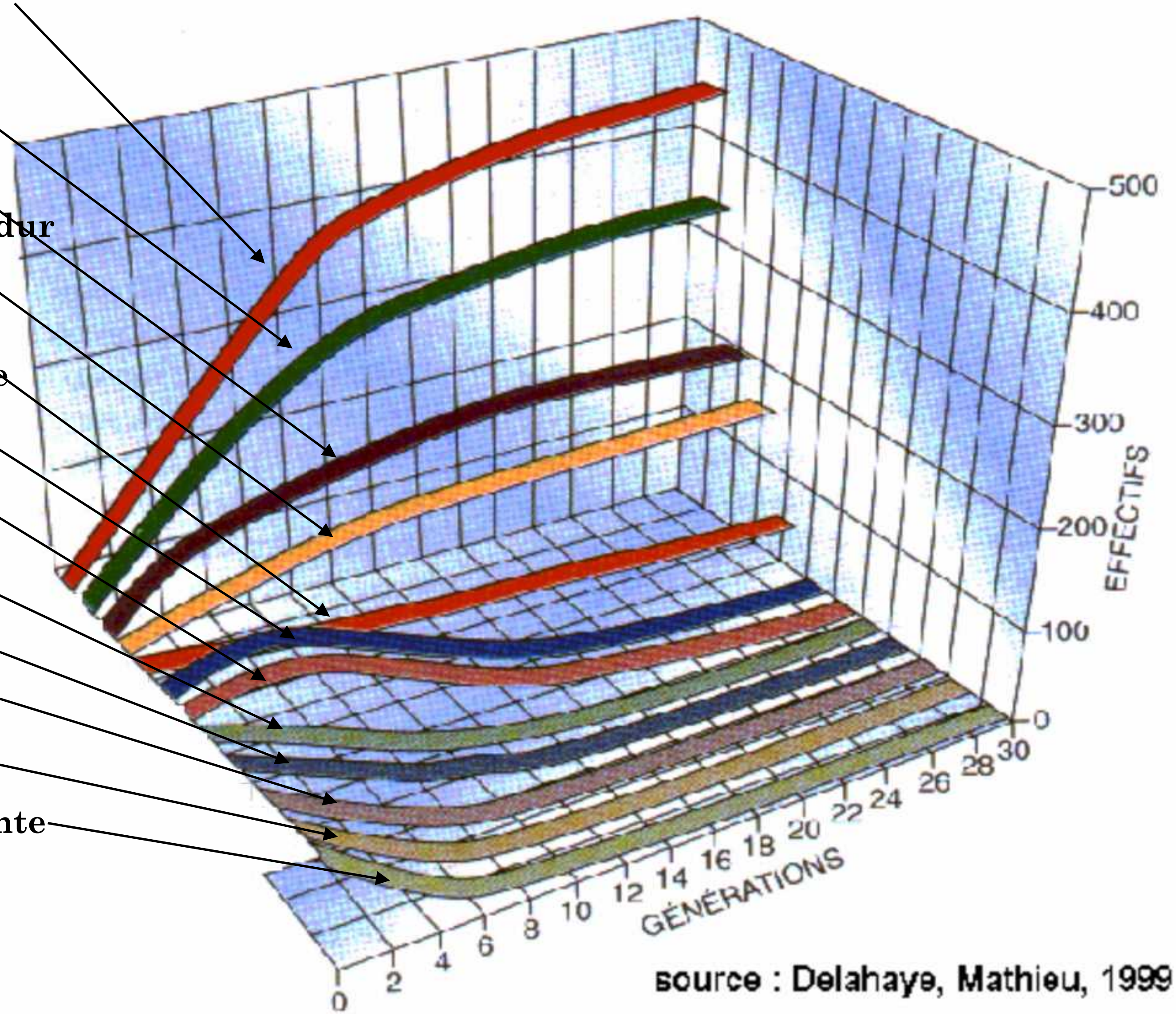
- Donnant-donnant **: coopération au premier tour, puis stratégie précédente du partenaire.**
- Majorité mou **: choix majoritaire de l'adversaire, coopération si égalité et au premier tour.**
- Rancunière **: coopération, puis défection permanente si le partenaire fait une fois défection**
- Donnant-donnant dur **: coopération, sauf si le partenaire a trahi une des 2 fois précédentes**
- Gentille **: toujours coopérer**
- Périodique gentille **: séquence cyclique de deux coopération, puis une défection**

Stratégies sur des suites (2)

- Sondeur **: séquence trahir, coopérer, coopérer**
- Lunatique **: défection une fois sur deux en moyenne (séquences aléatoires)**
- Méfiante **: défection au premier tour, puis stratégie précédente du partenaire**
- Majorité dur: **choix majoritaire de l'adversaire, défection si égalité et au premier tour.**
- Méchante **: toujours faire défection**
- Périodique méchante **: séquence cyclique de deux défections, puis une coopération**

Comparaison

- Donnant-donnant
- Majorité-mou
- Rancunière
- Donnant-donnant-dur
- Gentille
- Périodique-gentille
- Sondeur
- Lunatique
- Méfiante
- Majorité-dur
- Méchante
- Périodique-méchante



source : Delahaye, Mathieu, 1999

Tournoi du 50e anniversaire

- **Chaque équipe pouvait soumettre plusieurs programmes**
- **Équipe Nick Jennings (Southampton)**
- **Stratégie = séquence de 10 coups pour se reconnaître**
  - Si oui: stratégie maitre esclave
  - Si non: stratégie méchante
- **En fait: création d'une coalition entre deux programmes pour faire augmenter les gains**

Evolutionary Game Theory

- **La théorie des jeux évolutifs**
  - Utilise le principe du dilemme du prisonnier itératif..
- **Concept d' ESS (evolutionary stable strategy)**
  - Stratégie qui, sur un long terme évolutionnaire, se révèle particulièrement stable et empêche le développement d'autres stratégies plus nouvelles.
  - La stratégie « tit for tat » (donnant donnant) dans le dilemme du prisonnier est évolutionnairement stable. Elle peut battre n'importe quelle stratégie que l'on pourrait inventer pour ce jeu.

Stratégies dominante

- **On dit qu'une stratégie s1 domine une stratégie s2 si ses gains sont meilleurs, quels que soient les choix des autres joueurs.**

- **Une stratégie est dominée si il existe une autre stratégie qui réalise un meilleur gain, indépendamment des autres choix..**