CO-GRAPHES COUPLAGES ET PREUVES EN LOGIQUE LINÉAIRE

Journée « preuves » LIRMM vendredi 4 juin

Christian Retoré LIRMM Texte Univ. Montpellier CNRS

LOGIQUE LINÉAIRE MULTIPLICATIVE FORMULES, FORME NORMALE NÉGATIVE

$\otimes$ $\parr$

$\oplus$ $\parr$

"et" noté $\otimes$

"ou" noté $\parr$ $\parr$

négation $a^\perp$

De Morgan $X^{\perp\perp} = X$ $(X \parr Y)^\perp = X^\perp \otimes Y^\perp$ $(X \otimes Y)^\perp = X^\perp \parr Y^\perp$

forme normale négative :

négation sur les atomes exclusivement

$\otimes \quad \vdash \quad \parr$

LOGIQUE LINÉAIRE MULTIPLICATIVE
RÈGLES BILATERALE

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta}$$

$$X \vdash X$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma' \qquad \Delta \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \cancel{\Delta} \vdash A \otimes B, \Gamma', \Delta'}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Gamma'}{\Gamma, A \otimes B \vdash \Gamma'}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Gamma' \qquad \Delta, B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Delta, A \parr B \vdash \Gamma', \Delta'}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Gamma'}{\Gamma \vdash A \parr B, \Gamma'}$$

Coupure $$\frac{\Gamma \vdash X, \Gamma' \qquad \Delta, X \vdash \Delta'}{\Gamma, \Delta \vdash \Gamma', \Delta'}$$

LOGIQUE LINÉAIRE MULTIPLICATIVE
RÈGLES UNILATÉRALES

$\alpha \quad \alpha^{\perp}$

$(A \otimes (B \parr A))^{\perp}$

$\vdash \alpha, \alpha^{\perp}$

α : variable prop

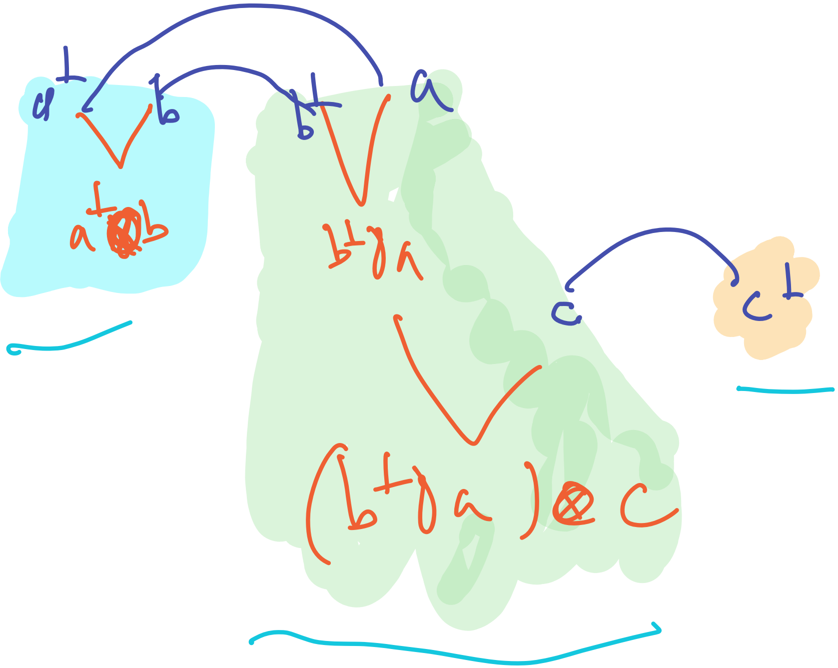
$$\frac{\vdash A \; B \; \Gamma}{\vdash A \parr B \; \Gamma}$$

$$\frac{\vdash A \; \Gamma \qquad \vdash B \; \Delta}{\vdash A \otimes B \; \Gamma \; \Delta}$$

$$\frac{\vdash X \; \Gamma \qquad \vdash X^{\perp} \; \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{ cut}$$

