Une modalité autoduale pour le connecteur « précède »

Christian Retoré

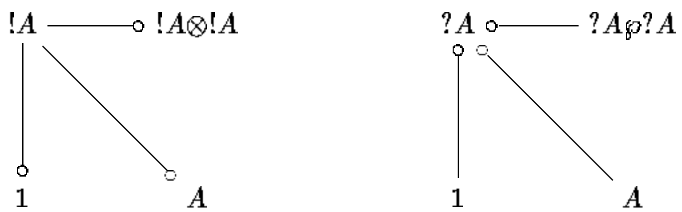
INRIA Lorraine et CRIN C.N.R.S., 615 rue du jardin botanique, BP 101, 54 602 Villers lès Nancy Cedex — retore@loria.fr

Résumé: Dans son article « A new constructive logic: classical logic » J.-Y. Girard soulève la question d'une modalité autoduale. Cette note fournit une solution sémantique relative au connecteur autodual et non-commutatif `précède` dans la catégorie des espaces cohérents.

A. Présentation

Les règles structurelles de la logique classique sont responsables de son non-déterminisme, et la logique linéaire qui les traite subtilement par le biais de deux modalités évite cet écueil. La modalité « $?$ » autorise la contraction et l'affaiblissement en position positive, tandis que la modalité duale « $!$ » les autorise en position négative.

Du point de vue sémantique qui sera le nôtre ici, cela signifie que l'on a les morphismes canoniques suivants:



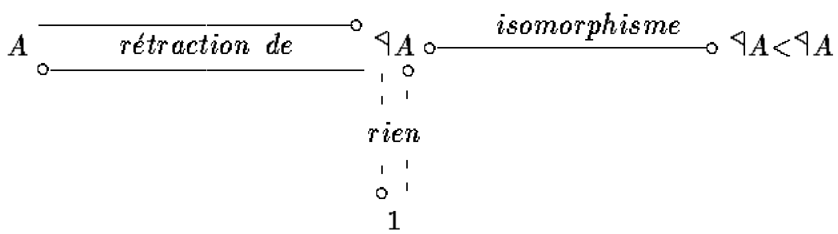
Les coupures croisées de la logique classique de [Gen34] sont en fait des coupures dont les deux prémisses principales sont des formules qui viennent d'être contractées. Ceci est une cause majeure de son non-déterminisme, comme en témoigne l'exemple 2 de l'annexe B de [Gir91].

Ceci ne peut se produire en logique linéaire, puisque pour être contractée une formule doit être de la forme $?A$, et que par suite sa négation est $!A^{\perp}$ qui ne peut pas être contractée.

Pour étudier un tel phénomène il faut disposer d'une modalité autoduale, autorisant la contraction tant en position négative qu'en position positive. On note alors que l'affaiblissement est plutôt malvenu, car même si ce n'est que sémantiquement vrai, il serait curieux d'avoir un morphisme de A dans 1 et un de 1 dans A pour tout A.

Nous nous concentrerons sur le modèle des espaces cohérents qui est conceptuellement lié à la logique linéaire, puisqu'elle en est issue. Dans ce cadre nous avons déjà étudié un connecteur non-commutatif et autodual nommé `précède` , et conçu le calcul ordonné qui étend la logique linéaire à ce connecteur [Ret93].

S'inspirant de la définition de ce connecteur en termes d'espaces cohérents, on définit une modalité autoduale pour laquelle existent les morphismes canoniques suivants:



Il n'y a pas à l'heure actuelle de syntaxe étendant le calcul ordonné à cette modalité. Il faut pour cela étudier les cas de base d'élimination des coupures et les diagrammes commutatifs qui en résultent comme cela a été fait pour le système LC de [Gir91] dans [Qua95].

On peut s'étonner que j'étudie un éventuel modèle avant de savoir précisément ce qu'il modélise. Disons que c'est un moyen de guider les choix syntaxiques en évitant la dégénérescence du système, et que c'est un peu l'analogue pour les modèles de Heyting, de ce que la théorie des modèles appelle la théorie d'un modèle.

Que le lecteur m'excuse de n'avoir pas rappelé comment les espaces cohérents interprètent la logique linéaire. Cela se trouve dans l'article original de J.-Y. Girard «Linear logic» [Gir87], ainsi que dans le livre de A. S. Troelstra «Lectures on linear logic» [Tro92] — et une présentation étroitement liée aux réseaux de démonstration est reprise dans [Ret94a].

