Modèles géométriques de la logique linéaire

Géométrie algébrique et théorie de la démonstration

Applications: spécification vérification, calculs de processus, linguistique informatique, représentation des connaissances

Jean Gillibert (IMB A2X)
Christian Retoré (LaBRI MF Info & Ling / INRIA Signes)

plus d'autres vocations à susciter

P. Castéran LaBRI, A. Cadoret IMB, … IMB A2X GAA et LABRI MF

Applications LABRI INRIA Signes, LABRI Vérif, IDC

Idée toute nouvelle, encore très prospective

Le cas bien connu: modèles de la logique classique

- Axiomes de groupe
  - Associativité, Elément neutre, Inverses
  - Formules de la logique du premier ordre
- Modèle: un groupe
- Une conséquence des axiomes de groupe est vraie dans tous les modèles groupes et vice-versa (complétude)

Logique intuitionniste
Quels modèles?

- Logique constructive (sans tiers exclu)
- Tout ce qui est démontrable sans tiers exclu est vrai dans tout groupe
- Mais certaines propriétés vraies dans tous les groupes ne sont pas démontrables.

Faisceaux, topos: modèles géométriques de la logique intuitionniste

- Plutôt qu'un modèle, une famille de modèles:
  espace topologique sur X,
  un groupe F(U) par ouvert U,
  condition de restriction et de recollement,
  P vrai si P vrai dans F(X) --- la vérité de P dans F(U) dépend de la vérité de F(V) pour des V < U
  (généralise et structure les modèles de Kripke)
- Modèle intuitionniste des axiomes de groupe = faisceau de groupes
- Topos catégorie des faisceaux sur un espace topologique donné
- Vrai dans tout faisceau équivaut à démontrable en logique intuitionniste

Logique linéaire

- Raffinement de logique intuitionniste:
  A=>B = !A ---o B
  deux conjonctions: produit, produit monoïdal
- Logique de la programmation
- *Proofs-as-programs:* évaluation optimale des programmes fonctionnelle typée (programme = preuve en logique intuitionniste)
- *Proof-search-as-computation:*
  calculs de processus
  analyse syntaxique et sémantique de phrases du langage naturel

Logique linéaire du premier ordre

- Très utile comme spécification
  - Calculs de processus
  - Langage naturel, représentation des connaissances dans un système de types raffinant l'habituelle logique intuitionniste (par ex. facettes indissociables: *livre objet/contenu*)
- Premier ordre: quantification du les individus (second ordre: quantification sur les propriétés, aucun problème)
- « bons » modèles statiques:
  - Complétude (démontrable =universellement vrai)
  - Non *ad hoc*, pas un modèle syntaxique
  - Instructif, bénéficiant de propriétés intrinsèques
- [Modèles dynamiques de la logique linéaire: ok et compatibles avec ces modèles statiques]

Quels modèles pour la logique linéaire du premier ordre

- OBJECTIF: trouver et étudier de bons modèles pour la logique linéaire du premier ordre par raffinement des modèles géométriques de la logique intuitionniste
- APPLICATIONS:
  logique linéaire comme système de typage
  - sémantique du langage naturel et représentation des connaissances
  - spécification de programmes et de processus concurrents

- Autres équipes et projets concernés
  - Preuves Programmes Systèmes CNRS Paris 7
    Thomas Ehrhard, Paul-André Melliès
  - Institut de Mathématiques de Luminy
    CNRS Aix-Marseille II
    Myriam Quatrini, Yves Lafont, Jean-Yves Girard
  - IRIT CNRS Toulouse 3 Nicholas Asher
  - GDR SHS sémantique et modélisation (~12 sites)
  - ARC INRIA Cauld (Nancy, Bordeaux, Paris, Toulouse)
  - ANR Prélude (Nancy, Bordeaux, Marseille, Paris)
- Quelques références

  - S. MacLane et I. Moerdijk Sheaves in geometry and logic, Springer 1993
  - J. Lambek et Ph. Scott Introduction to higher ordre categorical logic, Cambridge University Press 1998
  - Jean-Yves Girard Linear logic Theoretical Computer Science, vol 50(1) 1987, pp. 1—102
  - Jean-Yves Girard Le point aveugle Tomes I et II Masson 2006