

**Journées Graphes et Algorithmes
Marseille – 09/11/2010**

Quadruplets et réseaux non enracinés de niveau k

**Philippe Gambette,
Vincent Berry, Christophe Paul**



Plan

- Réseaux phylogénétiques
- Triplets et quadruplets
- Réseaux non enracinés de niveau k
- Complexité de la reconstruction
- Décomposition dans le cas dense
- Reconstruction dans le cas complet
- Lien avec *Non-Betweenness*

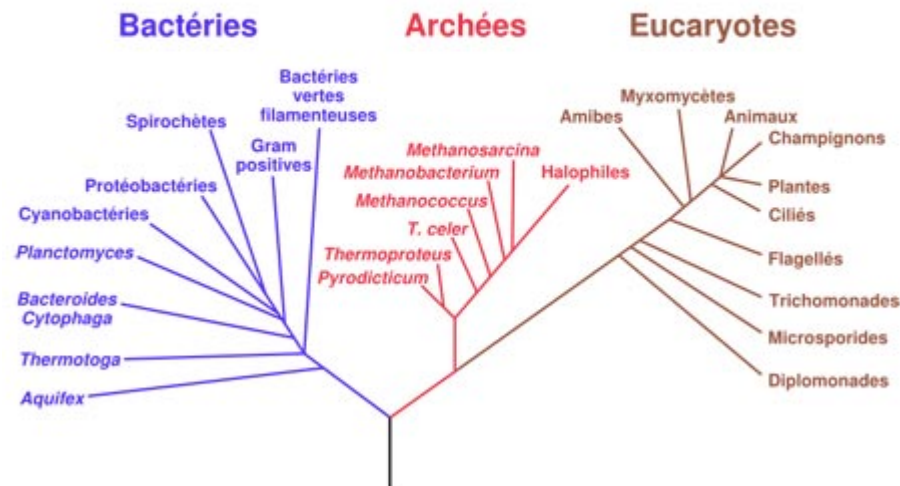
Les arbres phylogénétiques

Arbre phylogénétique



Un **arbre phylogénétique** est un **arbre** schématique qui montre les relations de parentés entre des entités supposées avoir un ancêtre commun.

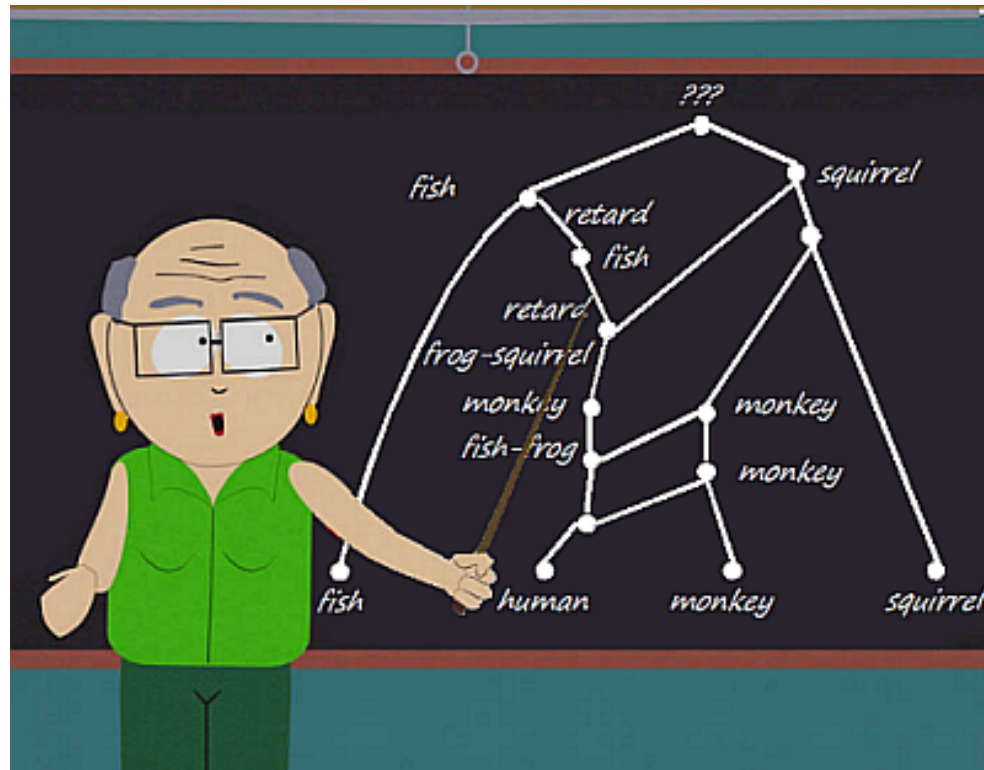
Arbre phylogénétique de la vie



D'après Woese, Kandler, Wheelis : Towards a natural system of organisms: proposal for the domains Archaea, Bacteria, and Eucarya, Proceedings of the National Academy of Sciences, 87(12), 4576–4579 (1990)

Les réseaux phylogénétiques

Problème : prendre en compte les échanges de matériel génétique entre espèces coexistantes



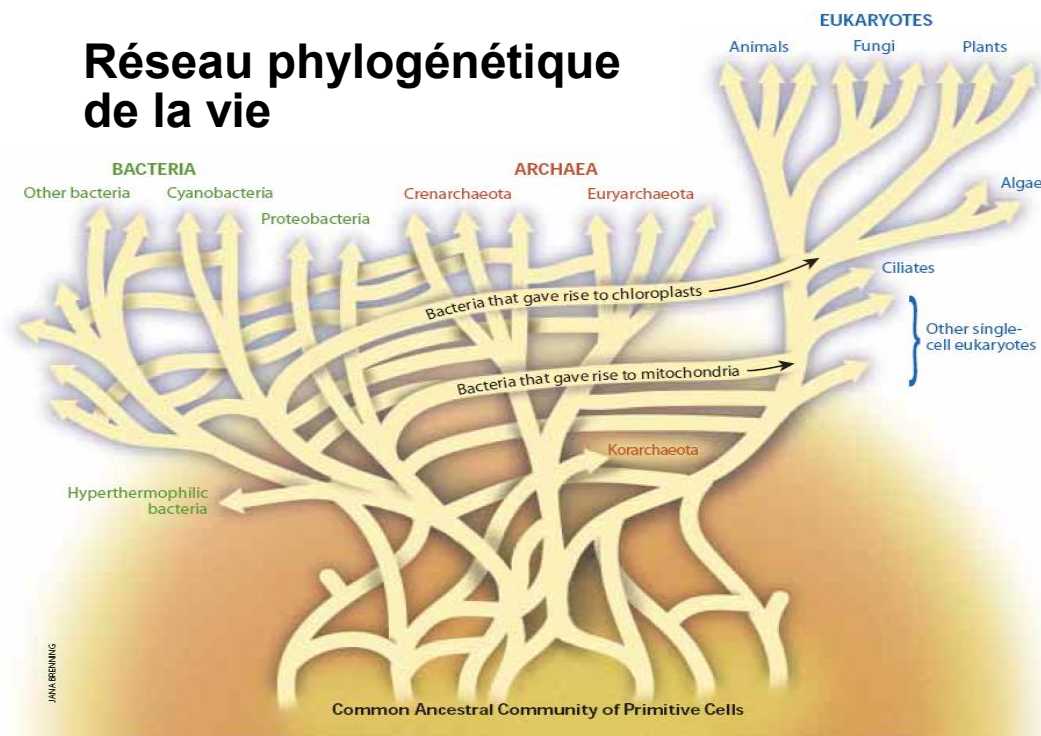
D'après Parker & Stone, South Park S10E12 – The Theory of Evolution according to Mrs Garrison (2006)

Les réseaux phylogénétiques

Réseau phylogénétique



Un réseau phylogénétique désigne un **graphe** utilisé pour visualiser les relations liées à l'évolution entre des espèces ou des organismes. Il doit être employé quand interviennent des événements d'**hybridations**, de transferts horizontaux de gènes, ou de **recombinaisons génétiques**.



Doolittle : Uprooting the Tree of Life, Scientific American (Fév. 2000)

Les réseaux phylogénétiques

Réseau phylogénétique



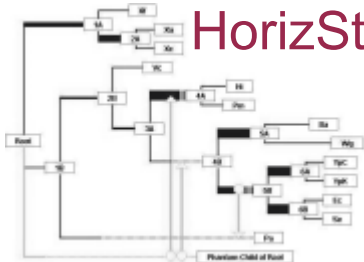
Un réseau phylogénétique désigne un **graphe** utilisé pour visualiser les relations liées à l'évolution entre des espèces ou des organismes. Il doit être employé quand interviennent des événements d'**hybridations**, de transferts horizontaux de gènes, ou de **recombinaisons génétiques**.



réseau de niveau 2

Level-2

diagramme de synthèse

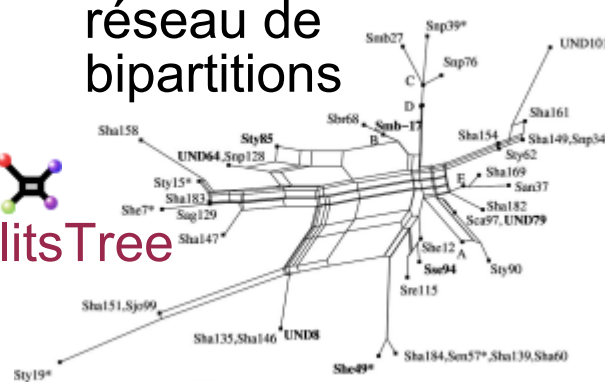


HorizStory

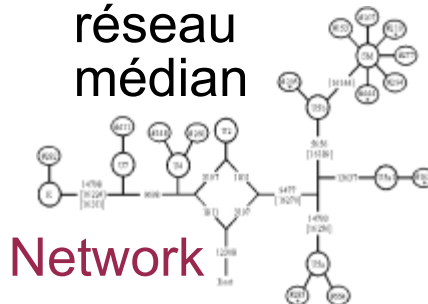
réseau de bipartitions



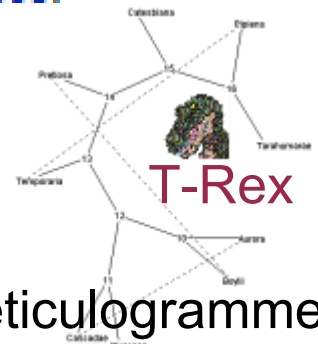
SplitsTree



réseau médian

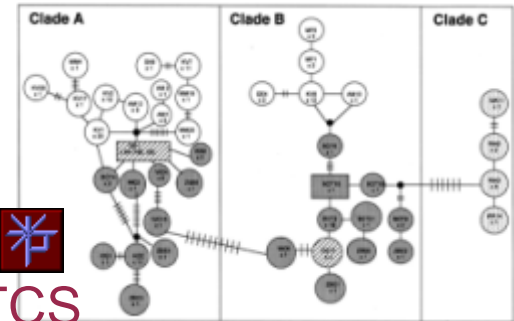


Network



réticulogramme

réseau couvrant minimum



TCS

Reconstruction de réseaux

```
AATTGCAGTAGCCCAAAT  
ACCTGCAGTAGACCAAT  
GCTTGCCGTAGACAAGAAT  
ATTTGCAGAAGACCAAAT  
AATTGCAGTAGACAAGAAT  
ACTTGCAGTAGCACAATAAT  
ACCTGGTGTAAAAT
```

