Logique mathématique et linguistique formelle

Christian Retoré
Université de Bordeaux, INRIA, LaBRI-CNRS

Leçons de mathématiques d'aujourd'hui, séance du 7 juillet 2011
Institut de Mathématiques de Bordeaux

Présentation mise à disposition
dans l'attente de la parution du volume aux éditions Cassini

Table des matières

Première partie

Introduction

Une présentation historique, donc assez décousue car l'histoire de la logique n'est pas linéaire ;-)

De l'Antiquité au Moyen-Âge inclus, il n'y a pas de vraie distinction entre l'étude du langage et celle de la logique (vérité, raisonnement, interprétation,...).

Leibniz et même Frege sont encore entre logique et langage.

C'est l'apparition de la logique mathématique qui change la donne (début du XXe).

Néanmoins on commence ainsi en se plaçant du côté du sens (et donc de la logique) avant de parler de la langue, syntaxe, grammaire, vocabulaire.

1. Logique et mathématiques :

logique des mathématiques (classique, constructive, etc.)

étude formelle, si possible avec des structures mathématiques, de la logique ordinaire (mathématiques appliquées).

Deuxième partie

Une histoire plutôt sémantique

Initialement il n'y pas de variables, pas langage formel, de formule, tout (y compris les mathématiques) se fait en langage courant. Et on mesure alors la facilité que procure ces outils.

Même si grammaire (syntaxe) et logique (sens) sont intimement liés jusqu'au 19e siècle, mais les études semblent plutôt sémantiques.

2. Logos : discours rationnel

Règles : démonstration mathématique (notamment Pythagore).

Autres approche dialectique, dialogue (sophistes)

Donne un idéal à Platon, Zénon

... il s'agit davantage d'une étude rigoureuse (formelle ?) du raisonnement correct sur tout en s'inspirant de du raisonnement mathématique plutôt que d'une discussion du raisonnement mathématique (qui semble déjà bien établi).

3. Aristote — Porphyre, Boèce, Avicenne, Averroes,...

Catégories [l'univers est structuré] — lexique, ontologie.
– substance (ou essence) — homme ou cheval
– quantité — long-de-deux-coudées
– qualité — blanc, grammairien
– relation — double, maître, savoir
– lieu — au Forum
– temps — hier
– position — assis
– possession — armé
– action — couper
– passion — coupé
Termes : généraux ou particulier : homme / Socrate

4. Aristote — Stoïciens, Avicenne, Averroes, Dun Scott, Ockham...

Les propositions sont des phrases particulières de quatre sortes :

- A universelle affirmative : tous les hommes sont mortels
- I particulière affirmative certains hommes sont philosophes
- E universelle négative aucun homme n'est immortel
- O particulière négative : tous les hommes ne sont pas philosophes : Le pas tous n'est pas lexicalisé, mais on peut dire Certains hommes ne sont pas philosophes.

5. Aristote — Stoïciens, Avicenne, Averroes, Dun Scott, Ockham...

Syllogismes par ex : Baroco (A O O)

tout parisien est pressé,

or certains conducteurs ne sont pas pressés,

donc certains conducteurs ne sont pas parisiens

5. Principes *(suite)*

identité : tout A est A

non contradiction : $\neg(p \wedge \neg p)$

Réponse d'Avicenne à certains religieux s'opposant à ce principe : "Tout personne niant le principe de non contradiction devrait être battue et brulée jusqu'à ce qu'elle admette qu'être battu n'est pas la même chose que ne pas être battu, et qu'être brulé n'est pas la même chose que ne pas être brûlé".

tiers exclus $p \vee \neg p$ (remis en cause par l'intuitionnisme, car il produit des preuves non constructives)

6. Quelques notions qui restent pertinentes

Jusqu'à la fin du Moyen-Âge,
logique = scientia sermocinalis (science du langage — Dun Scott, Ockham)

Modalités : il est nécessaire que / il est possible que

Sens et dénotation (Frege, voire Abélard)

L'étoile du matin (Vénus)
L'étoile du berger. (Vénus)

Même dénotation mais "sens" différent. (Attention : "sens" non subjectif.)

6. Quelques notions qui restent pertinentes *(suite)*

Ambiguïté par exemple de portée mais aussi de sens

J'ai fini mon livre.

Il regarde quelqu'un avec des lunettes noires.

Les enfants prendront une pizza. (Une chacun, une pour tous.)

Pierre aime sa femme. Jean aussi.

Prédicats vagues (bleu : turquoise est encore bleu ou déjà vert ?)

Mots **catégorématiques** (termes d'Aristote) / **synta-catégorématiques** : tous, aucun, si, non, etc.

6. Quelques notions qui restent pertinentes *(suite)*

Suppositio d'un terme : sens en contexte

- propre
  - Vélo a quatre lettres
  - Un vélo lui a été offert.
- impropre (métaphore, métonymie etc.)
  - Un vélo est pratique à Bordeaux.
  - Son vélo est crevé.

Querelle des universaux Un terme général n'est-il qu'un nom, une sorte abréviation pour tous les individus qui tombent sous ce concept (nominalisme) ou a-t-il une existence propre (réalisme) ?

6. Quelques notions qui restent pertinentes *(suite)*

Lecture **de dicto** et **de re** (Thomas d'Aquin, Ockham)

– James Bond croit qu'un chercheur de l'IMB est un espion.

– Il a vu Gilles refermer son tiroir. (de re)

– Il a trouvé un code sur un papier qui traînait. (de dicto)

Portée du "il existe"

7. Leibniz

Nos pensées sont composées à partir d'un petit nombre de pensées simples, qui sont l'alphabet de la pensée.

Logique comme un calcul (décomposer pour vérifier) algébrisation Boole, De Morgan

Egalité de Leibniz : si on peut dans chaque proposition remplacer x par y en préservant la vérité, $x = y$.

Mondes possibles (auparavant Al Farabi et Averroes) : "notre monde est le meilleur des mondes possibles" (je cite....).

8. Frege

Logicisme (réduction de l'arithmétique à la logique, et si possible de tout)

Formalisme : calcul des prédicats, formules, théorie naïve des ensembles.