Pour plus de détails sur cette note, on pourra consulter [Ret94b].

B. Remarques préliminaires

DÉFINITION **1** *Un espace cohérent A est un graphe simple dénombrable dont l'ensemble des sommets est appelé la trame et noté $|A|$. Deux points adjacents x et y sont dits strictement cohérents, ce qui se note $x \frown y[A]$; les abréviations suivantes sont pratiques:* $x \coh y[A]\ .\,\mathrm{ssi}\,.\ x = y$ ou $x \frown y[A]$, $x \smile y[A]\ .\,\mathrm{ssi}\,.\ \mathrm{non}\ x \coh y[A]$.

Etant donné un espace cohérent A, son dual $A^\perp$ est le graphe complémentaire.

Une application linéaire f de A dans B est une relation entre A et B telle que pour tous couples distincts $(a, b), (a', b') \in f$ *si $a \coh a'[A]$ alors $b \frown b'$. Les applications linéaires se composent comme les relations. On parlera notamment d'isomorphisme linéaire partiel lorque la relation est fonctionnelle et linéaire dans les deux sens, et de plongement linéaire lorsque de plus elle définit une application (au sens ensembliste) de $|A|$ dans $|B|$.* [1]

DÉFINITION **2** *Etant donnés deux espaces cohérents A et B, l'espace cohérent A précède B, noté $A{<}B$, est défini par:*

$$\textit{trame:}\quad |A{<}B| = |A| \times |B|$$
$$\textit{cohérence:}\quad (a, b) \frown (a', b')[A{<}B]\ .\,\mathrm{ssi}\,.\ (a \frown a'[A]\ \mathrm{et}\ b = b')\ \ \mathrm{ou}\ b \frown b'[B]$$

PROPOSITION **1 ([Ret93])** *Ce connecteur est:*

non-commutatif $A{<}B \not\equiv B{<}A$,

autodual $(A{<}B)^\perp \equiv A^\perp{<}B^\perp$,

associatif $A{<}(B{<}C) \equiv (A{<}B){<}C$,

admet 1 *pour neutre* $A{<}1 \equiv A \equiv 1{<}A$,

entre la disjonction $\wp$ et la conjonction $\otimes$ pour l'implication linéaire: pour tout couple d'espaces cohérents A et B, on a $A \otimes B \multimap A{<}B$ et $A{<}B \multimap A \wp B$.

1. On fera attention: ainsi décrite, une application linéaire n'est pas une application au sens ensembliste. La terminologie se justifie ainsi: les objets intéressants d'un espace cohérent A sont ses cliques, car si A interprète une formule $\tilde{A}$, une démonstration de $\tilde{A}$ est interprétée par une clique de A — et une application linéaire de A dans B est bel et bien une application au sens ensembliste de l'ensemble des cliques de A dans l'ensemble des cliques de B.

DÉFINITION **3** *On note* 2 *l'ensemble* $\{0,1\}$, 2^* *l'ensemble des mots sur* 2, *— y compris le mot vide* ε *—, et* 2^ω *l'ensemble des mots infinis sur* 2, *muni de l'ordre lexicographique habituel et la topologie produit. Les lettres* w, v, u *désignent des mots infinis de* 2^ω, *tandis que la lettre* m *et ses dérivées désignent des mots finis de* 2^*.

PROPOSITION **2** *L'ensemble* $\mathbf{gt}_M$ *des fonctions continues de* 2^ω *dans un ensemble* M *muni de la topologie discrète, est en correspondance bijective avec l'ensemble des arbres binaires dont les feuilles sont étiquetées par des éléments de* M *de sorte que deux feuilles sœurs n'aient jamais la même étiquette.*

Ainsi un élément de $\mathbf{gt}_M$ *peut-il être décrit par un ensemble fini* $\{(m_1,a_1),...,(m_k,a_k)\} \in \mathcal{P}_{fin}(2^* \times M)$ *satisfaisant:*

(1) $\forall w \in 2^\omega\ \exists! i\ \exists w' \in 2^\omega\ w = m_i w'$

(2) $\forall i,j\ \ [\exists m \in 2^*\ m_i = m0 \text{ et } m_j = m1] \Rightarrow a_i \neq a_j$

La fonction continue correspondante se calcule ainsi:
pour un $w \in 2^\omega$ il existe, d'après (1) un unique i tel qu'il existe un w' avec $w = m_i w'$, et on pose $f(w) = a_i$.

