MASTER INFORMATIQUE 2^{e} ANNÉE
UE INF 559: LOGIQUE ET LANGAGES (RESPONSABLE B. COURCELLE)
DEVOIR SURVEILLÉ DU LUNDI 22 NOVEMBRE 2010
DURÉE 1H: 11:15–12:15 LIEU: SALLE 2 BÂTIMENT A13

⋆ ⋆ ⋆

PARTIE *Théorie de la démonstration et grammaires catégorielles* (CH. RETORÉ)

⋆ ⋆ ⋆

SEULS LES DOCUMENTS FOURNIS SONT AUTORISÉS

CE SUJET COMPORTE 1 PAGE

Exercice I *(déduction naturelle)*

Dans chacun des cas suivant dire si la formule est démontrable en logique intuitionniste. Si elle l'est on donnera une preuve et le lambda terme typé correspondant. Si elle ne l'est pas, on démontrera qu'elle n'est ne l'est pas.

I.a. $(U \to U) \to U$

> Pour l'interprétation $U = 0$ (faux), $(U \to U) \to U = 0$. La formule n'est docn pas démontrable en logique classique. *A fortiori*, elle ne l'est pas en logique intuitionniste.

I.b. $U \to (V \to U)$

> $\lambda x^U(\lambda z^V.\, x^U)$

I.c. $(U \to U) \to (U \to U)$

> Par exemple, $\lambda f^{U\to U}.\, f$ ou $\lambda f^{U\to U}\lambda x^U.\, (f(fx))$

Exercice II *(sémantique des preuves)*

Remarque: la clique vide est une clique finie de n'importe quel espace cohérent.
On appelle $\mathbb{1} = \{*\}$, l'unique espace cohérent à un point (on dit aussi jeton, *token*,...).

II.a. Quelle est la trace (on dit aussi squelette) de la fonction stable $Id_A : A \to A$ définie par $Id_A(a) = a$ pour tout clique a de l'espace cohérent A? On admettra que cette fonction est stable.

> Il faut constituer les couples (a_0,x) ou a_0 est la plus petite clique finie telle que $x \in F(a_0)$. Donc a_0 est $\{x\}$ ou $\varnothing$, mais si si c'était $\varnothing$ alors on aurait $x \in F(a)$ pour toute clique a. $Tr(Id_A) = \{(\{x\},x) | x \in |A|\}$.

II.b. Quelle est la trace (on dit aussi squelette) de la fonction stable $C_u : A \to B$ définie par $C_u(a) = u$ pour tout clique a de l'espace cohérent A, où u est une clique fixée de B? On vérifiera rapidement que cette fonction est stable.

> (0) L'image d'une clique est une clique, la clique u. (monotonie) On a toujours $C_u(a) = u \subset u = C_u(b)$ pour tout a et b, ce qui garantit la monotonie. (continuité) Pour toute union, dirigée ou non, $F(\cup_i a_i) = u$ tandis que $\cup_F(a_i) = \cup_i u = u$. (stabilité) Pour toute intersection de deux cliques a et a' que leur réunion soit ou non une clique, on a $F(a \cap a') = u$ et $F(a) \cap F(a') = u \cap u = u$. Etant donné $z \in |B|$ il faut trouver les cliques finies minimales a_0 telles que $z \in C_u(a_0)$. C'est $\varnothing$, et $Tr(C_u) = \{(\varnothing,z) | z \in u\}$.

II.c. Quel est l'espace cohérent $\mathbb{1} \to \mathbb{1}$?

> Appelons $\star$ l'unique point de $\mathbb{1}$. On a $|\mathbb{1} \to \mathbb{1}| = \{(\varnothing,\star),(\{\star\},\star)\}$. Rappelons la définition de la cohérence dans l'espace cohérent $A \to B$: $(a,x) \circ (a',x')[A \to B]$ lorsque 1) si $a \cup a'$ est une clique alors $x \circ x'[B]$ et 2) si $a \cup a'$ est une clique et $a \neq a'$ alors $x \neq x'$. Les deux points de $|\mathbb{1} \to \mathbb{1}|$ ne sont pas cohérents.

II.d. Quel est l'espace cohérent $\mathbb{1} \to (\mathbb{1} \to \mathbb{1})$?

> Sa trame contient quatre points $|\mathbb{1} \to (\mathbb{1} \to \mathbb{1})| = \{(\varnothing,(\varnothing,\star)),(\{\star\},(\varnothing,\star)),(\varnothing,(\{\star\},\star)),(\{\star\},(\{\star\},\star)\}$. Deux point distincts ne sont jamais cohérents.

II.e. Quelle est l'interprétation du terme $\lambda z^U \lambda x^V. \, x$ dans la catégorie des espaces cohérents, avec $[[U]] = [[V]] = \mathbf{1}$.

> D'après la question II.a. l'interprétation de $\lambda x^V. \, x$ a pour trace $\{(\{\star\},\star)\}$, et d'après la question II.b l'interprétation de $\lambda z^U \lambda x^V. \, x$ a pour trace $\{(\varnothing,(\{\star\},\star))\}$.

II.f. Dans les mêmes conditions, trouver l'interprétation du terme

$$((\lambda a^{U \to (V \to U)} \lambda b^{U \to U}. \, a)(\lambda z^U \lambda x^V. \, x))(\lambda s^U. s)$$

> Ce lambda terme se réduit dans celui de la question précédente. Il a donc la même interprétation.