Les formules suivantes, indiscernables chez Boole avec les classes deviennent distinguables.
$\forall x[I(x) -> (E(x) v A(x))]$
$\forall x(I(x) -> E(x)) v \forall x(I(x) -> A(x))$

8. Frege *(suite)*

Ambiguïté de portées écrites convenablement :

$\forall x[girl(x) - > \exists y(boy(y) \& kissed(x, y))]$

$\exists x[boy(x) \forall y(girl(y) - > kissed(y, x))]$

Théorie naïve des ensembles : paradoxe de Russell

$X = \{u | u \notin u\}$ question $X \in X$?

Zermelo il faut toujours restreindre à un ensemble : $X = \{u \in Y | P(x)\}$

9. Logique mathématique : langage, modèles, preuves

Formules : Frege
Preuves formelles : Frege (tentative inconsistante) Hilbert, Herbrand, Gentzen
Modèles : Löwenheim, Skolem, Tarski, Herbrand
Théorie des ensembles Zermelo, Fraenkel, Gödel,
Ces théories et structures peuvent elles rendre compte de la signification d'une phrase ?

10. Que signifie un discours, une phrase

Divers point de vue, qui ne s'excluent pas forcément :
- contenus mentaux suscités par les signes (Locke, Berkeley, Hume)
- **conditions de vérité (Frege, Tarski, Davidson)**
- usage, interaction, (2e Wittgenstein, Searle, Brandom,...)
- **interprétation dans le monde (Putnam, Kripke)**
- méthode de vérification / réfutation (Quine)
- pragmatisme (effet du dire sur l'environnement) (Peirce)

11. Logique propositionnelle

Formules

propositions atomiques p_i

connecteurs usuels, $AetB$, ou, implique $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \& B$, $A \vee B$,....

Preuves (sous hypothèse $A, B, C \vdash D$)

$$\dfrac{\begin{matrix}\ldots\ldots[A]\ldots[A]\ldots A\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B}\Rightarrow_i$$ certains A ne sont plus des hypothèses

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A \Rightarrow B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ A\end{matrix}}{B}\Rightarrow_e$$

12. Si on n'aime pas les arbres...

$$\vec{x} : \Gamma \vdash f : A \Rightarrow B \qquad \vec{y} : \Delta \vdash u : Af(a) : B \Rightarrow_e$$

$$\dfrac{\dfrac{\vec{x} : \Gamma, z : A, z : A, z : A \vdash t : B}{\vec{x} : \Gamma, z : A \vdash t : B}\, contr.}{\vec{x} : \Gamma \vdash (\lambda z : At) : A \Rightarrow B}\Rightarrow_i$$

axiome si A alors A.... $x : A \vdash x : A$.

Pour avoir la logique usuelle : ajouter comme axiome $A \vee \neg A$ pour tout A, le tiers exclu.

13. Modèles

Modèles : un modèle est le choix, pour chaque proposition atomique d'une valeur de vérité.

On tout très bien n'en avoir que 2, vrai et faux.

Une formule démontrable est vraie dans tout modèle : ouf !

Théorème de complétude une formule vraie dans tout modèle est démontrable : la déduction capte exactement ce qu'on arrive à faire par les valeurs de vérité.

14. Logique propositionnelle modale — S4

$\Box$: il est nécessaire que

$\Diamond$: il est possible que

Il faut des axiomes qui gèrent les modalités (Carnap)

$$\Diamond p \equiv \neg\Box\neg p$$

$$\Box p \equiv \neg\Diamond\neg p$$

$$\Box p \rightarrow p$$

$$\Box p \rightarrow \Box\Box p$$

14. Logique propositionnelle modale — S4 *(suite)*

Modèle (Kripke) : famille de modèles indexés par un ensemble I muni d'une relation transitive et réflexive d'accessibilité.

Etre vrai dans w se défini par induction sur la formule, comme on l'imagine, mais pour $\Box$ et $\Diamond$ la vérité dans un monde dépend de ce qui se passe dans d'autres mondes (on parle de phénomènes intentionnels) :

$\Diamond A$ est vrai dans le monde w lorsqu'il existe un monde w' accessible à partir du monde w dans lequel A est vrai.

$\Box A$ est vrai dans le monde w lorsque tous les mondes w' accessibles à partir du monde w vérifient A.

14. Logique propositionnelle modale — S4 *(suite)*

Pour en revenir au langage, on rend compte ainsi de la modalité

Il est possible que Pierre vienne.

il existe un monde possible atteignable dans lequel Pierre vient.

Théorème de complétude : Les propositions vraies dans tous les modèles sont exactement les propositions démontrables.

15. Calcul des prédicats

Prédicats de base (relations, *n*-aires)

- dormir (unaire)
- quelqu'un regarde quelque chose
- quelqu'un donne quelque chose à quelqu'un (ternaire)
- plus(x,y,z) : $x+y = z$ (ternaire)
- premier(x) x est premier (unaire)
- fois(x,v,u) : le vecteur v fois le scalaire x vaut le vecteur u (ternaire)

15. Calcul des prédicats FOL *(suite)*

Les arguments des prédicats sont des constantes ou des variables.

$\forall x \exists y$
$plus\_grand(x,y) \wedge premier(y) \wedge plus(2,y,z) \wedge premier(z)$

On peut exprimer que *plus* est une fonction :
$\forall x \forall y \exists z plus(x,y,z)$
et $\forall x \forall y \forall z \forall z' plus(x,y,z) \wedge plus(x,y,z') \Rightarrow z = z'$

16. Preuves FOL

Preuves : règles comme ci-dessus et des règles spécifiques pour la quantification :

$$\frac{A(x)}{\forall x\ A(x)}\ \forall_i\text{ – } \textit{si pas de } x \textit{ dans une hypothèse libre}$$

$$\frac{\forall x\ A(x)}{A(u)}\ \forall_e\text{ – } \textit{u est une variable ou une constante}$$

17. Modèles FOL

Ensemble M (où varient les variables !)

Prédicat atomique n-aire : partie de M^n

Il faut fixer la valeur des variables libres pour qu'une formule soit vraie ou fausse (assignation)

$\forall x P(x)$ est vrai si pour toute valeur assignée à x la formule P(x) est vraie

$\exists x P(x)$ est vrai s'il existe une valeur qui, assignée à x, rend la formule P(x) est vraie

18. Modèles FOL

Théorème de complétude (Gödel, Herbrand) : une formule démontrable est vraie dans tout modèle, une formule vraie dans tout modèle est démontrable.