{séquences de gènes}

méthodes de distance

Bandelt & Dress 1992 - Legendre & Makarenkov 2000 - Bryant & Moulton 2002

méthodes de parcimonie

Hein 1990 - Kececioglu & Gusfield 1994 - Jin, Nakhleh, Snir, Tuller 2009

méthodes de vraisemblance

Snir & Tuller 2009 - Jin, Nakhleh, Snir, Tuller 2009 - Velasco & Sober 2009



réseau N

Reconstruction de réseaux

**Problème : méthodes généralement lentes,
explosion du nombre de séquences.**

```
AATTGCAGTAGCCCAAAT  
ACCTGCAGTAGACCAAT  
GCTTGCCGTAGACAAGAAT  
ATTTGCAGAAGACCAAAT  
AATTGCAGTAGACAAGAAT  
ACTTGCAGTAGCACAAT  
ACCTGGTGTAAAAT
```

{séquences de gènes}

méthodes de distance

Bandelt & Dress 1992 - Legendre & Makarenkov 2000 - Bryant & Moulton 2002

méthodes de parcimonie

Hein 1990 - Kececioglu & Gusfield 1994 - Jin, Nakhleh, Snir, Tuller 2009

méthodes de vraisemblance

Snir & Tuller 2009 - Jin, Nakhleh, Snir, Tuller 2009 - Velasco & Sober 2009



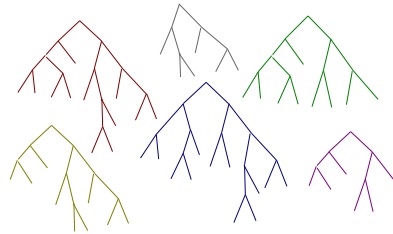
réseau N

Reconstruction combinatoire de réseaux

AATTGCAGTAGCCCAAAAT
ACCTGCAGTAGACCAAT
GCTTGCCGTAGACAAGAAT
ATTTGCAGAAGACCAAAAT
AATTGCAGTAGACAAGAAT
ACTTGCAGTAGCACAAAAT
ACCTGGTGTA AAAAT

{séquences de gènes}

*Reconstruction d'un arbre
par ensemble de gènes
homologues*



phylome = {arbres}

*Réconciliation ou
consensus d'arbres*



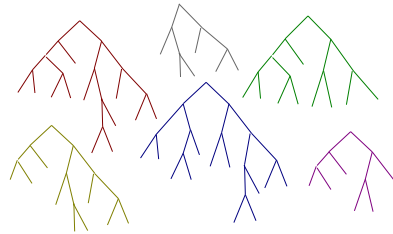
super-réseau *N*

Reconstruction combinatoire de réseaux

AATTGCAGTAGCCCAAAAT
ACCTGCAGTAGACCAAT
GCTTGCCGTAGACAAGAAT
ATTTGCAGAAGACCAAT
AATTGCAGTAGACAAGAAT
ACTTGCAGTAGCACAAAAT
ACCTGGTGTAATAAT

{séquences de gènes}

*Reconstruction d'un arbre
par ensemble de gènes
homologues*



phylome = {arbres}

*Réconciliation ou
consensus d'arbres*



super-réseau N

**Problème : le consensus d'arbres est un
problème NP-complet pour 2 arbres**

Triplets/quadruplets, splits/clades

Problème :

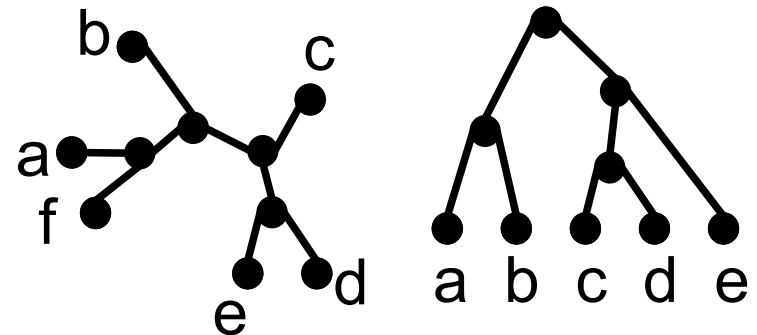
Reconstruire le **super-réseau** d'un ensemble d'arbres est **difficile**.

Idée :

reconstruire un réseau contenant tous les :

triplets
quadruplets

des arbres en entrée ?



Motivations algorithmiques !

Plan

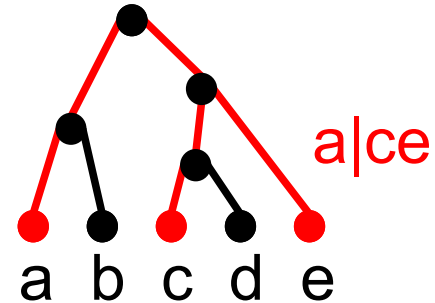
- Réseaux phylogénétiques
- **Triplets et quadruplets**
- Réseaux non enracinés de niveau k
- Complexité de la reconstruction
- Décomposition dans le cas dense
- Reconstruction dans le cas complet
- Lien avec *Non-Betweenness*

Triplets et quadruplets

Idée :

reconstituer un réseau contenant tous les :

triplets

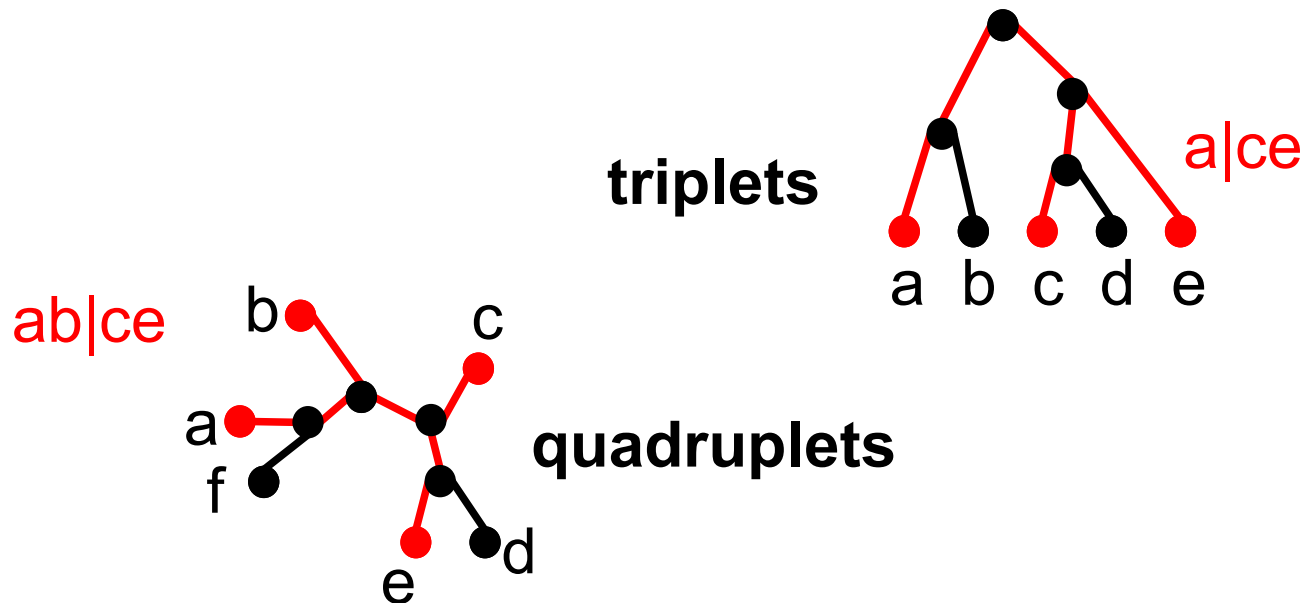


des arbres en entrée ?

Triplets et quadruplets

Idée :

reconstituer un réseau contenant tous les :



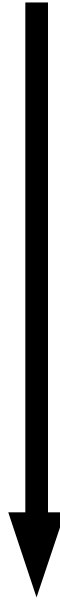
des arbres en entrée ?

Triplets et quadruplets

Idée :