un fragment du calcul propositionnel usuel

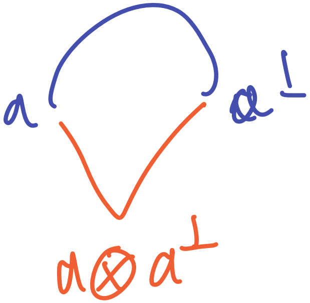
PREUVES → ARBRES + AXIOMES



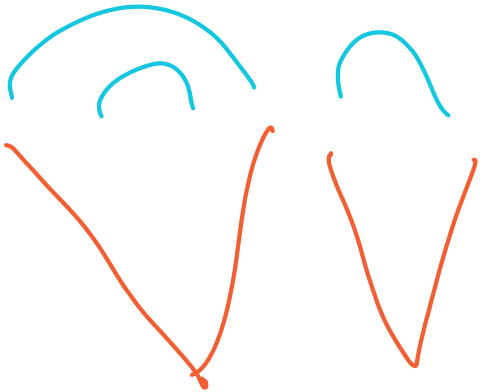
$$\dfrac{\dfrac{\vdash a^{\perp}, a \qquad \vdash b, b^{\perp}}{\vdash a^{\perp}\otimes b, a, b^{\perp}}}{\vdash a^{\perp}\otimes b, a \parr b^{\perp}} \qquad \vdash c, c^{\perp}$$

$$\vdash a^{\perp}\otimes b, (a \parr b^{\perp})\otimes c, c^{\perp}$$

CRITÈRE DE CORRECTION

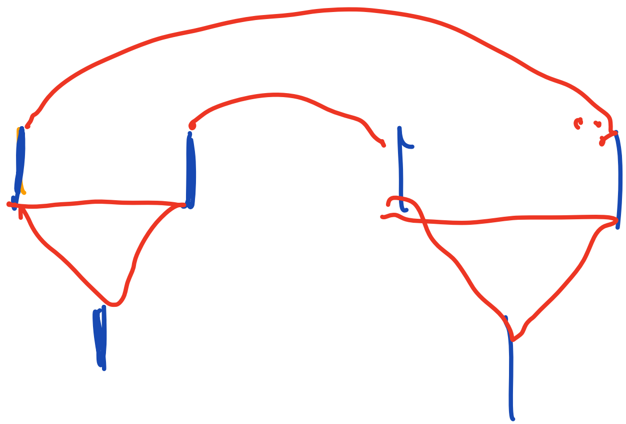


a et non a !

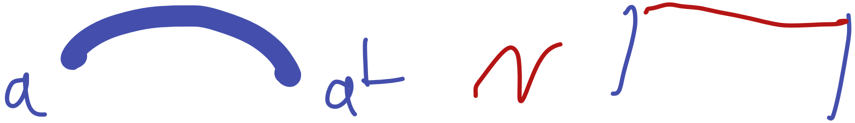


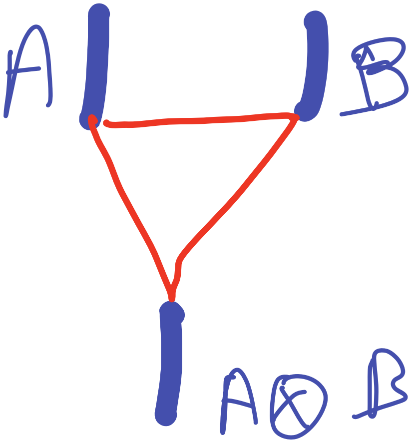
GRAPHES BICOLORES (COUPLAGE PARFAIT+ LIENS)

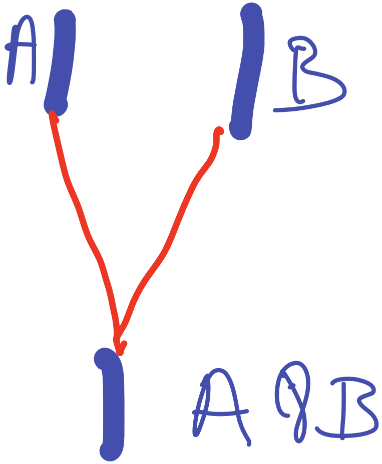
- Couplage ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes.
- Parfait: une arête du couplage est incidente à chaque point.
- Critère: pas de cycle élémentaire alternant