Par exemple : une formule du langage des groupes conséquence des axiomes de groupes sera vraie dans tous les groupes, et, réciproquement, une formule vraie dans tous les groupes est démontrable à partir des axiomes de groupe.

19. Modèles de Kripke

On peut définir des mondes possibles pour le calcul des prédicats, ce qui permet d'interpréter les verbes de croyance :

– Sébastien croit que Chomsky est un informaticien.

est vrai, quand dans tous les mondes où les croyances de Sébastien sont vraies, Chomsky est un informaticien.

20. Modèles de Kripke, suite

Un cas particulier, la logique intuitionniste :

Vous n'ignorez pas les lois. $\not\to$ Vous connaissez les lois.

$\neg\neg p \not\to p$ (mais $p \to \neg\neg p$)

similarité avec la logique modale S4.

Il y a des modèles complets avec des mondes possibles, mais ce qui est amusant c'est qu'on peut les voir comme un faisceau de modèles sur un espace topologique ou une prétopologie.

De nouveau on a un théorème de complétude (preuve récente très élégante d'Ivano Ciardelli, ici présent)

Troisième partie

Des phrases aux formules — dans la logique !

Jusqu'ici des questions sur la signification d'une phrase nous ont conduit à la notion d'interprétation d'une formule....

Certes... mais comment passe-t-on de la phrase à la formule qu'on sait interpréter ?

Cet ordre est étrange, mais c'est ainsi que les choses se sont passées !

Remarques générales

Analyse grammaticale / syntaxique d'une phrase = preuve qu'elle est bien formée.
Structure syntaxique = arbre de preuve

Preuve dans une logique très particulière où on retrouve des catégories, plutôt grammaticales cette fois, mais décalquées sur leur structure logique pour le sens.

Cette partie s'appuie beaucoup sur un livre écrit avec Richard Moot (LaBRI).

21. Calcul de Lambek

Joachim Lambek : algébriste (modules), catégoricien (topos), féru de linguistique, 89 ans et toujours actif !

Catégories de base : S (phrase), n nom commun, np groupe nominal (noun phrase),

Catégories :

$$\mathrm{Lp} \quad ::= \quad \mathrm{P} \mid (\mathrm{Lp}\backslash \mathrm{Lp}) \mid (\mathrm{Lp}/\mathrm{Lp})$$

21. Calcul de Lambek *(suite)*

Catégories :

$$\mathsf{Lp} \quad ::= \quad \mathsf{P} \mid (\mathsf{Lp}\backslash\mathsf{Lp}) \mid (\mathsf{Lp}/\mathsf{Lp})$$

Sens usuel : une suite de mots u de catégorie A suivie d'une suite de mots v de catégories $A\backslash B$ forme une suite uv de catégorie B. [Ajdukiewicz, Bar-Hillel]

Réciproquement, si la succession de deux suite de mots uv est de catégorie B avec u une suite de mots de catégorie A on peut en déduire que la suite de mots v est de catégorie $A\backslash B$. [Lambek]

22. Règles

au moins deux hypothèses

A hypothèse la plus à gauche

$$\dfrac{\begin{array}{c}\ldots [A] \ldots \ldots \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \backslash B}\ \backslash_i \text{ — l'hyp. } A \text{ est annulée}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Delta \\ \vdots \\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ A \backslash B\end{array}}{B}\ \backslash_e$$

au moins deux hyp. libres

A hyp. libre la plus à droite

$$\dfrac{\begin{array}{c}\ldots\ldots[A]\ldots\\ \vdots\\ B\end{array}}{B/A}\,/_i \text{ — l'hyp. } A \text{ est annulée}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ B/A\end{array}\quad\begin{array}{c}\Delta\\ \vdots\\ A\end{array}}{B}\,/_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash A\backslash B}{\Gamma, \Delta \vdash B} \backslash_e \qquad \frac{A, \Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash A\backslash C} \backslash_i \quad \Gamma \neq \emptyset$$

$$\frac{\Delta \vdash B/A \quad \Gamma \vdash A}{\Delta, \Gamma \vdash B} /_e \qquad \frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C/A} /_i \quad \Gamma \neq \emptyset$$

$$\frac{}{A \vdash A}\ axiom$$

Lien avec le groupe libre $A \vdash B$ est démontrable alors $\overline{A} = \overline{B}$ ($\overline{p} = p, \overline{(A\backslash B)} = (\overline{A})^{-1}\overline{B}, \overline{(B/A)} = \overline{B}(\overline{A})^{-1}$ (cela rend $A \vdash B$ symétrique, ce qui n'est syntaxiquement pas vrai, ce n'est pas un modèle complet).

23. Une bien jolie logique !

Complétude pour des modèles algébriques ordonnés simples (catégorie = sous ensemble d'un monoïde). [Buskowski 1982]

Notion de preuve normale, avec propriété de la sous formule. [Lambek 1958]

Normalisation : confluente, en temps linéaire. [Lambek 1958]

Prouvabilité est décidable [Lambek 1958] NP-complète [Pentus 2003]

Sous logique de la logique intuitionniste.

24. Grammaire de Lambek : description d'un langage ou d'une langue

Le lexique (*lex*) associe à chaque mot un nombre fini de catégories. Quel que soit le langage $L(lex)$ les règles ne changent pas, seul le lexique varie.