modifier le type de données à traiter

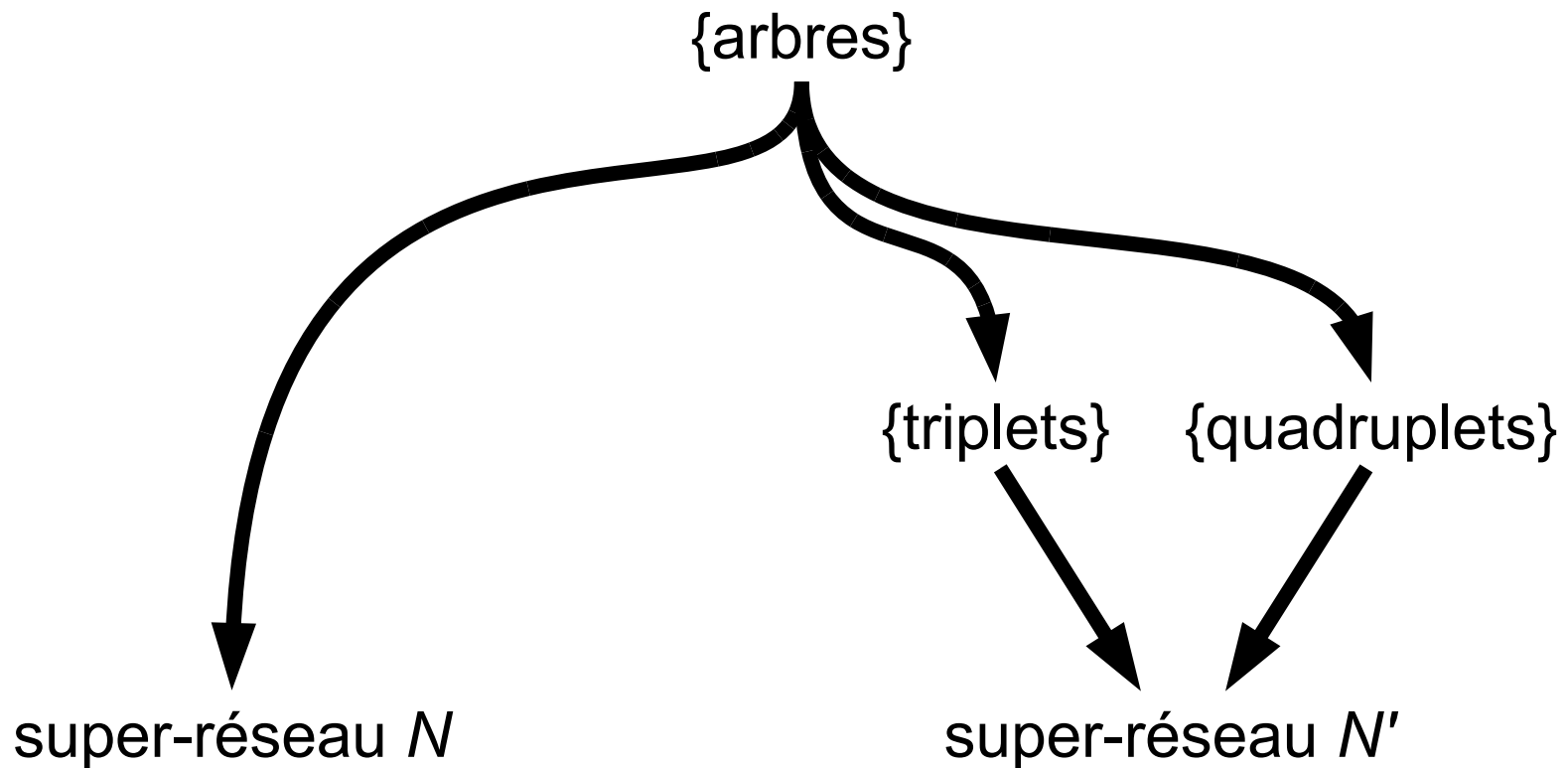
{arbres}



super-réseau N

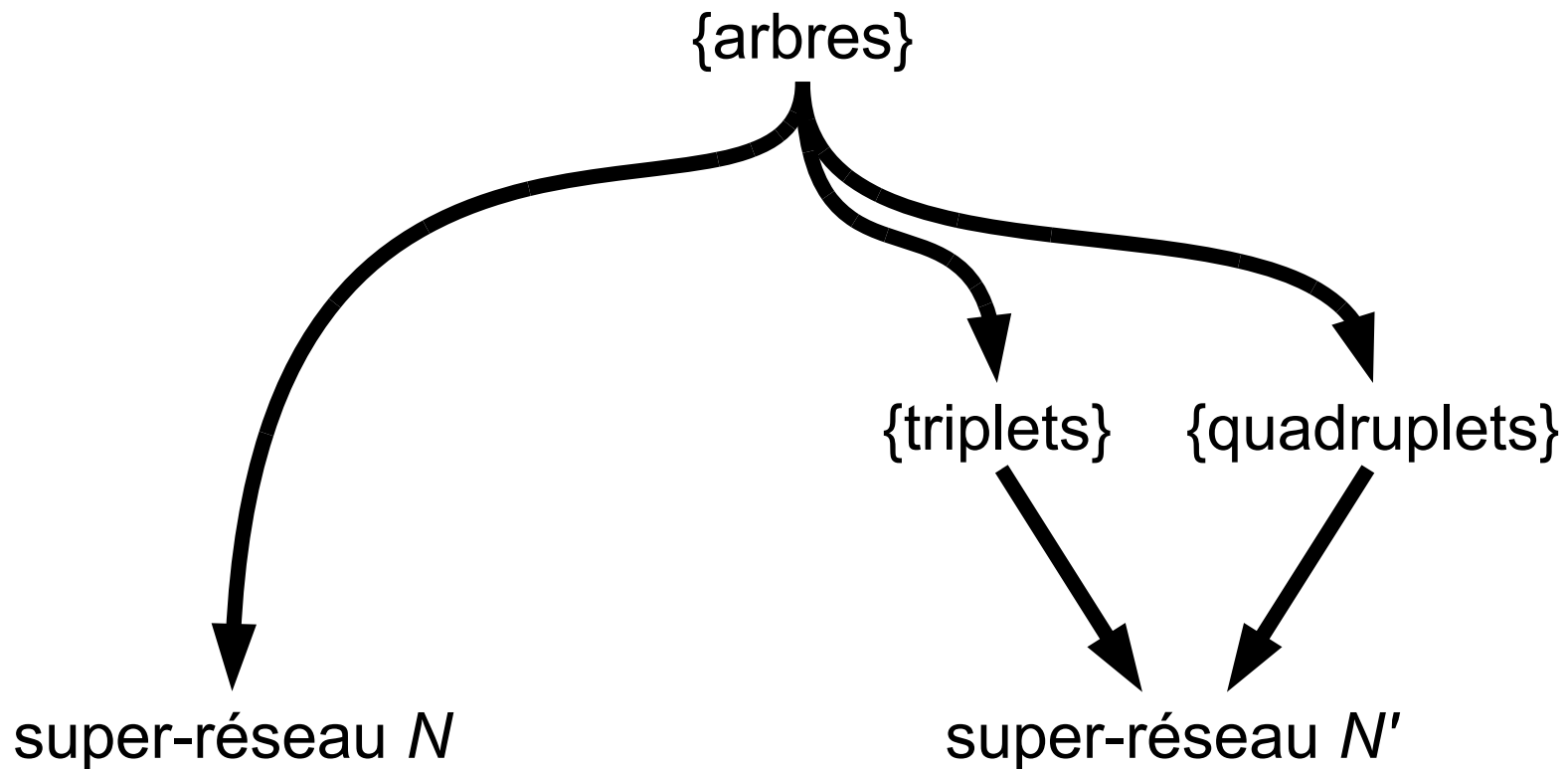
Triplets et quadruplets

Idée :
modifier le type de données à traiter



Triplets et quadruplets

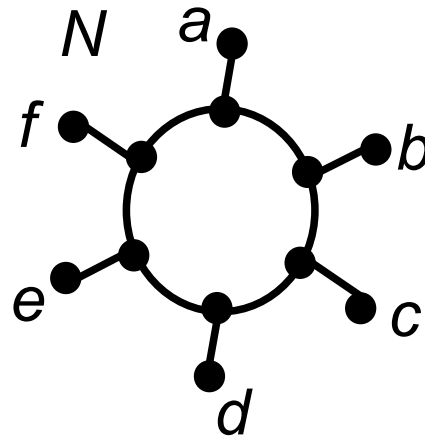
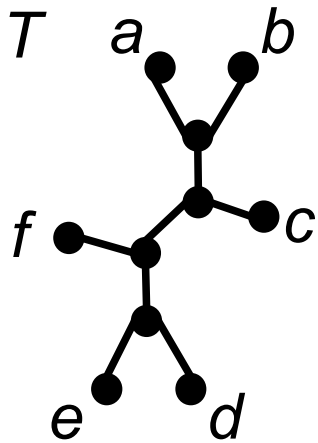
Idée :
modifier le type de données à traiter



$N' = N ?$

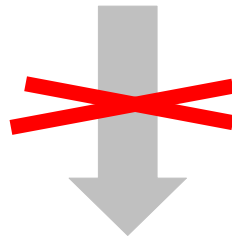
Triplets et quadruplets

Un réseau contenant **tous les quadruplets d'un arbre T** ne contient **pas forcément T** .



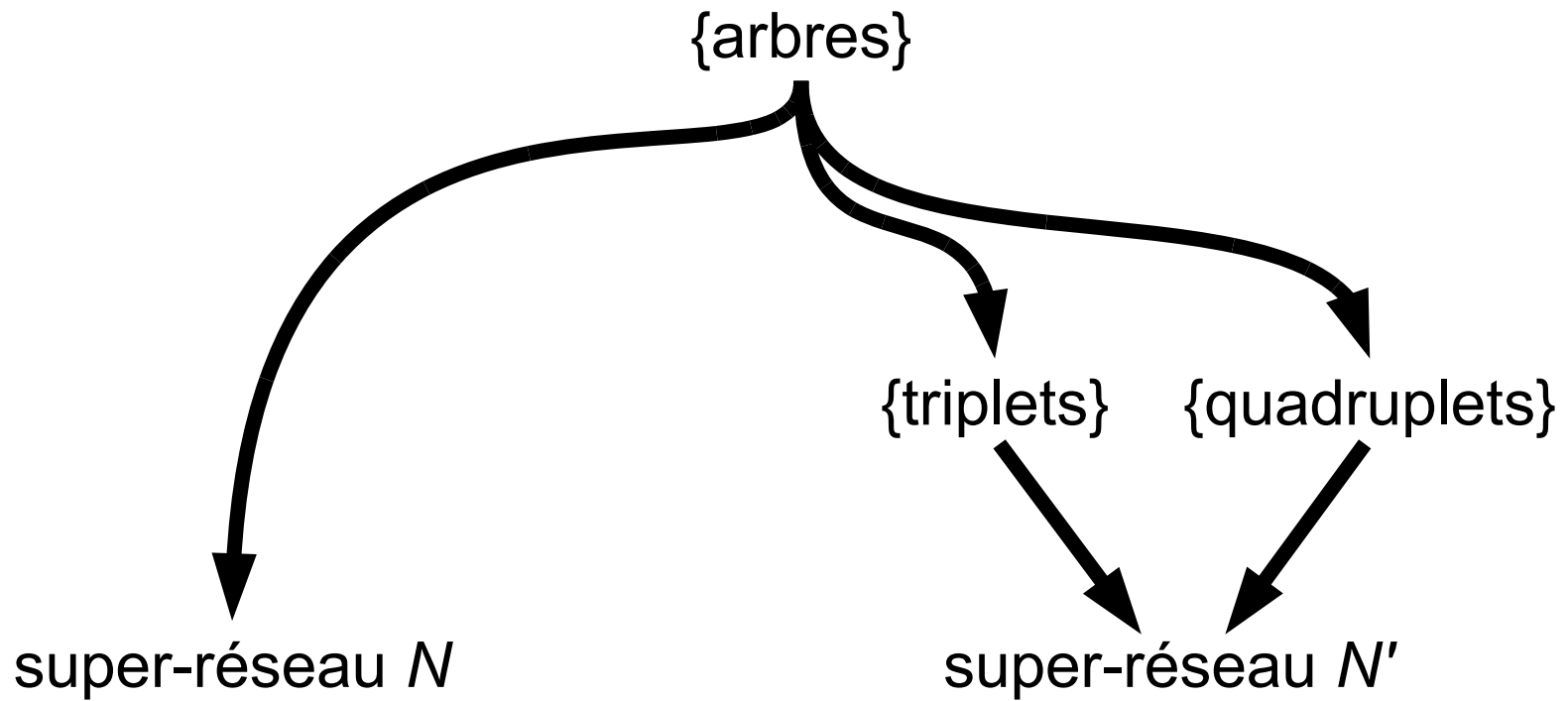
N contient tous les quadruplets de T mais pas T

Contient tous les quadruplets d'un arbre T



contient T .

Triplets et quadruplets



$N' = N ?$

Pas nécessairement, mais :

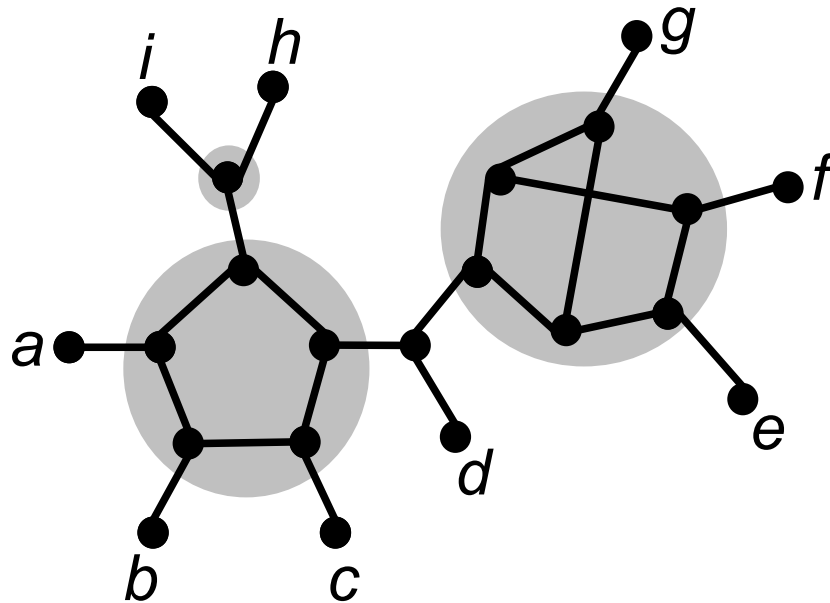
$$\{ N \} \subseteq \{ N' \}$$

Plan

- Réseaux phylogénétiques
- Triplets et quadruplets
- **Réseaux non enracinés de niveau k**
- Complexité de la reconstruction
- Décomposition dans le cas dense
- Reconstruction dans le cas complet
- Lien avec *Non-Betweenness*

Réseaux non enracinés de niveau k

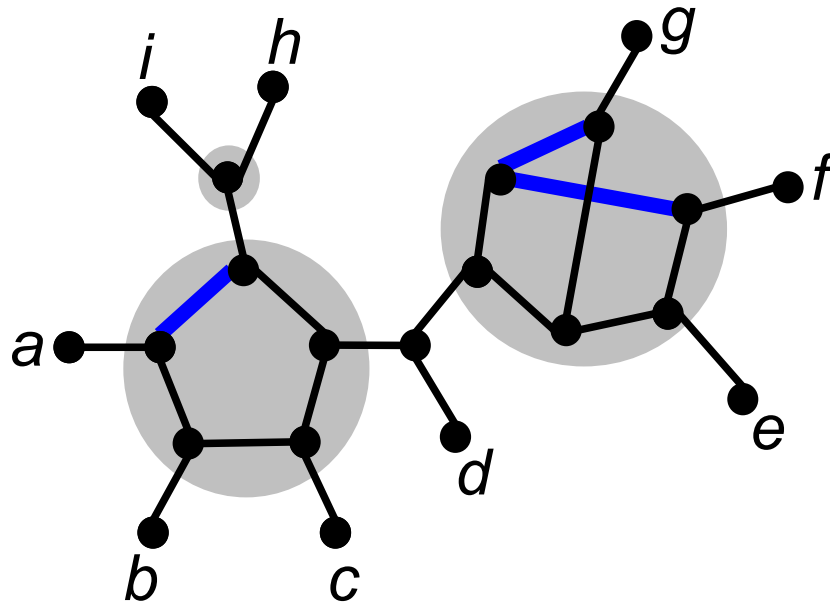
Algorithmes rapides pour des réseaux à **structure proche d'un arbre**.