C. La modalité et ses propriétés

DÉFINITION **4** *Soit* A *un espace cohérent. On définit* $\triangleleft A$ *par:*

trame: *l'ensemble* $\mathbf{gt}_{|A|}$ *des fonctions continues de* 2^ω *dans* $|A|$ *muni de la topologie discrète*

cohérence: *deux fonctions* f *et* g *de* $\mathbf{gt}_{|A|} = |\triangleleft A|$ *sont dites strictement cohérentes lorsque*

$$\exists w \in 2^\omega\ f(w) \frown g(w)[A] \text{ et } \forall w' > w\ f(w') = g(w')$$

PROPOSITION **3** *La modalité précédemment définie jouit des propriétés suivantes:*

(1) Si $|A|$ *est dénombrable, il en est de même de* $|\triangleleft A|$.

(2) La modalité $\triangleleft$ *est autoduale, c.-à-d.* $(\triangleleft A)^\perp \equiv \triangleleft(A^\perp)$.

(3) La modalité $\triangleleft$ *est un endofoncteur —* $\triangleleft \ell = \{(f,g)/\forall w \in 2^\omega\ (f(w),g(w)) \in \ell\} \subset |\triangleleft A| \times |\triangleleft B|$

(4) L'ensemble $\{((f_0,f_1),f)/f(0w) = f_0(w) \text{ et } f(1w) = f_1(w)\}$ *est un isomorphisme linéaire entre* $\triangleleft A < \triangleleft A$ *et* $\triangleleft A$.

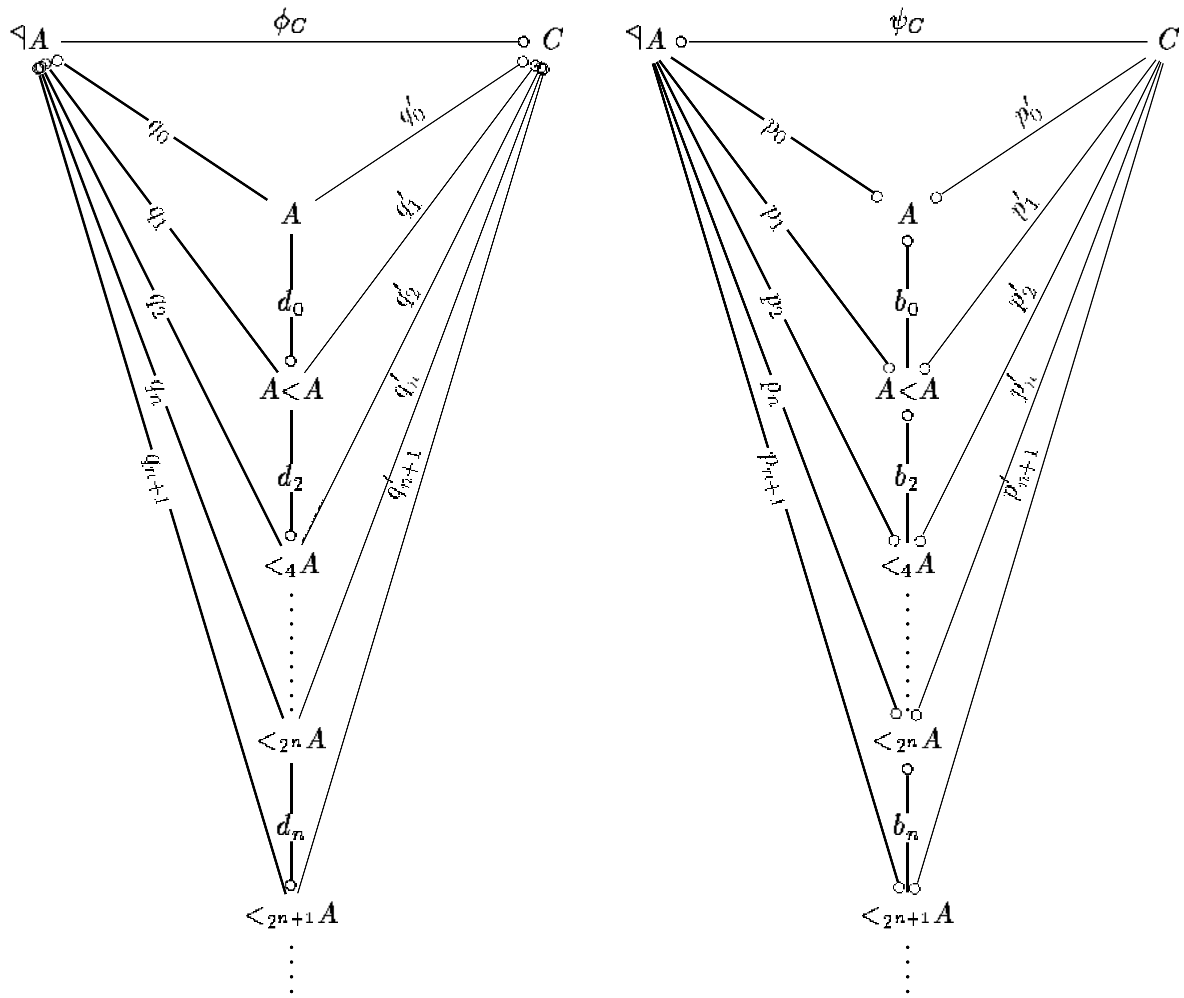
(5) L'ensemble $\{(a,\underline{a})/\underline{a}(w) = a\}$ *est un plongement linéaire de* A *dans* $\triangleleft A$ *et de* $\triangleleft A$ *dans* A. *De ce fait,* A *est une rétraction linéaire de* $\triangleleft A$.

