MASTER INFORMATIQUE 2e ANNÉE
UE INF 559: LOGIQUE ET LANGAGES (RESPONSABLE B. COURCELLE)
PARTIE *Théorie de la démonstration et grammaires catégorielles* (CH. RETORÉ)
ELÉMENTS DE RÉPONSE AU DEVOIR RENDU LE 5 JANVIER 2011

Montrer que tout lambda terme normal de type t avec pour seules variables libres des x_i pour $0 \geq i \geq n$, toutes de types e, correspond à une formule de la logique du premier ordre sur un langage que l'on précisera, formule dont les variables libres sont les x_i pour $0 \geq i \geq n$. Commençons par montrer que les seuls lambda termes normaux de type **e** avec uniquement des variables libre de type e sont les variables. Un lambda terme normal w s'écrit $\lambda x_1^{X_1} \ldots \lambda x_p^{X_p}\ (((h\ u_1)\ldots)u_n)$, et s'il est de type e il s'écrit donc $(((h\ u_1)\ldots)u_n)$ (s'il commençait par un lambda il serait de type $A \to B$). Dans ce terme, h est une constante ou une variable *libre* (il n'y a pas de lambda devant) de type $U_1 \to (U_2 \to (\to \ldots (U_n \to \mathbf{e})))$. Or il n'y a aucune constante de ce type, et les seules variables libres sont de type **e** auquel cas $n = 0$.[1]

Soit maintenant w un terme de normal de type t avec uniquement des variables libre de type **e**. Comme w est normal w s'écrit $\lambda x_1^{X_1} \ldots \lambda x_p^{X_p}\ (((h\ u_1)\ldots)u_n)$. Comme w est de type **t** il s'écrit en fait $(((h\ u_1)\ldots)u_n)$ (s'il commençait par un lambda il serait de type $A \to B$) Dans cette expression, h est une constante ou une variable libre de type $U_1 \to (U_2 \to (\to \ldots (U_n \to \mathbf{t})))$. Il faut donc que h soit une constante, c.-à-d.un prédicat du langage, un connecteur ou un quantificateur.

- Si h est un prédicat du langage alors $U_i = \mathbf{e}$ pour tout i. D'après ce qui précède, les u_i sont dont des variable de type **e**[2] w correspond donc à une formule atomique du langage.
- Si h est un connecteur, alors chacun de ses arguments est de type t correspond donc, par hypothèse d'induction, à une formule. w correspond donc à l'application de ce connecteur aux formules correspondant à ses arguments de type **t**.
- Si h est un quantificateur *Quant* (qui est soit $\forall$ soit $\exists$), alors son argument est de type $e \to t$. On peut donc supposer qu'il s'écrit $\lambda x : e w'$ où w' est un lambda terme de type t avec une variable libre de type e de plus que w: x. Par hypothèse d'induction w' correspond à une formule F du premier ordre de variables libres $x_1, \ldots, x_n, x : e$ et w à la formule *Quant* $x \quad F$.

1. Remarque: S'il y avait des fonctions de type $\mathbf{e} \to (\mathbf{e} \to (\ldots \to (\mathbf{e} \to \mathbf{e})))$, alors une autre possibilité est que h soit une telle fonction disons $\bar{h}$. Dans ce cas, on peut supposer, par hypothèse d'induction que chacun des u_i est un terme, disons $\bar{u}_i$ et dans ce cas w correspond au terme $\bar{h}(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$.

2. ou des termes, s'il y avait des fonctions de type $\mathbf{e} \to (\mathbf{e} \to (\ldots \to (\mathbf{e} \to \mathbf{e})))$.

Sémantique des pronoms relatifs L'effet sémantique du pronom est d'introduire une conjonction entre la proposition relative (de type $\mathbf{e} \to \mathbf{t}$) et le nom commun (aussi de type $\mathbf{e} \to \mathbf{t}$).

Un enfant qui court tombe.

se structure ainsi:

Un ((enfant(x) et court(x)) (tombe(x))

Un est bien appliqué à deux prédicats: la restriction *((enfant(x) et court(x))* et le prédicat principal *tombe(x)*.

Vous remarquerez que cette phrases à deux lectures possibles.

– Le locuteur peut être en train de voir un enfant qui court et tombe. Le déterminant *un* est en ce cas un existentiel (E)
– Le locuteur peut énoncer une vérité générale. Le *un* déterminant est alors un universel (U)

Le lexique à prendre est alors

mot	*catégorie syntaxique c*	*type sémantique = c^**	*lambda terme de typec^**
court	$sn\backslash S$	$\mathbf{e} \to \mathbf{t}$	$\lambda x{:}\mathbf{e}\ (\underline{court}(x))$
tombe	$sn\backslash S$	$\mathbf{e} \to \mathbf{t}$	$\lambda x{:}\mathbf{e}\ (\underline{tombe}(x))$
enfant	n	$\mathbf{e} \to \mathbf{t}$	$\lambda x{:}\mathbf{e}\ (\underline{enfant}(x))$
qui	$n\backslash n/(sn\backslash S)$	$(\mathbf{e} \to \mathbf{t}) \to (\mathbf{e} \to \mathbf{t}) \to (\mathbf{e} \to \mathbf{t})$	$\lambda P{:}\mathbf{e} \to \mathbf{t}\lambda Q{:}\mathbf{e} \to \mathbf{t}(\lambda x{:}\mathbf{e} \wedge (Px)(Qx))$
un	$(E)(sn/(sn/S))/n$	$(\mathbf{e} \to \mathbf{t}) \to (\mathbf{e} \to \mathbf{t}) \to \mathbf{t}$	$(E)\lambda P{:}\mathbf{e} \to \mathbf{t}\lambda Q{:}\mathbf{e} \to \mathbf{t}\exists(\lambda x{:}\mathbf{e} \wedge (Px)(Qx))$
			$(U)\lambda P{:}\mathbf{e} \to \mathbf{t}\lambda Q{:}\mathbf{e} \to \mathbf{t}\exists(\lambda x{:}\mathbf{e} \Rightarrow (Px)(Qx))$

Si on veut traiter le déterminant défini *le* au lieu de *un* il doit correspondre à une fonction de choix qui va de $\mathbf{e} \to \mathbf{t}$ dans $\mathbf{e}$ (le τ de Hilbert).

Si on veut traiter *Pierre qui court tombe.*, alors c'est un peu plus compliqué: *qui court* doit ajouter une proposition au verbe principal.