**composante 2-arête
connexe** = sous-graphe
sans isthme (arête qui
déconnecte le graphe)
maximal

Réseaux non enracinés de niveau k

Algorithmes rapides pour des réseaux à **structure proche d'un arbre**.



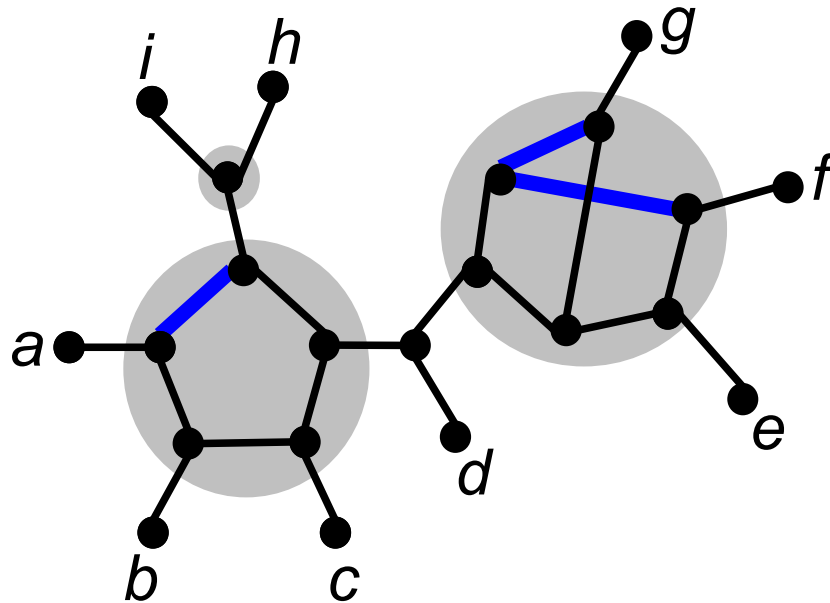
réseau non enraciné
de **niveau 2**.

**composante 2-arête
connexe** = sous-graphe
sans isthme (arête qui
déconnecte le graphe)
maximal

niveau = maximum, parmi
toutes les **composantes
2-arêtes-connexes**, du
nombre minimum d'**arêtes
à supprimer** pour obtenir
un arbre.

Réseaux non enracinés de niveau k

Algorithmes rapides pour des réseaux à **structure proche d'un arbre**.



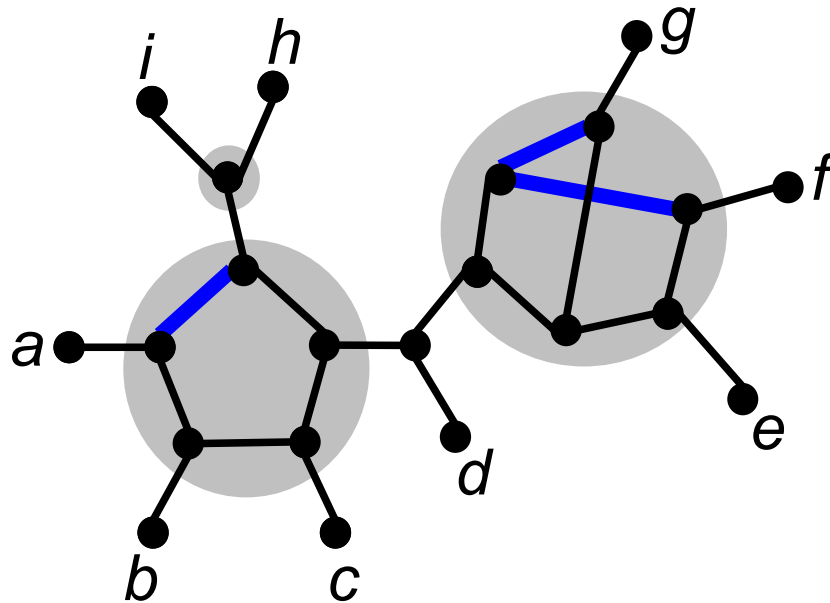
équivalent non enraciné
du niveau des réseaux
enracinés

*Choy, Jansson,
Sadakane & Sung 2005*

réseau non enraciné
de **niveau 2**.

Réseaux non enracinés de niveau k

Algorithmes rapides pour des réseaux à **structure proche d'un arbre**.



réseau non enraciné
de **niveau 2**.

équivalent non enraciné
du niveau des réseaux
enracinés

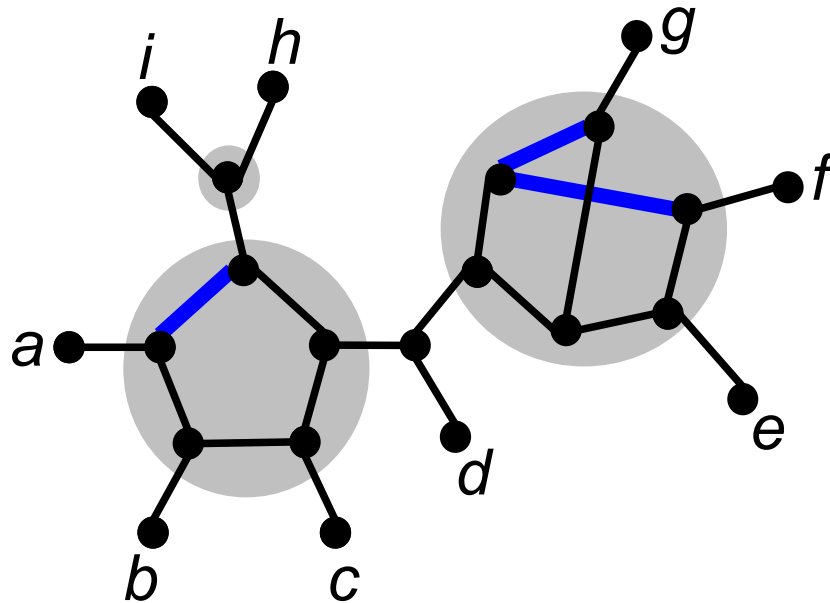
*Choy, Jansson,
Sadakane & Sung 2005*

Enraciner un arbre :
difficile en phylogénie

➔ le faire plutôt à la fin !

Réseaux non enracinés de niveau k

Algorithmes rapides pour des réseaux à **structure proche d'un arbre**.

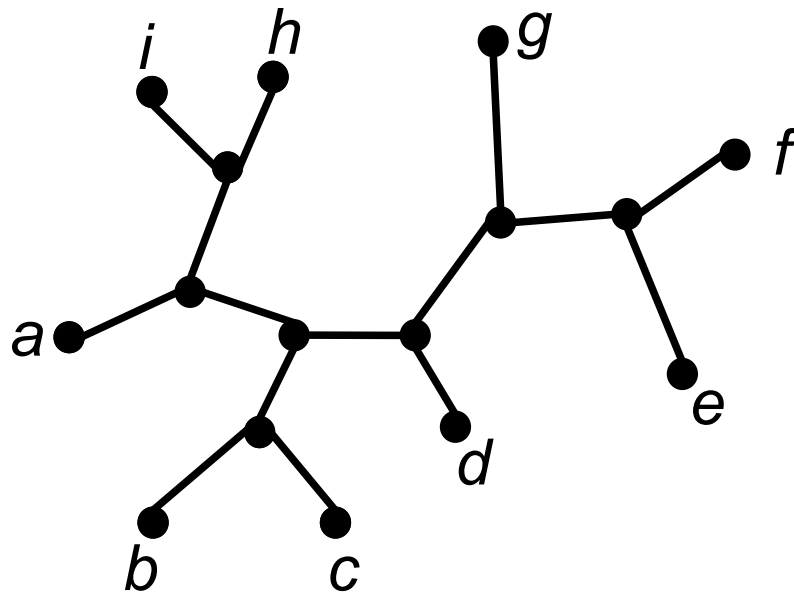


niveau = mesure de
“complexité” du réseau
phylogénétique

réseau non enraciné
de **niveau 2**.

Réseaux non enracinés de niveau k

Algorithmes rapides pour des réseaux à **structure proche d'un arbre**.



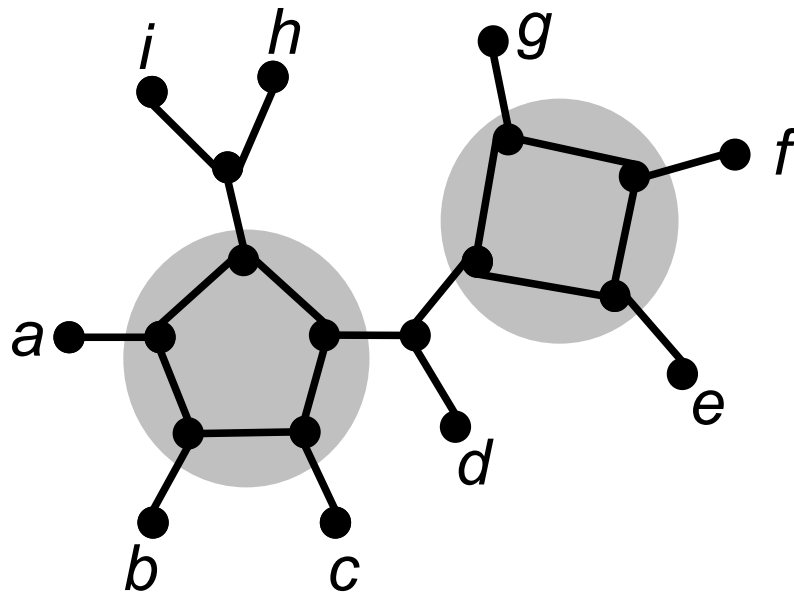
réseau non enraciné
de **niveau 1**.

niveau = mesure de
“complexité” du réseau
phylogénétique

niveau 0 = arbre

Réseaux non enracinés de niveau k

Algorithmes rapides pour des réseaux à **structure proche d'un arbre**.



niveau = mesure de
“complexité” du réseau
phylogénétique

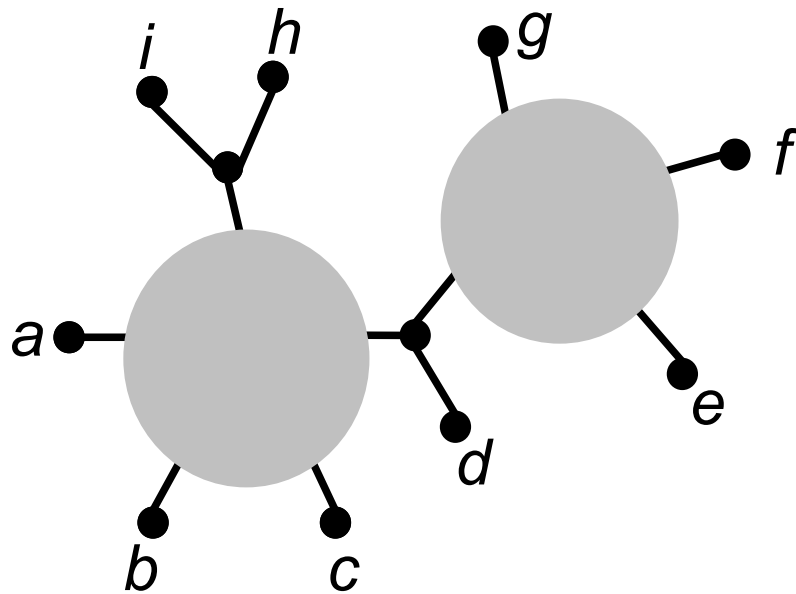
niveau 0 = arbre

niveau 1 = “**arbre de
cycles**”

réseau non enraciné
de **niveau 1**.