La proposition précédente est établie directement, en raisonnant sur 2^ω et les arbres, dans [Ret94b]. Néanmoins elle se déduit aisément de la proposition plus « catégorique » que voici:

PROPOSITION **4** *Notons $<_{2^n}A$ l'espace cohérent $A < A....A < A$ (2^n fois) — rappelons que $<$ est associatif —, et notons ${}_2k$ l'écriture de l'entier k en base 2. Définissons, pour $n \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned}
d_n &= \{((x_0, ..., x_{2^n-1}), (x_0, x_0, x_1, x_1, ..., x_{2^n-1}, x_{2^n-1}))\} \subset |{<_{2^n}}A| \times |{<_{2^{n+1}}}A| \\
b_n &= \{(\bar{y}, \bar{x})/(\bar{x}, \bar{y}) \in d_n\} \subset |{<_{2^{n+1}}}A| \times |{<_{2^n}}A| \\
q_n &= \{((x_0, ..., x_{2^n-1}), f)/\forall k \in [0, 2^n - 1]\ \forall w \in 2^\omega\ \ f(({}_2k)w) = x_k\} \subset |{<_{2^n}}A| \times |{\lhd}A| \\
p_n &= \{(f, \bar{x})/(\bar{x}, f) \in q_n\} \subset |{\lhd}A| \times |{<_{2^n}}A|
\end{aligned}$$

Alors ces relations sont des isomorphismes linéaires partiels, les d_n et q_n sont des plongements linéaires, et $\lhd A$ est la limite inductive du diagramme des d_n, les « injections » étant les q_n, et la limite projective du diagramme des b_n, les « projections » étant les p_n.



Démonstration: Les deux parties de la proposition étant similaires, on se contentera de montrer que $\lhd A$ est la limite inductive des d_n. La commutation des triangles $q_n = q_{n+1} \circ d_n$ est immédiate.

Soit maintenant un cône de même base et de sommet C, le morphisme de $<_{2^n}A$ dans C étant appelé q'_n. Soit ϕ_C l'ensemble suivant:

$$\phi_C = \{(q_n(x_0, ..., x_{2^n-1}), c)/((x_0, .., x_{2^n-1}), c) \in q'_n\} \subset |\lhd A| \times |C|$$

Il est clair d'après sa définition que ϕ_C factorise les q'_n. Montrons rapidement qu'elle est unique à le faire. Soit ϕ'_C une autre factorisation des q'_n. Soit $(f, c) \in \phi'_C$; alors il existe un n et un $\bar{x} \in |<_{2^n}A|$ tel que $q_n(\bar{x}) = f$. Donc $(\bar{x}, c)$ est dans q'_n, car il est dans $\phi'_C \circ q_n$, auquel cas (f, c) est aussi dans ϕ_C. Soit maintenant $(f, c) \in \phi_C$; alors il existe un n et un $\bar{x}$ dans $<_{2^n}A$ tel que $q_n(x_0, ..., x_{2^n-1}) = f$ et $((x_0, .., x_{2^n-1}), c)$ est dans q'_n. Comme $\phi'_C \circ q_n = q'_n$, et que f est l'unique image de $\bar{x}$ par q_n, ϕ'_C doit contenir (f, c).