Une suite de mots $m_1 \cdots m_n$ est dans $L(lex)$ lorsque :

on peut choisir pour chaque mot m_i une des catégories que *lex* lui associe, disons $t_i \in lex(m_i)$

de sorte que le calcul de Lambek montre S à partir de la suite $t_1, \ldots, t_n$

Pour les auditeurs avertis : les langages représentés sont exactement les langages algébriques [conjecture de Chomsky 1963, preuve Pentus 1993]

25. Exemple

Word	Type(s)	Translation
cosa	$(S/(S/np))$	*what*
guarda	(S/inf)	*he/she watches*
passare	(inf/np)	*passing by*
il	(np/n)	*the*
treno	n	*train*

26. Exemple

$$
\dfrac{\dfrac{\text{a}}{np/n} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{very}}{(n/n)/(n/n)} \qquad \dfrac{[n]_\alpha}{n/n}\,/_i{-}\alpha}{n/n}\,/_e \qquad \dfrac{\text{book}}{n}}{n}\,/_e}{np}\,/_e
$$

27. Exemple

word	***syntactic type*** u ***semantic type*** u^* ***semantics :*** λ***-term of type*** u^* x^v ***means that the variable or constant***
some	$(S/(np\backslash S))/n$
statements	n
speak_about	$(np\backslash S)/np$
themselves	$((np\backslash S)/np)\backslash(np\backslash S)$

$$\dfrac{\dfrac{So \vdash (S/(np\backslash S))/n \qquad Sta \vdash n}{So, Sta \vdash (S/(np\backslash S))}\ /_e \qquad \dfrac{SpA \vdash (np\backslash S)/np \qquad Refl \vdash ((np\backslash S)}{SpA, Refl \vdash (np\backslash S)}}{So, Sta, SpA, Refl \vdash S}$$

28. Sémantique de Montague

Représentation des formules logiques comme des lambda termes (termes de preuves de la première partie).

Lexique : catégorie syntaxique u et lambda terme associé de type u^*.

Analyse syntaxique + lexique sémantique $\longrightarrow$ lambda terme $=$ formule $=$ sens !

Mise en œuvre de la compositionnalité (attribuée à Frege).

29. Sémantique de Montague. Types.

Entités : e Valeurs de vérité : t.

$$\mathit{types} ::= e \mid t \mid \mathit{types} \rightarrow \mathit{types}$$

30. Sémantique de Montague. Termes.

- pour chaque type U on se donne une infinité dénombrable de variables et de constantes de type U
- une variable ou une constante x de type U est un terme de type U
- si t est un terme de type $U \longrightarrow V$ et u un terme de type U alors $(t(u))$ est un terme de type V
- si x est une variable de type U et t un terme de type V alors $\lambda x.\ t$ est une terme de type $U \longrightarrow V$. [La fonction qui à xU associe tV qui a priori dépend de x.]

31. Et où qu'il est le calcul avec les lambdas ?

Le calcul du lambda calcul consiste à remplacer la variable par l'argument, lequel est du même type :

$$(\lambda x.\ t)a \overset{\beta}{\rightsquigarrow} t[x := a]$$

Dans le cas typé, cette réduction est localement confluente et termine toujours, par un unique lambda terme.

32. Sémantique de Montague : syntaxe et sémantique.

(Type syntaxique)*	$=$	Type sémantique	
S^*	$=$	t	une phrase est une proposition
np^*	$=$	e	un groupe nominal est une entité
n^*	$=$	$e \rightarrow t$	un nom commun est une partie des entités
$(A\backslash B)^* = (B/A)^*$	$=$	$A \rightarrow B$	s'étend à toutes les catégories d'une grammaire catégorielle

33. Des constantes pour les opérations logiques

Constant	Type
$\exists$	$(e \rightarrow t) \rightarrow t$
$\forall$	$(e \rightarrow t) \rightarrow t$
$\wedge$	$t \rightarrow (t \rightarrow t)$
$\vee$	$t \rightarrow (t \rightarrow t)$
$\supset$	$t \rightarrow (t \rightarrow t)$

34. Des constantes pour les prédicats du langage

La dénotation des mots requiert des prédicats :

aime	$\lambda x \lambda y\ (\text{aime}\ y)\ x$	$x : e,\ y : e, \text{aime} : e \longrightarrow (e \longrightarrow t)$
« aime » est un prédicat binaire		
Garance	$\lambda P\ (P\ \text{Garance})$	$P : e \longrightarrow t,\ \text{Garance} : e$
« Garance » est décrite comme les propriétés de « Garance »		

35. Calcul de la forme logique : recette

1. Insérer sur les feuilles de l'arbre syntaxique les λ-termes fournis pas le lexique, en respectant les applications.
2. Réduire le λ-terme de type t : c'est la forme logique de l'énoncé analysé.

36. Exemple de calcul de forme logique

word	***syntactic type** u* ***semantic type** u^** ***semantics :** λ**-term of type** u^** x_v ***means that the variable or constant** x **is of type** v*
some	$(S/(np\backslash S))/n$ $(e \rightarrow t) \rightarrow ((e \rightarrow t) \rightarrow t)$ $\lambda P_{e\rightarrow t}\ \lambda Q_{e\rightarrow t}\ (\exists_{(e\rightarrow t)\rightarrow t}\ (\lambda x_e(\wedge_{t\rightarrow(t\rightarrow t)}(P\ x)(Q\ x))))$
statements	n $e \rightarrow t$ $\lambda x_e(\mathtt{statement}_{e\rightarrow t}\ x)$
speak_about	$(np\backslash S)/np$ $e \rightarrow (e \rightarrow t)$ $\lambda y_e\ \lambda x_e\ ((\mathtt{speak\_about}_{e\rightarrow(e\rightarrow t)}\ x)y)$
themselves	$((np\backslash S)/np)\backslash(np\backslash S)$ $(e \rightarrow (e \rightarrow t)) \rightarrow (e \rightarrow t)$ $\lambda P_{e\rightarrow(e\rightarrow t)}\ \lambda x_e\ ((P\ x)x)$

37. Exemple de structure syntaxique

La syntaxe fournit un λ-terme de ce genre :

$$((\mathit{some\ statements})\ (\mathit{themselves\ speak\_about}))$$

de type $S^* = t$

38. Calcul...

$$\Big((\lambda P_{e\to t}\ \lambda Q_{e\to t}\ (\exists_{(e\to t)\to t}\ (\lambda x_e(\wedge(P\ x)(Q\ x)))))$$
$$(\lambda x_e(\mathtt{statement}_{e\to t}\ x))\Big)$$
$$\Big((\lambda P_{e\to(e\to t)}\ \lambda x_e\ ((P\ x)x))$$
$$(\lambda y_e\ \lambda x_e\ ((\mathtt{speak\_about}_{e\to(e\to t)}\ x)y))\Big)$$

$$\downarrow \beta$$

$$(\lambda Q_{e\to t}\ (\exists_{(e\to t)\to t}\ (\lambda x_e(\wedge_{t\to(t\to t)}(\mathtt{statement}_{e\to t}\ x)(Q\ x)))))$$
$$(\lambda x_e\ ((\mathtt{speak\_about}_{e\to(e\to t)}\ x)x))$$

$$\downarrow \beta$$

$$(\exists_{(e\to t)\to t}\ (\lambda x_e(\wedge(\mathtt{statement}_{e\to t}\ x)((\mathtt{speak\_about}_{e\to(e\to t)}\ x)x))))$$

39. Résultat

Sous une forme plus agréable :

$$\exists x : e\ (\texttt{statement}(x)\ \wedge\ \texttt{speak\_about}(x, x))$$

Avec un lexique très structuré on passe d'une phrase à une formule logique représentant son sens.