Réseaux non enracinés de niveau k

Algorithmes rapides pour des réseaux à **structure proche d'un arbre**.



réseau non enraciné
de **niveau > 1** .

niveau = mesure de
“complexité” du réseau
phylogénétique

niveau 0 = arbre

niveau 1 = “arbre de
cycles”

niveau > 1 = “arbre de
blobs”

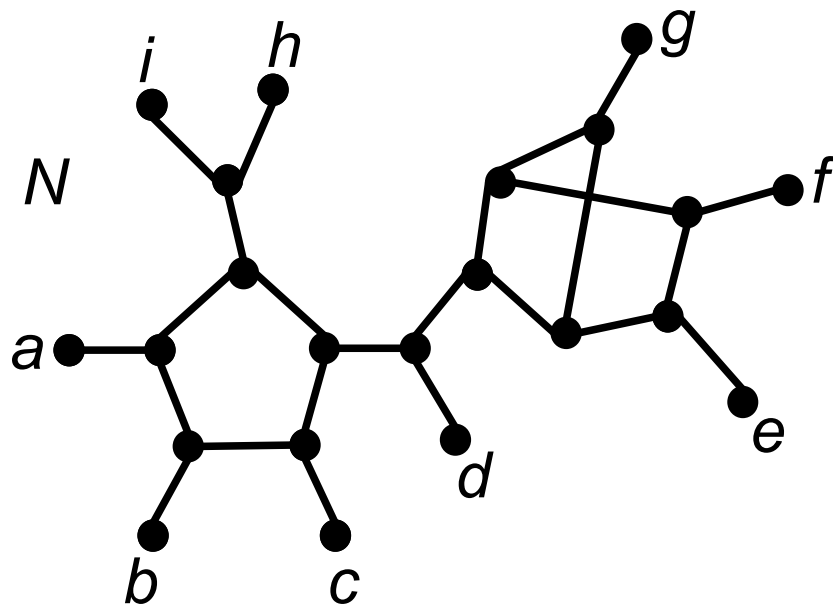
Plan

- Réseaux phylogénétiques
- Triplets et quadruplets
- Réseaux non enracinés de niveau k
- **Complexité de la reconstruction**
- Décomposition dans le cas dense
- Reconstruction dans le cas complet
- Lien avec *Non-Betweenness*

Complexité de la vérification

N , réseau non enraciné de niveau k

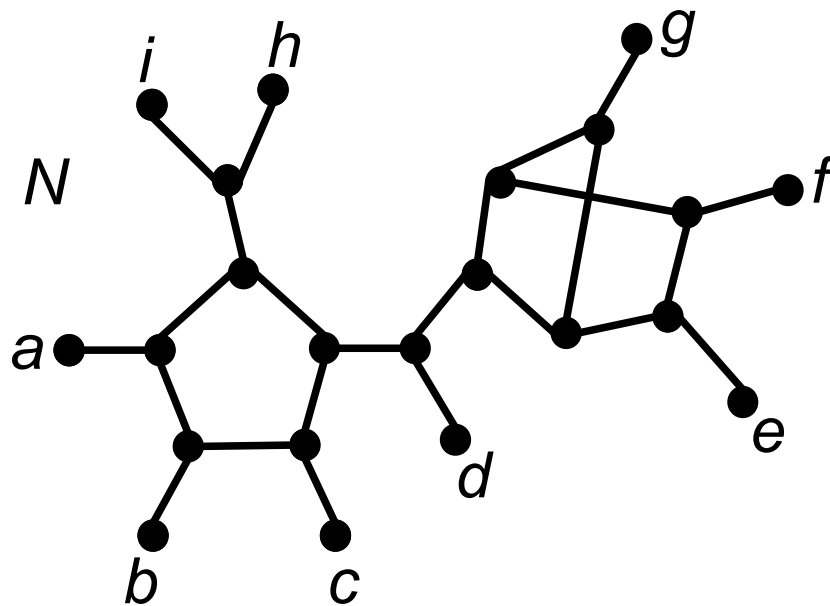
Ensemble des quadruplets de N ?



Complexité de la vérification

N , réseau non enraciné de niveau k

Ensemble des quadruplets de N ?



$ab|cd$ quadruplet de N

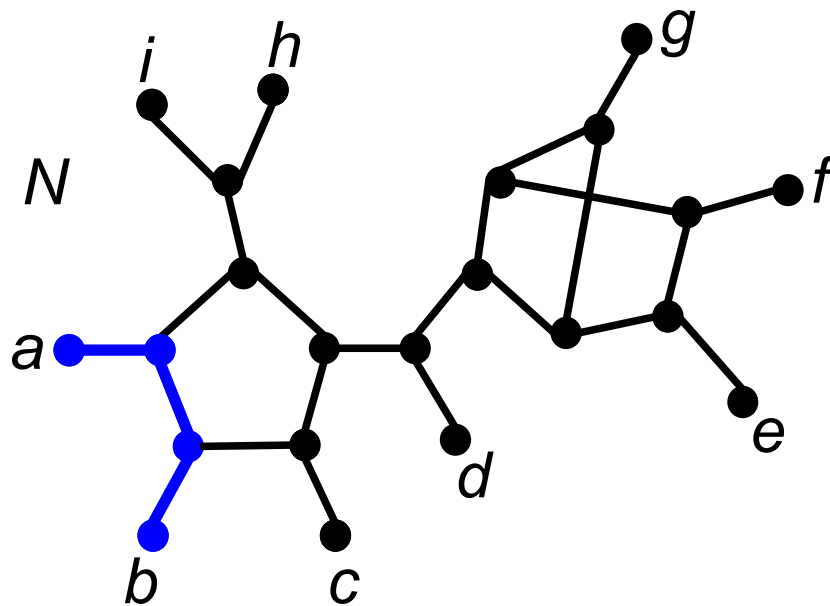


N contient deux chemins
sommet-disjoints :

Complexité de la vérification

N , réseau non enraciné de niveau k

Ensemble des quadruplets de N ?



$ab|cd$ quadruplet de N

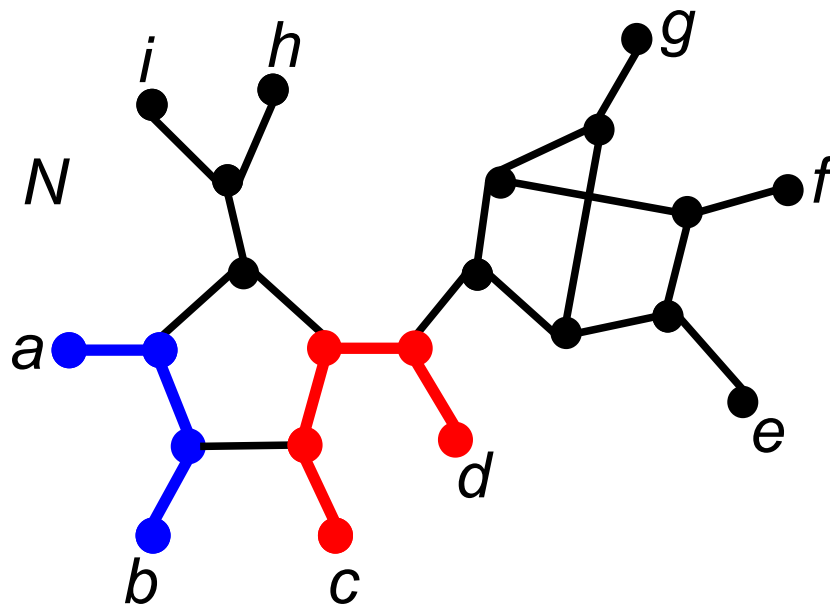


N contient deux chemins
sommet-disjoints :
- entre a et b

Complexité de la vérification

N , réseau non enraciné de niveau k

Ensemble des quadruplets de N ?



$ab|cd$ quadruplet de N



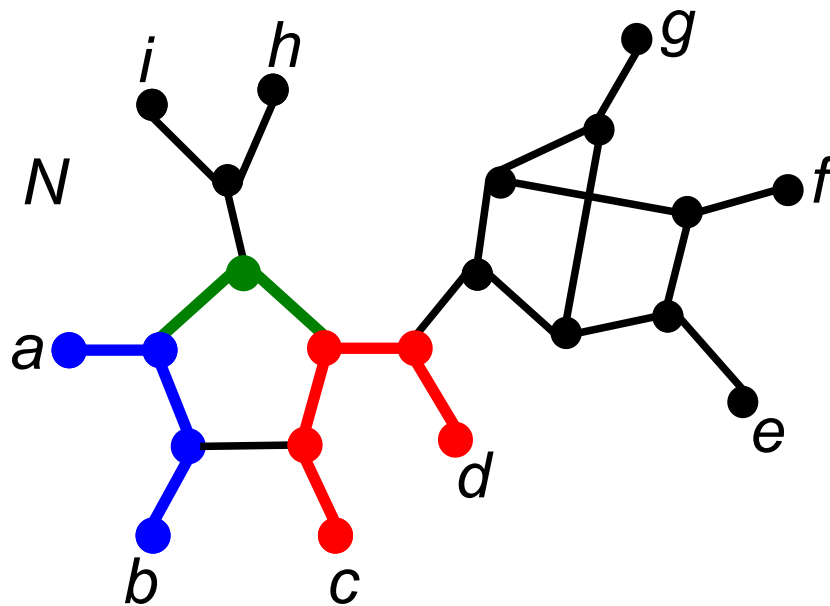
N contient deux chemins
sommet-disjoints :

- entre a et b
- entre c et d

Complexité de la vérification

N , réseau non enraciné de niveau k

Ensemble des quadruplets de N ?