Il reste maintenant à montrer que ϕ_C définit une application linéaire de $\lhd A$ dans C.

Si $(f, c), (f', c') \in \phi$, alors il existe un entier k et un entier l tels que: $\left\{\begin{array}{l} ((x_0, ..., x_{2^k-1}), c) \in q'_k \\ ((x'_0, ..., x'_{2^l-1}), c') \in q'_l \\ q_k(x_0, ..., x_{2^k-1}) = f \\ q_l(x'_0, ..., x'_{2^l-1}) = f' \end{array}\right.$

Supposons que $l \leqslant k$ et considérons $d_{k-1}(...(d_{l+1}(d_l(x_0, ..., x_{2^k-1})))...) \in |<_{2^l}A|$. Comme les d_n sont des plongements linéaires et que $q'_l = q'_k \circ d_{k-1} \circ .. \circ d_l$ on a $(d_{k-1}(...(d_l(x_0, ..., x_{2^k-1}))...)), c) \in q'_l$ et comme $q_l = q_k \circ d_{k-1} \circ .. \circ d_l$, on a aussi $q_k(d_{k-1}(...(d_l(x_0, ..., x_{2^l-1}))...)) = f'$.

On peut donc dire qu'il existe un entier $r = \max\{l, k\}$ tel que $\left\{\begin{array}{l} ((x_0, ..., x_{2^r-1}), c) \in q'_r \\ ((x'_0, ..., x'_{2^r-1}), c') \in q'_r \\ q_r(x_0, ..., x_{2^r-1}) = f \\ q_r(x'_0, ..., x'_{2^r-1}) = f' \end{array}\right.$

Supposons maintenant que $f \frown f'[\lhd A]$. Comme q_r est un plongement linéaire, on a $(x_0, ..., x_{2^r-1}) \frown (x'_0, ..., x'_{2^r-1})[<_{2^r}A]$ et donc $c \frown c'[C]$ — puisque q'_r est linéaire. Si $f = f'$ alors $(x_0, ..., x_{2^r-1}) = (x'_0, ..., x'_{2^r-1})[<_{2^r}A]$ et donc $c \bigcirc c'[C]$ — puisque q'_r est linéaire.

On démontre de même que $\lhd A$ est la limite projective du diagramme des b_n. Cela tient aux faits évidents suivants: les applications linéaires d_n et q_n sont des isomorphismes linéaires partiels, les b_n et les p_n sont leur transposées, et la transposition est bien évidemment un foncteur (contravariant) dans la catégorie des ensembles munie des relations comme morphismes. Ainsi la factorisation ψ_C d'un autre cône utilisant des morphismes p'_n admet-elle pour définition la « transposée » de celle de ϕ_C:

$$\psi_C = \{(c, f)/\exists n\ \exists \bar{x} \in <_{2^n}A\ f = q_n(\bar{x}) \text{ et } (c, \bar{x}) \in p'_n\}$$

$\diamond$

Pour finir, je répondrai à une question qu'on m'a souvent posée:

REMARQUE **1** *$\lhd$ est n'est ni une monade, ni une comonade — puisque $\lhd$ est autoduale ces deux propriétés sont équivalentes.*

Démonstration: Il n'y a pas de transformation naturelle $\mathbf{r} : \lhd \dot{\longrightarrow} \mathrm{Id}$.

Supposons qu'il y ait une telle transformation naturelle $\mathbf{r}$, et soit $1 \oplus 1$ l'espace cohérent constitué de deux sommets incohérents a et b, et 1 l'espace cohérent à un sommet. Soient $\ell_a, \ell_b, \ell_{ab} : 1 \oplus 1 \multimap 1$ les trois applications linéaires définies par

$$\ell_a = \{(a, *)\}\ \ \ell_b = \{(b, *)\}\ \ \ell_{ab} = \{(a, *), (b, *)\}$$

$$\begin{tikzcd}
\triangleleft(1\oplus 1) \arrow[r, "\mathbf{r}_{1\oplus 1}"] \arrow[d, "\triangleleft \ell_?"'] & 1\oplus 1 \arrow[d, "\ell_?"] \\
\triangleleft 1 \equiv 1 \arrow[r, "\mathbf{r}_1"'] & 1
\end{tikzcd}$$

