MASTER INFORMATIQUE 2e ANNÉE
UE INF 559: LOGIQUE ET LANGAGES (RESPONSABLE B. COURCELLE)
EXAMEN DU MARDI 13 JANVIER 2008
DURÉE 3H: 9H–12H   LIEU: AMPHITHÉÂTRE D BÂTIMENT A29

⋆⋆⋆

PARTIE *Théorie de la démonstration et grammaires catégorielles* (CH. RETORÉ)
DURÉE 1H30

⋆⋆⋆

DOCUMENTS AUTORISÉS
(MAIS TÉLÉPHONES, ORDINATEURS ETC. INTERDITS)

CE SUJET COMPORTE 2 PAGES

Dans les preuves par induction, on pourra se contenter de traiter en détail un seul des deux connecteurs / et \, ces deux cas étant parfaitement symétriques en mentionnant pour l'autre qu'un traitement symétrique est possible.

Exercice I *(Analyse syntaxique et sémantique de la phrase)*

I.a. Construire un lexique permettant une analyse syntaxique et sémantique de la phrase *Chacun pense à lui-même*. le lexique associera à chaque mot sa ou ses catégories syntaxiques ainsi que le type sémantique et le lambda-terme associée à chaque catégorie syntaxique. On effectuera l'analyse syntaxique et sémantique. (La solution n'est pas unique, il y a au moins deux manières de gérer le "à")

> Le plus simple est de considérer *penser_à* comme une unité [on peut aussi introduire un à-syntagme spa avec penser de catégorie $(sn \setminus S) / spa$ et à de catégorie spa / sn, mais c'est plus compliqué]. Voir ci-dessous le lexique complet.

I.b. Enrichir ce lexique afin qu'il puisse analyser toutes les phrases de verbe *pense à* avec les mots *chacun* (sujet ou objet), *quelqu'un* (sujet ou objet), *lui-même* (en complément d'objet seulement). Y a-t-il des analyses qui ne puissent être effectuées dans les grammaires AB? En mener une à terme en calculant la représentation sémantique associée.

> chacun sujet: $S / (sn \setminus S)$ terme: $\lambda P(\forall(\lambda x(Px))) : (e \to t) \to t$
> chacun objet: $(S / sn) \setminus S$ terme: $\lambda P(\forall(\lambda x(Px))) : (e \to t) \to t$
> quelqu'un sujet: $S / (sn / S)$ terme: $\lambda P(\exists(\lambda x(Px))) : (e \to t) \to t$
> quelqu'un objet: $(S / sn) \setminus S$ terme: $\lambda P(\exists(\lambda x(Px))) : (e \to t) \to t$
> lui-même objet: $((sn \setminus S) / sn) \setminus (sn \setminus S)$
> terme $\lambda Q(\lambda x((Qx)x) : (e \to (e \to t)) \to (e \to t)$
> pense_à $(sn \setminus S) / sn$ terme $\lambda x \lambda y((pense\_a\ y)x) : e \to (e \to t)$
> *Chacun pense_à quelqu'un.* n'est pas analysable dans les grammaires AB, rien de se simplifie.

I.c. Parmi les phrases précédentes, en choisir une à laquelle le calcul de Lambek et la sémantique de Montague associe une représentation sémantique qui vous semble peu intuitivement plausible. Développer le calcul de cette représentation sémantique.

L'exemple précédent avec la lecture $\exists\forall$ est peu plausible (tout le monde pense à une même personne.

Exercice II *(Grammaires catégorielles et grammaires hors-contexte)*

II.a. Construire une grammaire hors-contexte qui engendre le même langage que la grammaire de Lambek définie par le lexique $a : S/X, (X/Y)/X, X, \quad b : Y, \quad c : U/(U\backslash U)$ — terminaux a, b, c, catégories de base S, X, Y, U. On pourra raisonner sur la structure des analyses dans le calcul de Lambek.

L'idée est simple: c ne sera jamais dans une phrase du langage car sa catégorie ne contient pas S, il ne peut pas interagir avec les autres. La grammaire de Lambek est donc équivalente à celle définie par le lexique $a : S / X, (X / Y) / X, X, \quad b : Y$. Comme les types sont d'ordre 1 les grammaires L et AB définies par ce lexique engendrent le même langage (proposition 19 du polycopié), et comme expliqué dans le chapitre 1 le langage engendré ce lexique dont les types sont d'ordre 1 et n'utilise que / est celui engendré la grammaire hors-contexte en forme normale de Greibach $S \to aX$, $X \to aXY$ $X \to a$ et $Y \to b$ (proposition 3 du polycopié).
On peut montrer par récurrence sur la preuve supposée normale que si les hypothèses sont parmi a,b,c alors il y a au moins un c en hypothèse si et seulement s'il y a un U dans la catégorie en conclusion.