$ab|cd$ quadruplet de N



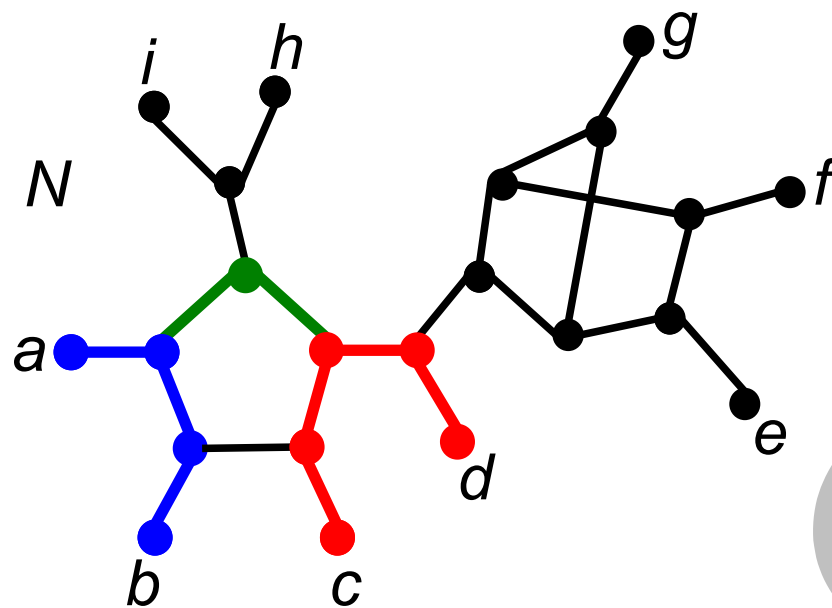
N contient deux chemins
sommet-disjoints :

- entre a et b
- entre c et d

Complexité de la vérification

N , réseau non enraciné de niveau k

Ensemble des quadruplets de N ?



$ab|cd$ quadruplet de N



N contient deux chemins
sommet-disjoints :

- entre a et b
- entre c et d

algo 2-Vertex-Disjoint-Paths
en $O(n+n.\alpha(n,n))$

Tholey 2009

Complexité de la vérification

N , réseau non enraciné de niveau k

Ensemble des quadruplets de N ?

En $O(n^5(1+\alpha(n,n)))$

N enraciné

Triplets de N ?

En $O(n^3)$

*programmation
dynamique,
Byrka, Gawrychowski,
Huber & Kelk 2010*

Complexité de la reconstruction

Q , ensemble de quadruplets

\exists ? réseau non enraciné de niveau k qui contient Q ?

Complexité de reconstruction

	non enraciné		enraciné	
	niveau 1	niveau $k > 1$	niveau 1	niveau $k > 1$
général	NP-complet	?	NP-complet <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	NP-complet <i>Van Iersel, Kelk & Mnich 2009</i>
dense 1 quadruplet par ensemble de 4 feuilles	? décomposition en temps polynomial	? ?	$O(n^3)$ <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	$O(n^{5k+4})$ <i>To & Habib 2009</i>
complet tous les quadruplets du réseau	$O(n^4)$? décomposition en temps polynomial	$O(n^3)$ <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	$O(n^{3k+3})$ <i>Van Iersel & Kelk 2009</i>

Complexité de reconstruction

	non enraciné		enraciné	
	niveau 1	niveau $k > 1$	niveau 1	niveau $k > 1$
général	NP-complet	?	NP-complet <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	NP-complet <i>Van Iersel, Kelk & Mnich 2009</i>
dense 1 quadruplet par ensemble de 4 feuilles	? décomposition en temps polynomial	? ?	$O(n^3)$ <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	$O(n^{5k+4})$ <i>To & Habib 2009</i>
complet tous les quadruplets du réseau	$O(n^4)$? décomposition en temps polynomial	$O(n^3)$ <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	$O(n^{3k+3})$ <i>Van Iersel & Kelk 2009</i>

Complexité de la reconstruction

Q , ensemble de quadruplets

$\exists?$ réseau non enraciné de niveau k qui contient Q ?

NP-complet pour $k = 0$

Steel 1992

T , ensemble de triplets

$\exists?$ réseau enraciné de niveau k qui contient T ?

En $O(n^3)$ pour $k = 0$

Aho & al. 1981, Jansson & al. 2005

NP-complet pour $k = 1$

Jansson, Nguyen & Sung 2006

NP-complet pour $k > 1$

Van Iersel, Kelk & Mnich 2009

Complexité de la reconstruction

Q , ensemble de quadruplets

$\exists?$ réseau non enraciné de niveau k qui contient Q ?

NP-complet pour $k = 0$

Steel 1992

NP-complet pour $k = 1$, réduction de Betweenness

T , ensemble de triplets

$\exists?$ réseau enraciné de niveau k qui contient T ?

En $O(n^3)$ pour $k = 0$

Aho & al. 1981, Jansson & al. 2005

NP-complet pour $k = 1$

Jansson, Nguyen & Sung 2006

NP-complet pour $k > 1$

Van Iersel, Kelk & Mnich 2009

Réduction depuis Betweenness

Betweenness

C , ensemble de contraintes $c_i = (a, b, c) : b$ “entre” a et $c \in A$

\exists ? ordre σ sur A qui vérifie les contraintes de C ?

NP-complet *Opatrny 1979*

Réduction :
adaptation de la preuve de Steel 1992

Q , ensemble de quadruplets

\exists ? réseau non enraciné de niveau 1 qui contient Q ?

Réduction depuis Betweenness

Betweenness

C , ensemble de contraintes $c_i = (a, b, c) : b$ “entre” a et $c \in A$

\exists ? ordre σ sur A qui vérifie les contraintes de C ?

$$c_i = (a, b, c)$$



$$Q_i = \{p_i p'_i | ab, p_i a | bc, p_i b | cq_i, p_i c | q_i q'_i, p_i \alpha | p'_i \beta, q_i \alpha | q'_i \beta\}$$

$$Q' = \{\alpha \alpha' | \beta \beta', \alpha \beta | \alpha' \beta'\} \cup \{\beta \beta' | x \alpha, \alpha \alpha' | x \beta, \alpha' \beta' | x \beta, x \in A \cup \{p_i, p'_i, q_i, q'_i\}\}$$

$$Q = Q' \cup \bigcup_i Q_i$$

Q , ensemble de quadruplets

\exists ? réseau non enraciné de niveau 1 qui contient Q ?

Réduction depuis Betweenness

Betweenness

C , ensemble de contraintes $c_i = (a, b, c) : b$ "entre" a et $c \in A$

\exists ? ordre σ sur A qui vérifie les contraintes de C ?

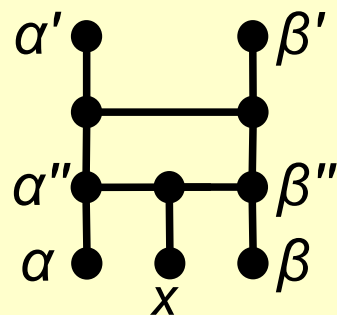
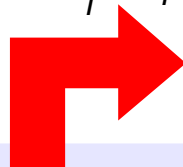
$$c_i = (a, b, c)$$



$$Q_i = \{p_i, p'_i | ab, p_i a | p'_i \beta, q_i a | q'_i \beta\}$$

$$Q' = \{\alpha \alpha' | \beta \beta', \alpha \alpha' | x \beta, \alpha' \beta' | x \beta, x \in A \cup \{p_i, p'_i, q_i, q'_i\}\}$$

$$Q = Q' \cup \bigcup_i Q_i$$



Q , ensemble de quadruplets

\exists ? réseau non enraciné de niveau 1 qui contient Q ?

Réduction depuis Betweenness

Betweenness

C , ensemble de contraintes $c_i = (a, b, c) : b$ "entre" a et $c \in A$

\exists ? ordre σ sur A qui vérifie les contraintes de C ?

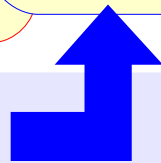
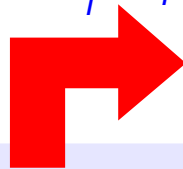
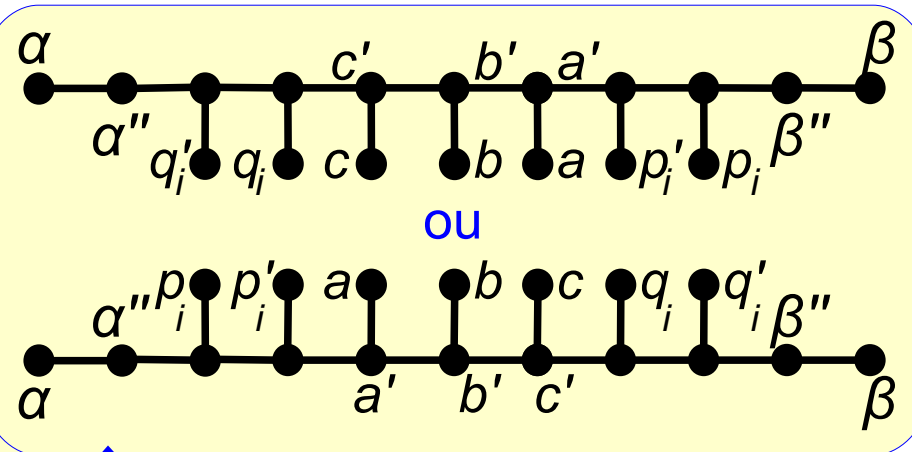
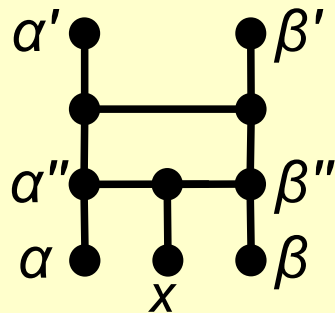
$$c_i = (a, b, c)$$



$$Q_i = \{p_i, p'_i | ab, p_i, p'_i\}$$

$$Q' = \{\alpha\alpha' | \beta\beta', \alpha, \alpha', \beta, \beta'\}$$

$$Q = Q' \cup \bigcup_i Q_i$$



Q , ensemble de quadruplets

\exists ? réseau non enraciné de niveau 1 qui contient Q ?

Réduction depuis Betweenness

Betweenness

C , ensemble de contraintes $c_i = (a, b, c) : b$ "entre" a et $c \in A$

\exists ? ordre σ sur A qui vérifie les contraintes de C ?

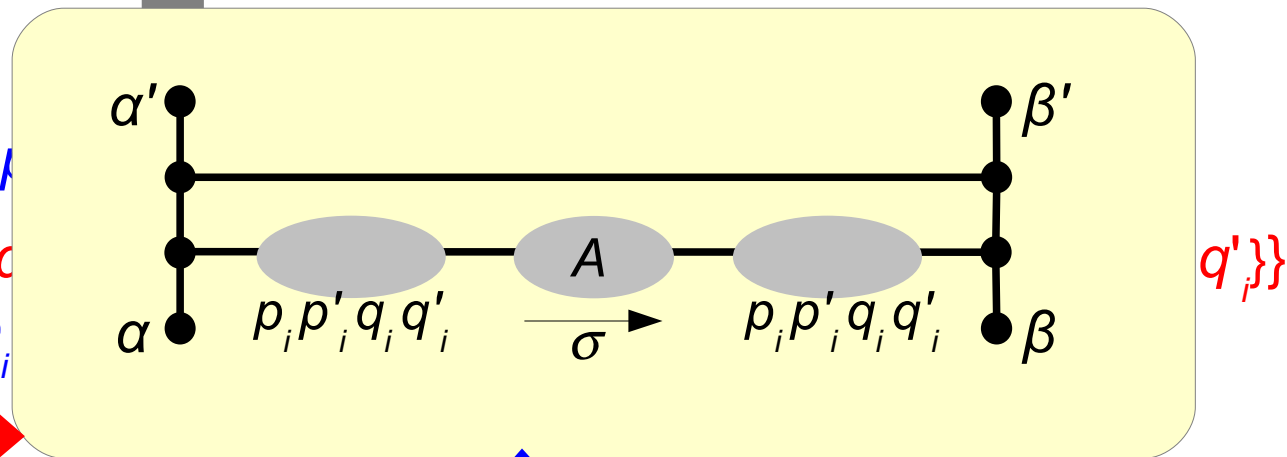
$$c_i = (a, b, c)$$



$$Q_i = \{p_i, p'_i | ab, p_i, p'_i, q_i, q'_i\}$$

$$Q' = \{\alpha\alpha' | \beta\beta', \alpha, \alpha', \beta, \beta', q_i, q'_i\}$$

$$Q = Q' \cup \bigcup_i Q_i$$



Q , ensemble de quadruplets

\exists ? réseau non enraciné de niveau 1 qui contient Q ?