Etudions la commutativité des diagrammes ci-contre. Pour $\ell_? = \ell_{ab}$, on voit que $\mathbf{r}_1$, qui est soit $\emptyset$ soit Id_1, est Id_1. Considérons les trois éléments $\{(\varepsilon, a)\}, \{(0, a), (1, b)\}, \{(\varepsilon, b)\}$. Pour $\ell_? = \ell_a$ on voit que de ces trois éléments, seul le premier s'envoie sur a par $\mathbf{r}_{1\oplus 1}$, et en utilisant ce même diagramme pour $\ell_? = \ell_b$ on voit que de ces trois éléments seul le troisième s'envoie sur b par $\mathbf{r}_{1\oplus 1}$. Par conséquent $\mathbf{r}_{1\oplus 1}$, n'envoie le second sur rien, ce qui empêche le diagramme obtenu pour $\ell_? = \ell_{ab}$ de commuter.

On peut néanmoins se demander s'il n'existe pas une transformation naturelle $\mathbf{s} : \triangleleft \dot{\longrightarrow} \triangleleft\triangleleft$ satisfaisant le principe de co-associativité. Je ferai une réponse informelle: l'application linéaire $\mathbf{s}_A = \{(f, (\varepsilon, f)\}$ ne satisfait pas la condition de naturalité, et la seule transformation naturelle qui satisfasse la co-associativité à laquelle je puisse penser, est donc celle définie par:

$$\mathbf{s}_A = \{\ (\ f, \{(m_i, f_i)\}\ )\ /\ f(m_i w) = f_i(w)\ \} \subset |\triangleleft A| \times |\triangleleft\triangleleft A|$$

Si la relation $\mathbf{s}_A$ satisfait la condition de naturalité et la co-associativité, elle ne définit cependant pas une application linéaire. Considérons les trois éléments suivants de $|\triangleleft(1\oplus 1)|$: $f_{ba} = \{(0, b); (1, a)\}$, $f_a = \{(\varepsilon, a)\}$ et $f_{a(ba)} = \{(0, a); (10, b); (11, a)\}$. Soient maintenant les deux éléments suivants de $\triangleleft\triangleleft(1\oplus 1)$: $F_{f_{a(ba)}} = \{(\varepsilon, f_{a(ba)})\}$ et $F_{f_a f_{ba}} = \{(0, f_a); (1, f_{ba}\}$. On a alors $F_{f_{a(ba)}} \smile F_{f_a f_{ba}} [\triangleleft\triangleleft(1\oplus 1)]$, tandis que $(f_{a(ba)}, F_{f_{a(ba)}})$ et $(f_{a(ba)}, F_{f_a f_{ba}})$ sont tous deux dans $\mathbf{s}_{1\oplus 1}$. $\diamond$

Remerciements: Je remercie Pierre Ageron, Thomas Ehrhard, Philippe de Groote, Jean-Yves Girard, Catherine Gourion, Achim Jung, Myriam Quatrini , et Thomas Streicher de leurs commentaires. Les diagrammes sont dessinés avec `diagrams`, outil LaTeX de Paul Taylor.

Références

[Gen34] Gehrard Gentzen. Untersuchungen über das logische Schließen II. *Mathematische Zeitschrift*, 39:405–431, 1934. Traduction française de J. Ladrière et R. Feys: Recherches sur la déduction logique, Presses Universitaires de France, Paris, 1955.

[Gir87] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50(1):1–102, 1987.

[Gir91] Jean-Yves Girard. A new constructive logic: classical logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 1(3):255–296, November 1991.

[Qua95] Myriam Quatrini. *Sémantique cohérente des exponentielles: de la logique linéaire à la logique classique*. Thèse de Doctorat, spécialité Mathématiques, Université Aix-Marseille 2, janvier 1995.

[Ret93] Christian Retoré. *Réseaux et Séquents Ordonnés*. Thèse de Doctorat, spécialité Mathématiques, Université Paris 7, février 1993.

[Ret94a] Christian Retoré. On the relation between coherence semantics and multiplicative proof nets. Rapport de Recherche 2430, INRIA, décembre 1994.

[Ret94b] Christian Retoré. A self-dual modality for "before" in the category of coherence spaces and in the category of hypercoherences. Rapport de Recherche 2432, INRIA, décembre 1994.

[Tro92] Anne Sjerp Troelstra. *Lectures on Linear Logic*, volume 29 of *Center for the Study of Language and Information (CSLI) Lecture Notes*. University of Chicago Press, 1992.