- Si c'est un axiome, l'équivalence est évidente.
- Si c'est une règle d'élimination disons / (resp. $\backslash$).
  1. Supposons qu'il y ait au moins une hypothèse c. S'il est du coté de l'argument alors la prémisse argument $A[U]$ contient au moins un U, et la prémisse droite est donc de la forme $X / A[U]$. La seule sous formule du lexique de ce type est: $U / (U \backslash U)$ (resp. $U \backslash U$) et la conclusion contient un U.
  2. Réciproquement, supposons qu'il y ait un U en conclusion. La premisse implication est donc de la forme $T / A[U]$, par hypothèse d'induction il y a une prémisse c dans la preuve toute entière.
- S'il s'agit d'une abstraction conduisant à X / Y (resp. $Y \backslash X$).
  1. Supposons qu'il y ait au moins une hypothèse c après l'abstraction. Il y en a fortiori une avant, la même, et par hypothèse d'induction, il y a donc un U dans X et donc un dans X / Y (resp. $Y \backslash X$).
  2. Supposons qu'il y ait un U dans X / Y (resp. $Y \backslash X$). Comme la preuve est normale cette formule doit être une sous formule du lexique, c'est donc $U / (U \backslash U)$ (resp. $(U \backslash U)$). Il y a donc un U dans X et donc, par hypothèse d'induction sur la preuve avant sa dernière règle une hypothèse c qui n'a pu être supprimée lors de cette règle.

Exercice III *(Groupes et modèles du calcul de Lambek)*

Soit $(G, \cdot, 1)$ un groupe, c.-à-d.un ensemble G muni d'une loi de composition associative (mais pas forcément commutative) notée par $\cdot$ ou par simple juxtaposition, d'un élément neutre noté 1 et d'une bijection de G notée $^{-1}$ satisfaisant, pour tout x de G: $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$.

Soit $[\ldots]$ une fonction des catégories de base dans G. On étend inductivement $[\ldots\ldots]$ à toute formule du calcul de Lambek par: $[B / A] = [B].[A]^{-1}$ et $[A \backslash B] = [A]^{-1}[B]$.

Un séquent $A_1,\dots,A_n \vdash C$ est dit *valide* pour une telle interprétation lorsque $[A_1]\cdots[A_n] = [C]$.

III.a. Donner un exemple d'interprétation dans un groupe pour laquelle $(b\ /\ a) \setminus b \vdash a$ est valide.

> C'est valide dans tout groupe et pour toute interprétation:
> $([b\ /\ a])^{-1}[b] = ([b][a]^{-1})^{-1}[b] = [a]^{-1^{-1}}[b]^{-1}[b] = [a]$.

III.b. Donner un exemple d'interprétation dans un groupe pour laquelle $b \setminus c, a \setminus b \vdash a \setminus c$ est valide.

> $(Z,+)$, $[a] = 2$, $[b] = 3$ (n'importe quelle interprétation dans un groupe commutatif fonctionne).

III.c. Donner un exemple d'interprétation dans un groupe pour laquelle $b \setminus c, a \setminus b \vdash a \setminus c$ n'est pas valide.

> Il faut prendre un groupe non commutatif. Un exemple simple est fourni par le groupe libre (cf. polycopié). Un autre exemple: les permutations avec la composition $\circ$ sur trois éléments $\{1,2,3\}$. $[a] = [a]^{-1}$ échange 2 et 3, $[b] = [b]^{-1}$ échange 1 et 3, et $[c]$ envoie 1 sur 2, 2 sur 3 et 3 sur 1 ($[c]^3 = Id$). Il reste à calculer $[a]^{-1}\circ[c](1) = [a]\circ[c](1) = [a](2) = 3$ tandis que $[b\setminus c]\circ[a\setminus b](1) = [b]^{-1}[c]\circ[a]^{-1}[b](1) = [b]\circ[c]\circ[a]\circ[b](1) = [b]\circ[c]\circ[a](3) = [b]\circ[c](2) = [b](3) = 1$

III.d. Montrer que si un séquent S est démontrable dans le calcul de Lambek, alors pour tout groupe G et pour toute interprétation $[\dots]$ à valeur dans G le séquent S est valide .