Mais c'est un peu trop simple, non ? Il n'y a aucun moyen dans ce processus pour relier les sens entre eux et pour les adapter au contexte. Cela donne des formules logiques pas assez subtiles.

Il avoir falloir prendre en compte les catégories, structurer les mots, en une ontologie de la langue pour faire mieux.

Quatrième partie

Comment adapter le sens des mots au contexte ?

On est souvent amené à sélectionner un des sens particulier d'un mot, à le restreindre ou à le généraliser. Ces différents aspects peuvent être compatibles ou non....

Ici on présente une modélisation relativement personnelle, mais elle fait partie d'une famille de travaux en ce sens (Pustejovsky, Asher, Cooper, Lappin, Zhao-Lui,...) qui visent à rendre compte en théorie des types des glissements de sens.

Ce point de vue à été développé avec Bruno Mery, Christian Bassac, Richard Moot, Laurent Prévot, et une petite implémentation existe, due à Emeric Kien.

Cela répond en partie à des questions soulevées dans la première partiesur le lien entre l'ontologie (de la langue pour nous) et la structure logique, la prédication (Aristote, Porphyre, Avicenne, ...)

40. Prédication sur une des facettes d'un mot

(1) Un livre lourd.

(2) Un livre intéressant.

(3) Le dîner a duré des heures.

(4) Le dîner est délicieux.

(5) Marseille bat parfois Bordeaux.

(6) Marseille est un grand port.

(7) Washington borde le Potomac.

(8) Washingon envoie des troupes en Afghanistan.

(9) Un délicieux saumon.

(10) Un saumon rapide.

41. Coprédication sur plusieurs facettes d'un même mot

La prédication simultanée sur plusieurs facettes est plus ou moins heureuse :

(11) Un livre lourd mais intéressant.

(12) Une ville portuaire et cosmopolite.

(13) Le dîner était délicieux mais a duré des heures.

(14) ? Un saumon rapide mais délicieux.

(15) ? Marseille est un grand port et bat parfois Bordeaux.

(16) ? Washington borde le Potomac et envoie des troupes en Afghanistan.

42. Glissement de sens : voyageur fictif

Exemple du corpus Itipy :

(17) (...) cette route monte jusqu'à Lux où l'on arrive par une jolie avenue de peupliers.

(18) (...) cette route qui monte sans cesse pendant deux heures

(19) Le chemin monte (...) *Non extrait du corpus, mais similaire, et plus rapide à traiter ci-après.*

Le dernier nécessite de considérer un voyageur pour décrire l'événement.

43. Extensions : une logique multisorte, TY_n

Le type e des entités est divisé en plusieurs sortes :

TY_n extension sans surprise,

il s'agit d'une ontologie plate : événements, objets, concepts, ...

mais comme le seul connecteur est $\longrightarrow$, les réunions et intersections posent des problèmes (surmontables).

44. Extension : types du second ordre (Système F, Girard)

Variables de type et quantification sur les type.

– Types de base : constantes e and t, ainsi que des variables de type α in P.

– Quand T est un type et α une variable de type variable présente ou non dans T, $\Lambda\alpha.\ T$ est un type.

– Quand T_1 et T_2 sont des types, $T_1 \longrightarrow T_2$ est aussi un type.

45. Extension : termes du second ordre (Système F, Girard)

«$t : U$» signifie «*t est un terme de type U*»

– Une variable ou une constante de type T c.-à-d.$x : T$ or x^T est un *terme* de type T.

On dispose d'une infinité de variables de chaque type.

– $(f\ \tau)$ est un terme de type U quand $\tau : T$ et $f : T \to U$.

– $\lambda x^T.\ \tau$ est un terme de type $T \to U$ quand $x : T$ et $\tau : U$.

– $\tau\{U\}$ est un terme de type $T[U/\alpha]$ quand $\tau : \Lambda\alpha.\ T$ et U est un type.

– $\Lambda\alpha.\tau$ est un terme de type $\Lambda\alpha.T$ quand α est une variable de type et $\tau : T$ est un terme sans variable libre de type α.

46. Extension : β-réduction au second ordre.

La réduction est définie comme suit :

– $(\Lambda\alpha.\tau)\{U\}$ se réduit en $\tau[U/\alpha]$

(α et U sont des **types**).

– $(\lambda x.\tau)u$ se réduit en $\tau[u/x]$ (réduction habituelle).

Lorsque les constantes décrivent un langage logique, les λ-termes clos et normaux de type t correspondent à des formules logiques.

47. Exemple du second ordre : la coordination

Étant donnés deux prédicats $P^{\alpha \to t}$ et $Q^{\beta \to t}$
sur des sortes respectives α et β
quand on a deux modifications de ξ vers α et vers β
on peut coordonner des objets de type ξ :
$\Lambda \xi \lambda x^{\xi} \lambda f^{\xi \to a} \lambda g^{\xi \to b}.(and\ (P\ (f\ x))(Q\ (g\ x)))$

On peut même le faire pour tous les prédicats P, Q et les types α, β auxquels ils s'appliquent :
$\Lambda \alpha \Lambda \beta \lambda P^{\alpha \to t} \lambda Q^{\beta \to t} \Lambda \xi \lambda x^{\xi} \lambda f^{\xi \to \alpha} \lambda g^{\xi \to \beta}.$
$(\mathrm{and}\ (P\ (f\ x))(Q\ (g\ x)))$

48. Notre organisation du lexique

– Rester dans un cadre montagovien et compositionnel (mais sans modèles)

– Autoriser la tête et ses complément à contribuer au sens d'un composé.

– Intégration possible dans la sémantique discursive (λ-DRT).

On propose un système basé sur des *modifications optionnelles*.