Réduction depuis Betweenness

Betweenness

C , ensemble de contraintes $c_i = (a, b, c) : b$ "entre" a et $c \in A$

\exists ? ordre σ sur A qui vérifie les contraintes de C ?

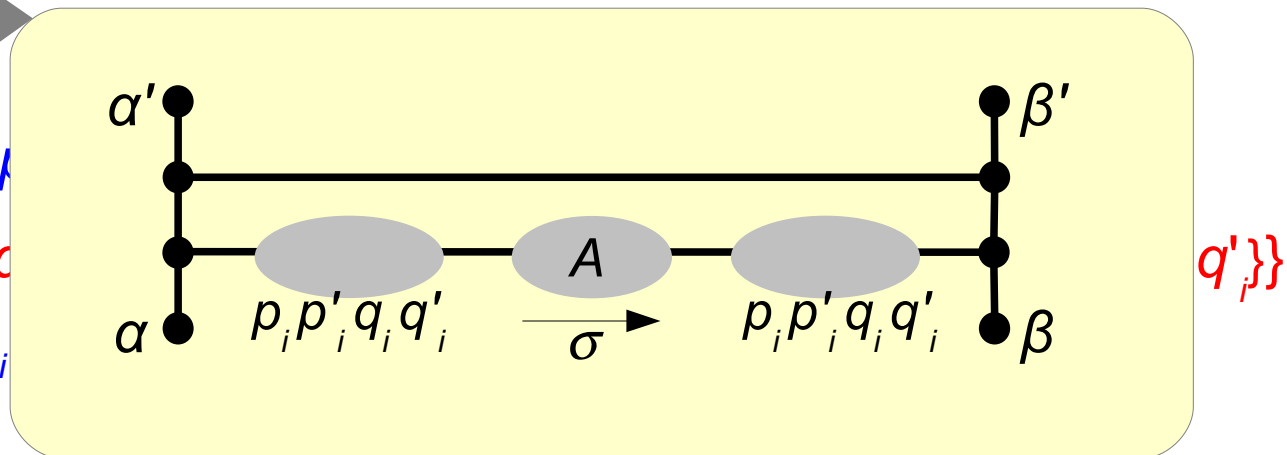
$c_i = (a, b, c)$



$Q_i = \{p_i, p'_i | ab, bc\}$

$Q' = \{\alpha\alpha', \beta\beta', c\}$

$Q = Q' \cup \bigcup_i Q_i$



Q , ensemble de quadruplets

\exists ? réseau non enraciné de niveau 1 qui contient Q ?

Plan

- Réseaux phylogénétiques
- Triplets et quadruplets
- Réseaux non enracinés de niveau k
- Complexité de la reconstruction
- **Décomposition dans le cas dense**
- Reconstruction dans le cas complet
- Lien avec *Non-Betweenness*

Complexité de reconstruction

	non enraciné		enraciné	
	niveau 1	niveau $k > 1$	niveau 1	niveau $k > 1$
général	NP-complet	?	NP-complet <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	NP-complet <i>Van Iersel, Kelk & Mnich 2009</i>
dense 1 quadruplet par ensemble de 4 feuilles	? décomposition en temps polynomial	? ?	$O(n^3)$ <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	$O(n^{5k+4})$ <i>To & Habib 2009</i>
complet tous les quadruplets du réseau	$O(n^4)$? décomposition en temps polynomial	$O(n^3)$ <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	$O(n^{3k+3})$ <i>Van Iersel & Kelk 2009</i>

Décomposition dans le cas dense

- Q , ensemble **dense** de quadruplets :

Sur tout ensemble de quatre feuilles,
il existe un quadruplet dans Q

- $A|\bar{A}$ **SN-bipartition** de Q :

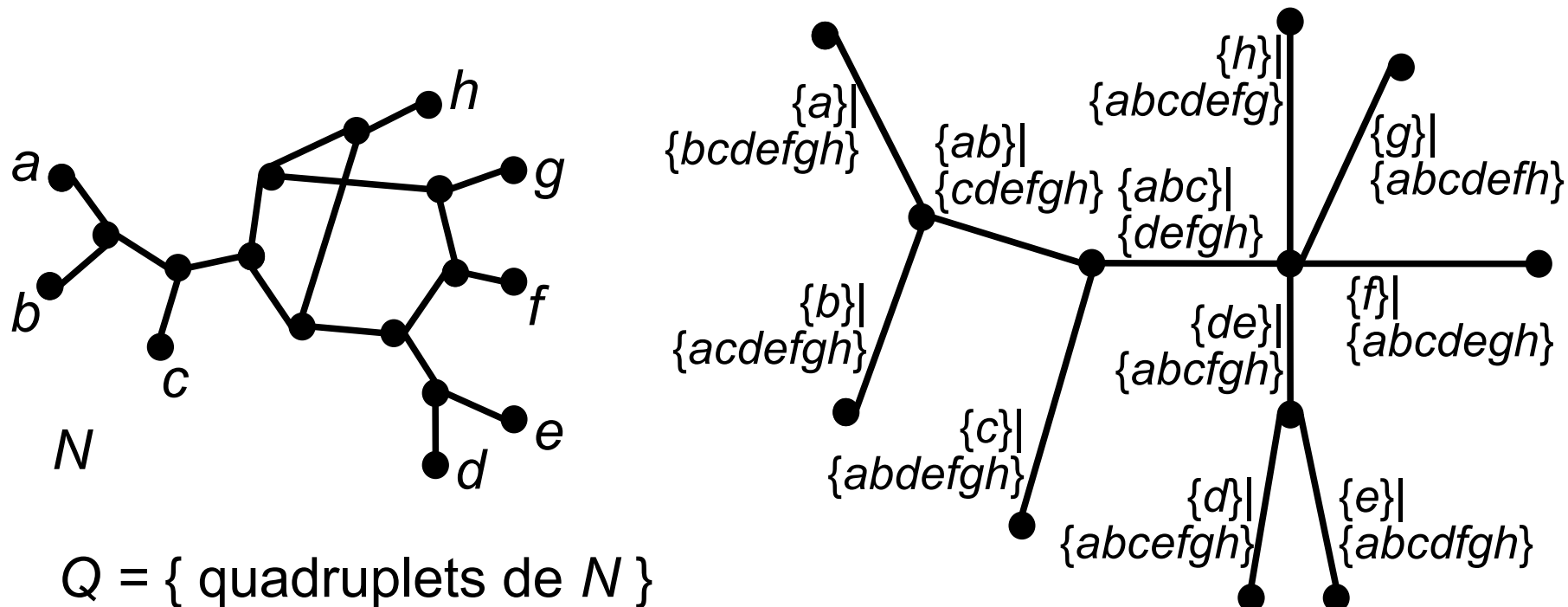
Pour toutes feuilles $x, y \in A, z, t \in \bar{A}$,
le seul quadruplet de Q sur ces 4 feuilles est $xy|zt$

Q , ensemble **dense** de quadruplets



L'ensemble des **SN-bipartitions** de Q est compatible, i.e.
peut être représenté par un arbre non enraciné

Décomposition dans le cas dense

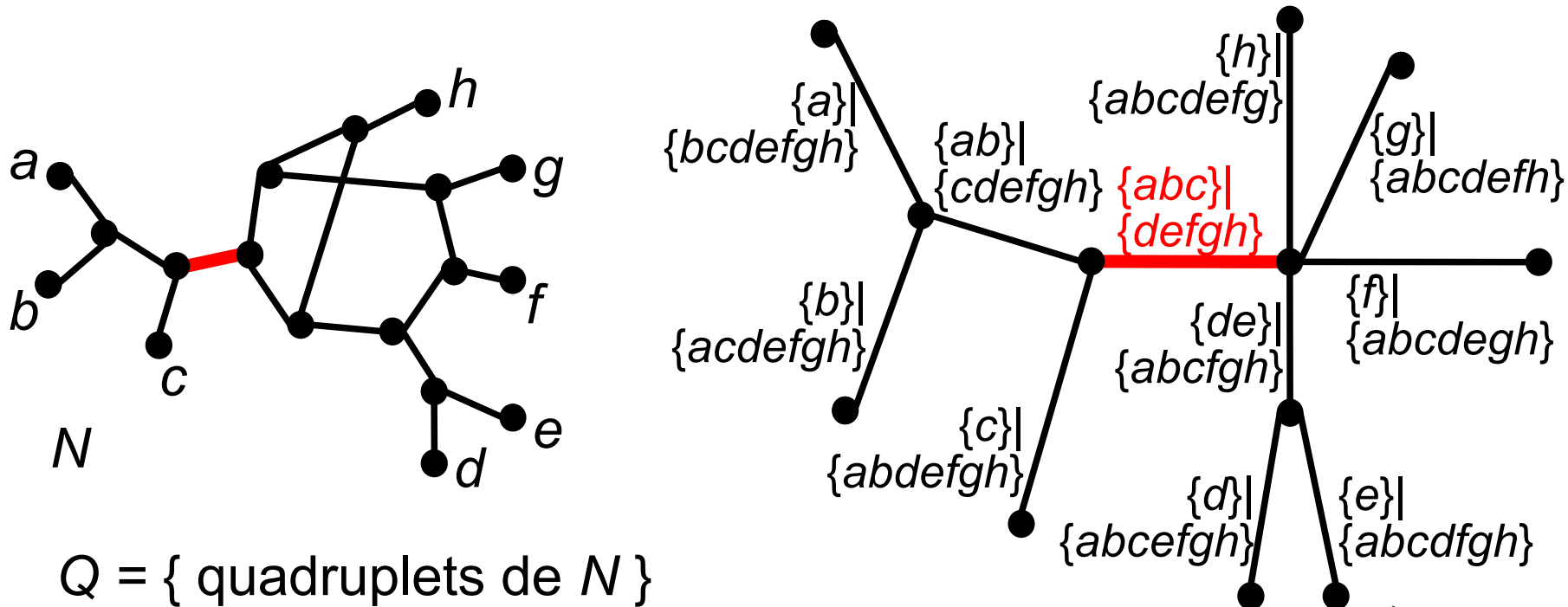


Q , ensemble **dense** de quadruplets



L'ensemble des **SN-bipartitions** de Q est compatible, i.e. peut être représenté par un arbre non enraciné

Décomposition dans le cas dense



Q , ensemble **dense** de quadruplets



L'ensemble des **SN-bipartitions** de Q est compatible, i.e. peut être représenté par un arbre non enraciné

Décomposition dans le cas dense

Q, ensemble **dense** de quadruplets



L'ensemble des **SN-bipartitions** de Q est compatible, i.e. peut être représenté par un arbre non enraciné

Calcul des SN-bipartitions
en $O(n^4)$

variante de l'algorithme Q^ ,
Berry & Gascuel 2001*

Equivalent enraciné :
Calcul des SN-ensembles
en $O(n^3)$

*Jansson, Nguyen
& Sung 2006*

Décomposition dans le cas dense

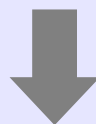
Q , ensemble **dense** de quadruplets
contenus dans un réseau N de niveau 1