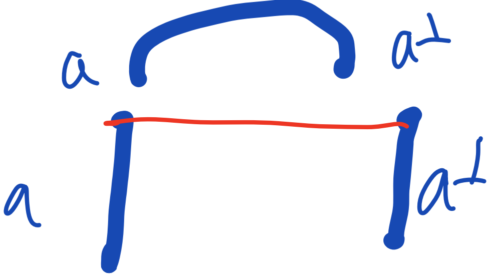
LIENS



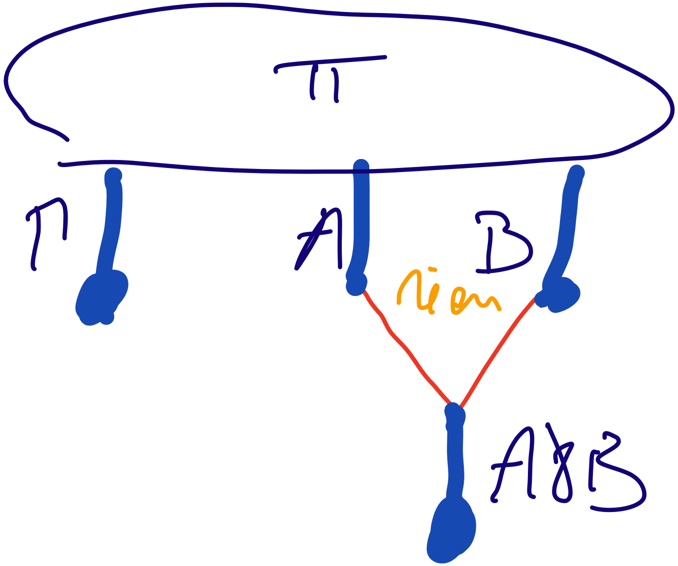




$\vdash a^\perp, a$ $\quad a \vdash a$

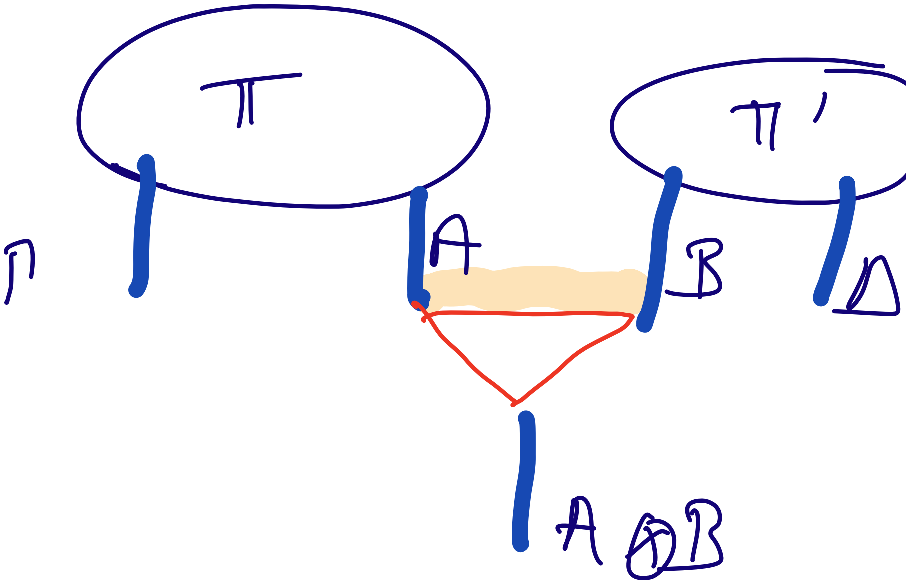


TRADUCTION DU PAR



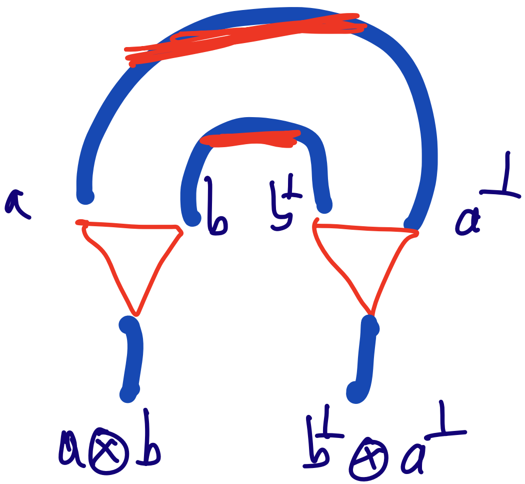
$$\frac{\vdash A, B, \Gamma}{\vdash A \parr B, \Gamma} \; \pi$$

TRADUCTION DU TENSEUR



$$\dfrac{\dfrac{\pi}{\vdash \Gamma, A} \qquad \dfrac{\pi'}{\vdash B, \Delta}}{\vdash \Gamma, A \otimes B, \Delta}$$