49. Les types

– Composition montagovienne : type et ordre des arguments.
– Hiérarchie de concepts issue du lexique génératif.
– Des types différents pour les différentes facettes du sens.
– Une sorte d'ontologie décrit les relations de spécialisation.

Type du second ordre, système F, pour les modifications sur des types génériques :

$$\Lambda\alpha\lambda x^{A} y^{\alpha} f^{\alpha\to R}.((\mathrm{read}^{A\to R\to t}\ x)\ (f\ y))$$

50. Les termes : le terme principal, standard

- Un λ-terme standard est rattaché au sens principal.
- Pour la structure logique et compositionnelle.
- Contient le typage, sa sous catégorisation.
- Inclut des créneaux pour les modifications optionnelles $\Lambda\alpha\beta\lambda x^{\alpha}y^{\beta}f^{\alpha\rightarrow A}g^{\beta\rightarrow F}.((\mathsf{eat}^{A\rightarrow F\rightarrow t}\ (f\ x))\ (g\ y))$
- Ce peut aussi être une simple constante Paris^{T}

51. Les termes : modifications optionnelles

- Chacun est une fonction à un argument.
- Utilisée ou non pour adapter prédicat et argument.
- Avec une contrainte : *rigide*, $\varnothing$
- $\left(\dfrac{Id^{F\to F}}{\varnothing}, \dfrac{f_{grind}^{Living\to F}}{rigid}\right)$
- $\left(\dfrac{Id^{T\to T}}{\varnothing}, \dfrac{f_{L}^{T\to L}}{\varnothing}, \dfrac{f_{P}^{T\to P}}{\varnothing}, \dfrac{f_{G}^{T\to G}}{rigid}\right)$

52. Une entre lexicale complète

Chaque lexème se trouve associé à n-uplet de ce genre :

$$\left(\mathrm{Paris}^T, \frac{\lambda x^T.\ x^T}{\varnothing}, \frac{\lambda x^T.(f_L^{T\to L}\ x)}{\varnothing}, \frac{\lambda x^T.(f_P^{T\to P}\ x)}{\varnothing}, \frac{\lambda x^T.(f_G^{T\to G}\ \ldots}{rigid}\right.$$

53. Utilisation RIGIDE (et non flexible) des modifications optionnelles

Conflit de type : $(\lambda x^V.\ (P^{V\to W} x))\tau^U$

$$(\lambda x^V.\ (P^{V\to W} x))\ (f^{U\to V} \tau^U)$$

f : modification optionnelle associée à P ou à τ

f **est appliquée une fois à l'argument** and non à chacune des occurences de x du corps de la fonction.

Une conjonction donne $(\lambda x^V.\ (\wedge\ (P^{V\to W} x)\ (Q^{V\to W} x))\ (f^{U\to V} \tau$ l'argument est uniformément transformé.

Le second ordre n'est pas utilisé, le type V de l'argumen-test connu et reste le même pour toutes les occurrences de x.

54. Utilisation FLEXIBLE (et non rigide) des modifications optionnelles

$$(\lambda x^{?}.\ (\cdots(P^{A\to X}x^{?})\cdots(Q^{B\to Y}x^{?})\cdots)\tau^{U}\ :$$

conflits de types [Montague : $? = A = B$ e.g. $e \to t$]

$$(\Lambda\xi.\lambda f^{\xi\to A}.\lambda g^{\xi\to B}.\ (\cdots(P^{A\to X}(fx^{\xi}))\cdots(Q^{B\to Y}(gx^{\xi}))\cdots))$$
$$\{U\}\ f^{U\to A}\ g^{U\to B}\ \tau^{U}$$

f, g : modifications optionnelles associées à P ou à τ.

Pour toute occurrence de x : types $A, B, \ldots$ et fonctions $f, g, \ldots$ possiblement différents pour chaque occurrence.

55. Le système F à l'œuvre dans la flexibilité

Typage du second ordre :

1) anticipe le type encore inconnu de l'argument

2) factorise les types différents des fonctions pour les différentes occurrences de l'argument.

Le type $\{U\}$ et les modifications associées f sont inférés du terme usuel $(\lambda x^V.\,(P^{V\to W}x))\tau^U$.

56. Le comportement standard est conservé (ouf !)

ϕ : objets physiques

petite pierre

$$\overbrace{(\lambda x^{\varphi}.\ (\mathsf{small}^{\varphi\rightarrow\varphi} x))}^{\text{small}}\ \overbrace{\tau^{\varphi}}^{\text{stone}}$$

$$(\mathsf{small}\ \tau)^{\varphi}$$

57. Accès aux qualia

Pour revenir à Aristote :

un sourire songeur et aimant

$$\overbrace{(\lambda x^{P}.\ (\mathsf{and}^{t\to(t\to t)}\ (\mathsf{wondering}^{P\to t}\ x)\ (\mathsf{loving}^{P\to t}\ x)))}^{\text{wondering, loving}}\ \overbrace{\tau^{S}}^{\text{smile}}$$

$$(\lambda x^{P}.\ (\mathsf{and}^{t\to(t\to t)}\ (\mathsf{wondering}^{P\to t}\ x)\ (\mathsf{loving}^{P\to t}\ x))))(f_a^{S\to P}\tau^{S}$$

$$(\mathsf{and}\ (\mathsf{loving}\ (f_a\ \tau))\ (\mathsf{loving}\ (f_a\ \tau)))$$

58. Facettes (dot-objects) : coprédications incorrectes

La condition de rigidité bloque les coprédications $f_g^{Fs \to Fd}$ et ne peut être utilisée comme modification **rigide** dans :

(? ?) *The thon que nous avons mangé hier était vif comme l'éclair et délicieux.*

Une description plus fine devrait prendre en considération la structure syntaxique (propositions relatives, complétives,...), mais aussi le temps, l'aspect,...

59. Facettes : coprédications correctes. Exemple 1/3

V ville L lieu P personnes

$f_p^{V \to P}$ $f_l^{V \to L}$ C^V Copenhague

Copenhague est un port et une capitale cosmopolite.