III.e. Montrer que la réciproque est fausse.

> Le séquent de la première question est valide dans tout groupe et pour toute interprétation, cependant il n'est pas démontrable. En effet, pour l'interprétation dans les parties du monoïde (N,+) avec $[a] = [a, +\infty)$ et $[b] = [b, +\infty)$. Si $[a] = [a, +\infty)$ on a $[b\ /\ a] = \{z | \forall x \in [a]\ z + x \in [b]\} = [b - a, +\infty)\}$ et $[(b\ /\ a) \setminus b] = \{u | \forall z \in [b\ /\ a]\ z + u \in [b]\} = [b - (b - a), +\infty)\}$. Dès que $a > b$, on a $[(b\ /\ a) \setminus b] = [b] = [b, +\infty) \not\subset [a, +\infty) = [a]$ par exemple si $a = 3$ et $b = 2$ on a $[(b\,/\,a) \setminus b] = [2, +\infty)$ qui n'est pas inclus dans $[3, +\infty)$.

III.f. Montrer qu'il existe un ensemble infini de séquents S_n tels que pour tout n:

– S_n a au moins n connecteurs logiques,

– S_n est valide dans toute interprétation dans un groupe
– et S_n n'est pas démontrable.

Posons $S_n = T_n \vdash a$, avec $T_0 = a$ et $T_{n+1} = (b \mathbin{/} T_n) \setminus b$ ainsi T_n a $2n$ connecteurs logiques. Dans tout groupe on a $[T_{n+1}] = ([b \mathbin{/} T_n])^{-1}[b] = ([b][T_n]^{-1})^{-1}[b] = [T_n]^{-1^{-1}}[b]^{-1}[b] = [T_n]$ et donc quel que soit n on a $[T_n] = [a]$.
Considérons maintenant l'interprétation dans les parties du monoïde (N,+) avec $[a] = [a, +\infty)$ et $[b] = [b, +\infty)$. Si $[T] = [t, +\infty)$ on a $[b \mathbin{/} X] = \{z | \forall x \in [T]\ z + x \in [b]\} = [b - t, +\infty)\}$ et $[(b \mathbin{/} T) \setminus b] = \{u | \forall z \in [b \mathbin{/} T]\ z + u \in [b]\} = [b - (b - t), +\infty)\}$. Dès que $t > b$, on a

$$[(b \mathbin{/} X) \setminus b] = [b] = [b, +\infty) \not\subset [t, +\infty) = [X]$$

Si on prend $a > b$, par exemple $a = 5$ et $b = 3$ on a $[(b \mathbin{/} a) \setminus b] = [b]$. Ensuite on peut vérifier par récurrence que $[T_n] = [b]$ pour tout $n \geq 1$ et par conséquent $T_n \vdash a$ n'est pas démontrable puisque $[T_n] = [b] \not\subset [a]$.

III.g. Déduire de cet exercice une fonction f des séquents dans les valeurs {Non,Peut-être} satisfaisant:
– Lorsque $f(S) =$ Non le séquent S n'est pas démontrable.
– L'ensemble de séquents $\{S | f(S) =$ Non$\}$ est infini.
– $f(S)$ est calculable en temps polynomial en fonction de la taille du séquent S.

(On pourra considérer un groupe particulier et, , pour le dernier point, on pourra admettre que les opérations dans G se font en temps constant et que $[X]$ l'interprétation dans G est calculable en temps polynomial en fonction de la taille de la formule X).

Soit G un groupe et $[]$ une interprétation des catégories de base dans ce groupe. L'ensemble en général infini de formules réfutables par ce groupe dépend évidement du groupe. Si par exemple le groupe est $(Z,+)$ et l''interprétation $[a] = 1$ tous les séquents de la forme $a, a, \ldots, a \vdash a$ avec $n \geq 2$ fois a à droite sont réfutés puisque $1 + 1 \cdots + 1 = n > 1$. Un groupe non commutatif réfutera davantage de formules non démontrables.
Calculer l'interprétation d'une formule à n symboles nécessite n inversions et n multiplications dans le groupe. Si le séquent comporte p formules, le calcul de la partie gauche nécessite p multiplications. C'est donc clairement polynomial.