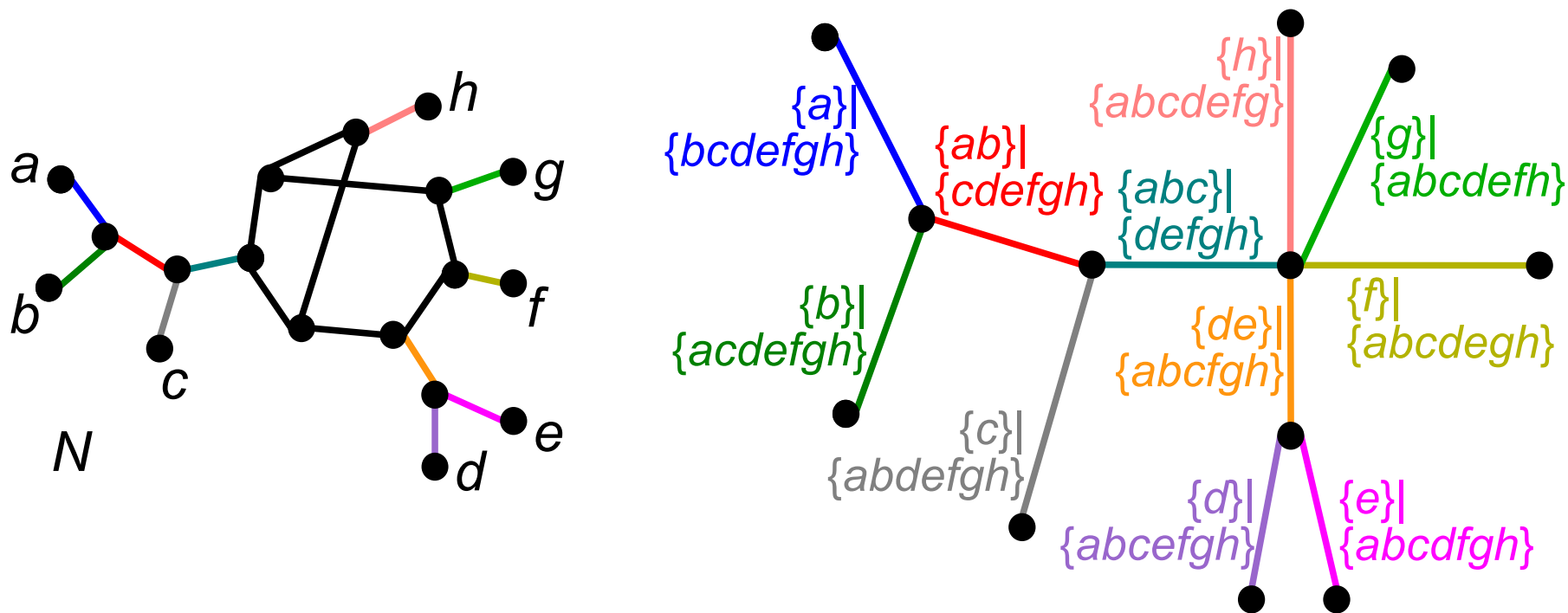
Il existe un réseau N' de niveau 1 contenant Q
tel que l'ensemble des **SN-bipartitions** de Q
est en bijection avec les isthmes de N' .

Décomposition dans le cas complet

$Q(N)$, ensemble de **tous** les quadruplets
contenus dans un réseau N de niveau k



Les **SN-bipartitions** de $Q(N)$
sont en bijection avec les **isthmes** de N .



Décomposition dans le cas complet

$Q(N)$, ensemble de **tous** les quadruplets
contenus dans un réseau N de niveau k



Les **SN-bipartitions** de $Q(N)$
sont en bijection avec les **isthmes** de N .

On sait **séparer** les composantes 2-arête-connexes
de N à partir de $Q(N)$.

Comment **reconstruire** chaque
composante 2-arête-connexe de N ?

Plan

- Réseaux phylogénétiques
- Triplets et quadruplets
- Réseaux non enracinés de niveau k
- Complexité de la reconstruction
- Décomposition dans le cas dense
- **Reconstruction dans le cas complet**
- Lien avec *Non-Betweenness*

Complexité de reconstruction

	non enraciné		enraciné	
	niveau 1	niveau $k > 1$	niveau 1	niveau $k > 1$
général	NP-complet	?	NP-complet <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	NP-complet <i>Van Iersel, Kelk & Mnich 2009</i>
dense 1 quadruplet par ensemble de 4 feuilles	? décomposition en temps polynomial	? ?	$O(n^3)$ <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	$O(n^{5k+4})$ <i>To & Habib 2009</i>
complet tous les quadruplets du réseau	$O(n^4)$? décomposition en temps polynomial	$O(n^3)$ <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	$O(n^{3k+3})$ <i>Van Iersel & Kelk 2009</i>

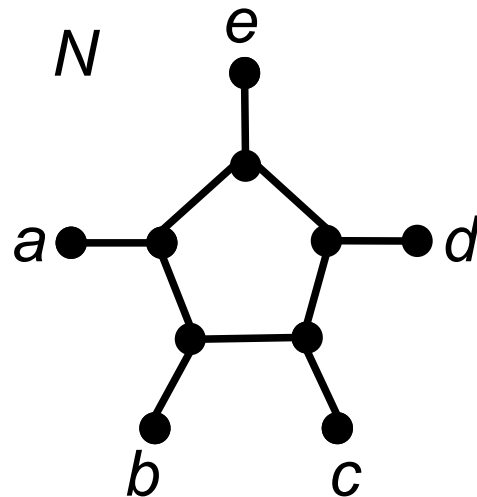
Reconstruction dans le cas complet

Comment reconstruire chaque composante
2-arête-connexe de N de niveau 1 à partir de $Q(N)$?

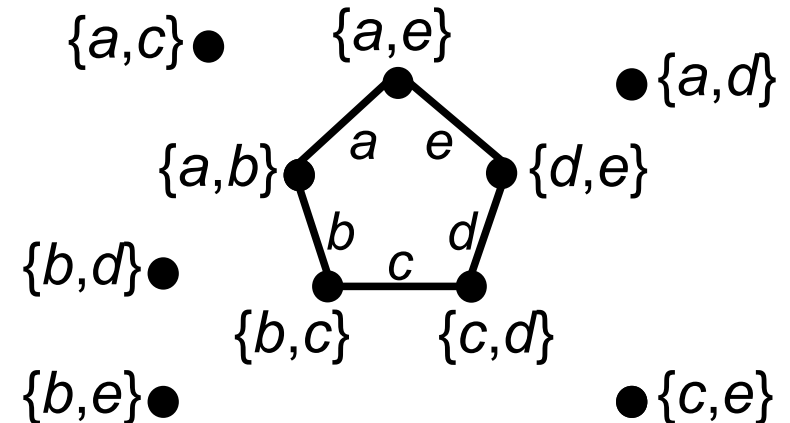
Graphe d'ordre des quadruplets :

$$G(Q) = (\{\{a,b\}, a,b \in X\}, \{\text{arête } \{a,b\}\{b,c\} \text{ si } \forall d \in X, ac|bd \notin Q\})$$

→ arête $\{a,b\}\{b,c\}$ étiquetée par "b"



$G(Q(N))$



N réseau de niveau 1 à une composante 2-arête-connexe
↔ $G(Q(N)) = \text{cycle à } n \text{ sommets} + \text{sommets isolés.}$

Reconstruction dans le cas complet

Comment reconstruire chaque composante
2-arête-connexe de N de niveau 1 à partir de $Q(N)$?

↳ Reconstruction en $O(n^4)$

Plan

- Réseaux phylogénétiques
- Triplets et quadruplets
- Réseaux non enracinés de niveau k
- Complexité de la reconstruction
- Décomposition dans le cas dense
- Reconstruction dans le cas complet
- Lien avec *Non-Betweenness*

Complexité de reconstruction

	non enraciné		enraciné	
	niveau 1	niveau $k > 1$	niveau 1	niveau $k > 1$
général	NP-complet	?	NP-complet <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	NP-complet <i>Van Iersel, Kelk & Mnich 2009</i>
dense 1 quadruplet par ensemble de 4 feuilles	? décomposition en temps polynomial	?	$O(n^3)$ <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	$O(n^{5k+4})$ <i>To & Habib 2009</i>
complet tous les quadruplets du réseau	$O(n^4)$?	$O(n^3)$ <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	$O(n^{3k+3})$ <i>Van Iersel & Kelk 2009</i>

Lien avec *Non-Betweenness*

Comment reconstruire chaque composante
2-arête-connexe de N de niveau 1 à partir de $Q(N)$?

 Reconstruction en $O(n^4)$

Comment reconstruire chaque composante
2-arête-connexe de N de niveau 1 à partir de Q dense ?

Lien avec *Non-Betweenness*

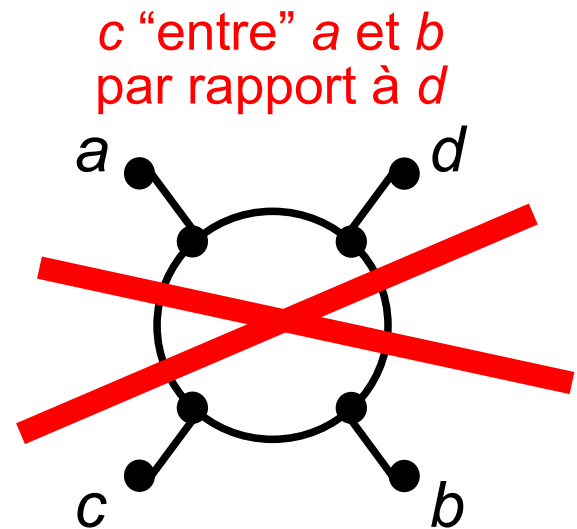
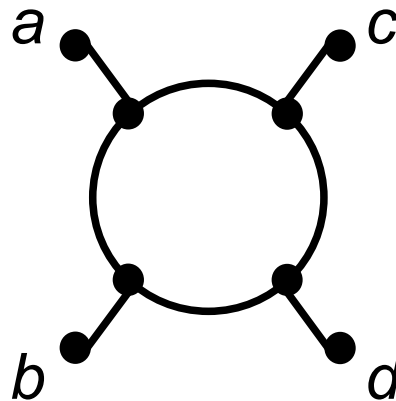
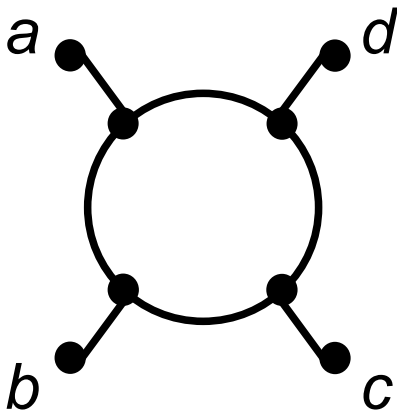
Comment reconstruire chaque composante 2-arête-connexe de N de niveau 1 à partir de $Q(N)$?

↳ Reconstruction en $O(n^4)$

Comment reconstruire chaque composante 2-arête-connexe de N de niveau 1 à partir de Q dense ?

↳ Variante de *Non-Betweenness* (**dense**)

$ab|cd$ dans un réseau de niveau 1 :



Merci pour votre attention !

Des questions ?

	non enraciné		enraciné	
	niveau 1	niveau $k > 1$	niveau 1	niveau $k > 1$
général	NP-complet	?	NP-complet <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	NP-complet <i>Van Iersel, Kelk & Mnich 2009</i>
dense 1 quadruplet par ensemble de 4 feuilles	? décomposition en temps polynomial	? ?	$O(n^3)$ <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	$O(n^{5k+4})$ <i>To & Habib 2009</i>
complet tous les quadruplets du réseau	$O(n^4)$? décomposition en temps polynomial	$O(n^3)$ <i>Jansson, Nguyen & Sung 2006</i>	$O(n^{3k+3})$ <i>Van Iersel & Kelk 2009</i>