60. Facettes, coprédication correctes. Exemple 2/3

Conjonction de $cospl^{P\rightarrow t}$, $\mathrm{cap}^{V\rightarrow t}$ et $port^{L\rightarrow t}$, on C^{V}

Si $V=P=L=e$, (Montague) $(\lambda x^{e}(\mathrm{and}^{t\rightarrow(t\rightarrow t)}((\mathrm{and}^{t\rightarrow(t\rightarrow t)}$ (cc

Ici on a un ET entre trois prédicats portant sur des sortes différentes $P^{\alpha\rightarrow t}$, $Q^{\beta\rightarrow t}$, $R^{\beta\rightarrow t}$

$$
\begin{array}{l}
\Lambda\alpha\Lambda\beta\Lambda\gamma \\
\quad \lambda P^{\alpha\rightarrow t}\lambda Q^{\beta\rightarrow t}\lambda R^{\gamma\rightarrow t} \\
\qquad \Lambda\xi\lambda x^{\xi} \\
\qquad\quad \lambda f^{\xi\rightarrow\alpha}\lambda g^{\xi\rightarrow\beta}\lambda h^{\xi\rightarrow\gamma}. \\
\qquad\qquad (\mathrm{and}(\mathrm{and}\,(P\,(f\,x))(Q\,(g\,x)))(R\,(h\,x)))
\end{array}
$$

f, g et h transforment x dans des types **différents**.

61. Facettes, coprédication correctes. Exemple 3/3

ET appliqué à P, V, L avec $cospl^{P\rightarrow t}, cap^{V\rightarrow t}, \mathrm{port}^{L\rightarrow t}$ donne :

$$\Lambda\xi\lambda x^{\xi}\lambda f^{\xi\rightarrow\alpha}\lambda g^{\xi\rightarrow\beta}\lambda h^{\xi\rightarrow\gamma}.$$
$$(\mathrm{and}(\mathrm{and}\ (cospl^{P\rightarrow t}\ (f_p\ x))(cap^{V\rightarrow t}\ (f_t\ x)))(\mathrm{port}^{L\rightarrow t}\ (f_l\ x)))$$

On peut maintenant appliquer ce terme au type V et aux modifications fournies par le lexique. Comme $cap^{V\rightarrow t}$ ne pose aucun problème on utilise l'identité $id^{V\rightarrow V}$. Pour L et P on utilise les modifications correspondantes, f_p et f_l.

$$(\mathrm{and}^{t\rightarrow(t\rightarrow t)}$$
$$(\mathrm{and}^{t\rightarrow(t\rightarrow t)}$$
$$(\mathrm{cospl}(f_p\ C^V)^P)^t)(\mathrm{cap}(\mathrm{id}\ C^V)^V)^t)^t(\mathrm{port}\ (f_l\ C^V)^L)^t)^t$$

62. Du chemin au voyageur fictif

Exemple du corpus Itipy :

(20) (...) cette route monte jusqu'à Lux où l'on arrive par une jolie avenue de peupliers.

(21) (...) cette route qui monte sans cesse pendant deux heures

(22) Le chemin monte (...) *Non extrait du corpus, mais similaire, et plus rapide à traiter ci-après.*

Dans 20 : possiblement statique,

Dans 21 il faut un voyageur qui suit cette route, *pendant deux heures*.

Ce n'est pas forcément le narrateur.

63. Idée générale

Encore un glissement de sens pour résoudre un conflit de types différent :

$$\left(P^{humain \rightarrow t}\left(u^{voie}\right)\right) \qquad humain \neq voie$$

Clairement, c'est u^{voie} qui produit un x^{humain}, mais si u restait argument de P devenu *humain*, deux problèmes :

1. D'une part, le quantificateur correspondant au voyageur fictif ne pourrait avoir la portée sur le prédicat.
2. D'autre part les propriétés du chemin, comme par exemple, *goudronné*, deviendraient des propriétés du voyageur fictif ![1] *la route agréable* ne pose pas de problème : il y a aussi une variable d'événement.

1. Ce qui est rarement le cas, hormis chez Morris et Goscinny !

64. Type raising — montée de type

voie type raising $(voie \longrightarrow t) \longrightarrow t$, transformé en $(humain \longrightarrow t) \longrightarrow t$.

On retrouve Leibniz : une voie est vu comme l'ensemble des propriété vraies de cette voie.

Cette transformation non avec t mais avec $t' := v \longrightarrow t$.

le :$\Lambda\alpha\lambda P^{\alpha\rightarrow t}(\tau^{(\alpha\rightarrow t)\rightarrow\alpha}\ P)$

— pour toute propriété des objets de type α, *le* en choisit un qui la satisfait, déterminé par le contexte.

chemin : $\lambda x^{voie} chemin(x)$

(le chemin) :

$$((\Lambda\alpha\lambda P^{\alpha\rightarrow t}(\tau^{(\alpha\rightarrow t)\rightarrow\alpha}\ P))\{voie\}\ \lambda x^{voie} chemin(x)))$$
$$=_\beta (\lambda P^{voie\rightarrow t}(\tau^{(voie\rightarrow t)\rightarrow voie}\ P))\lambda x^{voie} chemin(x)))$$
$$=_\beta (\tau\ \lambda x^{voie} chemin(x)) : voie$$
$$\Rightarrow \lambda P^{voie\rightarrow v\rightarrow t}\lambda e^{v}(P\ (\tau\ \lambda x^{voie} chemin(x))\ e)$$

(*montée de type*)

h : $\lambda Q^{(voie \rightarrow v \rightarrow t) \rightarrow v \rightarrow t} \lambda P^{humain \rightarrow v \rightarrow t}$
$(Q\,(\lambda c^{voie} \lambda e^{v} \quad \forall(\lambda v^{humain}\; suivre(e, v, c) \Rightarrow ((P\; v)\; e))))$
$(coercion\ de\ type)$

(h (le chemin)) :
$((\lambda Q^{(voie \rightarrow v \rightarrow t) \rightarrow v \rightarrow t} \lambda P^{humain \rightarrow v \rightarrow t}$
$(Q\,(\lambda c^{voie} \lambda e^{v} \quad \forall(\lambda v^{humain}\; suivre(e, v, c) \Rightarrow ((P\; v)\; e)))))$
$(\lambda P^{voie \rightarrow v \rightarrow t} \lambda e^{v} (P\ (\tau\ \lambda x^{voie} chemin(x))\ e)))$

$=_{\beta} \lambda P^{humain \rightarrow v \rightarrow t} \lambda e^{v}$
$\forall(\lambda y^{humain} suivre(e, y, (\tau\, \lambda x^{voie} chemin(x))) \Rightarrow ((P\, x)\; e))$

monte : $\lambda x^{humain} \lambda e^{v}\, monte(e, x)$

((h (le chemin)) monte) :

$((\lambda P^{humain \to v \to t} \lambda e^{v}$

$\forall(\lambda y^{humain} \mathit{suivre}(e, y, (\tau\, \lambda x^{voie} \mathit{chemin}(x))) \Rightarrow ((P\, x)\, e)))$

$(\lambda x^{humain} \lambda e^{v} \mathit{monte}(e, x)))$

$=_{\beta} \lambda e^{v} \forall(\lambda y^{humain}$

$\mathit{suivre}(e, y, (\tau\, \lambda x^{voie} \mathit{chemin}(x))) \Rightarrow \mathit{monte}(e, y))$

Modifieurs comme *pendant deux heures* ou *pendant trois kilomètres* : de manière usuelle.

65. Comptage, quantification et individuation — Situation

Une étagère.
– Trois exemplaires de *Madame Bovary*.
– Deux exemplaires de *L'éducation sentimentale*.
– Les romans de Flaubert en un volume (*L'éducation sentimentale, Madame Bovary, Bouvard et Pécuchet*)
– Un volume comprenant *Trois contes : Un coeur simple, La légende de Saint-Julien, Salammbô*
– Un exemplaire de la *Correspondance* en deux volumes.

66. Comptage et Individuation — Questions

– J'ai monté tous les livres au grenier.
– En effet, je les avais déjà lus.

– Combien de livres ai-je portés ?
– Combien de livres ai-je lus ?

(Au passage, attention : *book*$\neq$*livre*)

67. Comptage et Individuation — Solution

Résolu par des projections

on compte **aprés** les modifications appropriées,

les pronoms renvoient au groupe nominal **avant** modification.

$$\forall \lambda x(\Rightarrow (in\_biblio^{livre}(f(x)))(\&(brul\acute{e}^{\phi \to t}(g(x)))(lu^{l \to t}(h(x)))))$$

68. Résumé des principes de notre modèle

Compositionnalité, petits et grands lambdas :
– λ du premier ordre : composition usuelle.
– Λ du second ordre : polymorphisme, souplesse.
– Créneaux : engendrent toutes les combinaisons possibles de modifications.

69. Système F

- Inconvénient(s) du système F
  - imprédicativité qui peut faire peur
  - pas de sous typage.
- Avantage du système F :
  - simplicité syntaxique,
  - assez restreint : second ordre, pas plus, pas de types dépendants (capacité expressive arithmétique intuitionniste du second ordre)
  - un quantificateur pour tous les types
  - instanciation : types atomiques, fonctions (j'ai mangé mon crédit), types élevés correspondants

Quel fragment du système F avec sous typage ?

70. Langage logique : usuel

- Formules usuelles de la logique d'ordre supérieur.
- Pas de modalités.
- Pas de connecteurs étranges, par exemple linéaires.

71. Critiques

– La solution avec des produits (des couples) impose $\langle p_1(u), p_2(u) \rangle = u$ (très discutable)
– (solution d'Asher, produits fibrés) relation trop forte entre la structure du type et les modifications
– (la nôtre) aucune relation entre la structure du types et les modifications

72. Dictionnaire et univers du discours — retour au Moyen-Âge !

Système conceptuel $\neq$ lexique

Ambigüité fondamentale. Que décrit-on ?

– l'univers du discours une ontologie

– ou l'ontologie linguistique du dictionnaire

« *Une roue de ma voiture est crevée.* » peut se dire :

(23) Ma voiture est crevée.

(24) J'ai crevé.

En revanche, la langue n'autorise pas :

(25) * Ma voiture est bouchée. (carburateur ? durite ?)

(26) * Ma voiture est à plat. (batterie ?)

73. Variation linguistique

Chaque langue accède différemment aux facettes.

Ces exemples et les comparaisons entre langues montrent qu'il faut distinguer l'univers de la langue.

La langue agit comme un filtre idiosyncratique sur l'univers et notre modèle en rend compte.

Une langue crée aussi des connexions spécifiques (captivus : cattivo, chétif — morbus : morbide, morbido) : rien n'est là pour modéliser la diachronie.

74. Alternative linéaire pour lier types et termes

Produit monoïdal «$\otimes$» et opérateur de duplication «!»

– $A \otimes B$

– $\langle p_1(u), p_2(u) \rangle \neq u$

– sans modifications canoniques

– mais la modification est reliée à la structure du type : $f : (A \otimes B) \multimap A$

– Internalisation des contraintes sur les modifications dans la structure même des types linéaires ;

modification rigide, irréversible type linéaire :

$$A \multimap U \quad [A, A \multimap U \not\vdash U \otimes A]$$

modification flexible, réutilisable type linéaire : $A \Rightarrow B =$

$$(!A) \multimap U \quad [(!A), (!A) \multimap U \vdash U \otimes (!A)]$$

Cinquième partie

Conclusion

On se rend compte que les questions entre logique et linguistique issues de l'Antiquité et du Moyen-Âge restent très pertinentes, et que la logique mathématique n'a toujours pas toutes les bonnes réponses.

75. Côté syntaxe

Coté syntaxe : le calcul de Lambek est trop restreint (hors contexte), et pour garder la correspondance avec le sens plusieurs directions sont possibles :

– garder les preuves comme structures syntaxiques : grammaires catégorielles multimodales avec des postulats en plus des règles (Moortgat, Moot)

– formalismes à deux étages : structure profonde dont on dérive une structure de surface : lambda grammars (Muskens, 1995), grammaires minimalistes catégorielles (Lecomte Retoré 1999), grammaires catégorielles abstraites (de Groote 2001), grammaire de dépendances catégorielles (Dikovsky 2001),...

76. Côté sémantique

Coté sémantique, afin de régler les problèmes comme ceux évoqués, mais aussi les problème de références (comment ne pas croire que Tullius est Cicéron, si ce sont des constantes logiques), la logique catégorique (théorie des catégories pour la logique, modèles généralisés) ouvre des perspectives prometteuses (workshops à Oxford et à Bordeaux en novembre 2010). Asher, Lappin, Pollard, Zhao-Lui,..