NÉCESSITÉ D'UN CRITÈRE DE CORRECTION



$(a \otimes b) \parr (b^\perp \otimes a^\perp)$

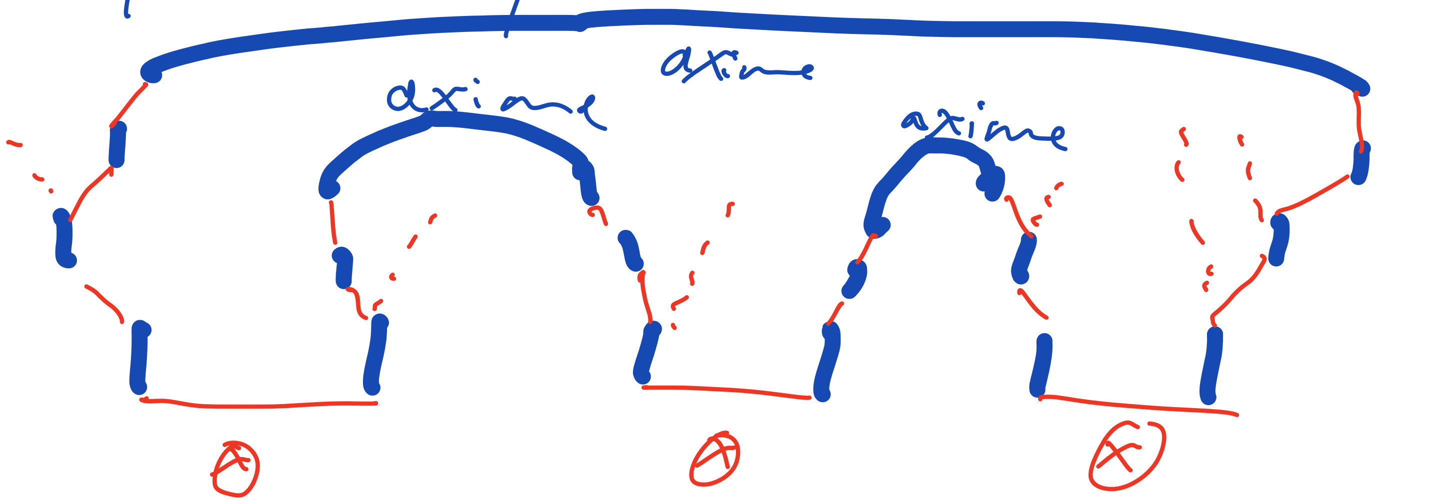
$(a \wedge b) \vee \neg(b \wedge \neg a)$

faux en logique classique

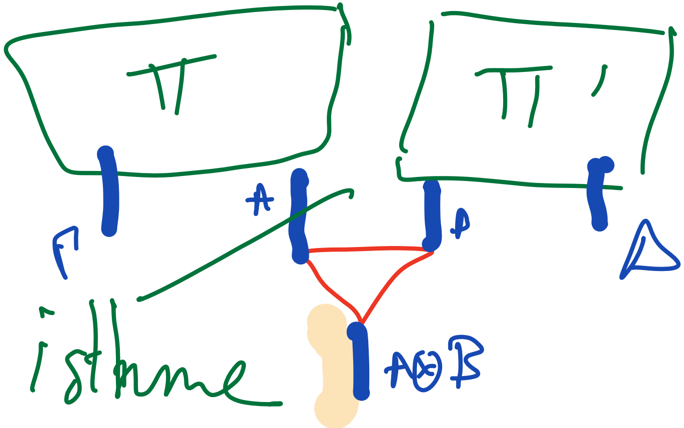
a fortiori en logique linéaire

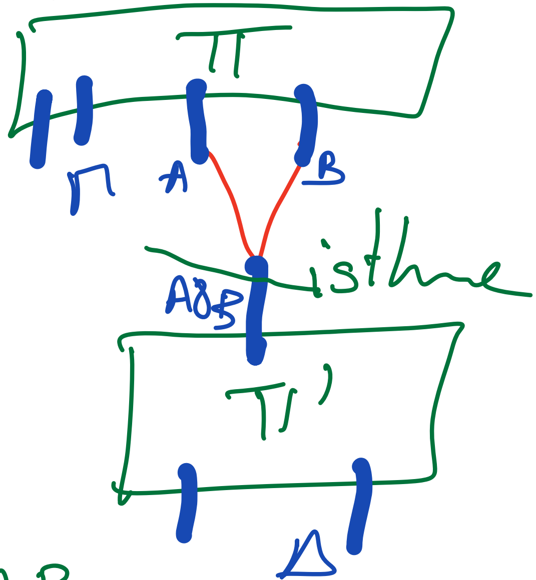
VALIDITÉ DU CRITÈRE PRÉSERVATION SÉQUENTS → GRAPHES

— pas de cycle élémentaire alternant



SÉQUENTIALISATION
GRAPHES+CRITÈRE → SÉQUENTS





$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash B, \Delta}{\vdash \Gamma, A \otimes B, \Delta}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi}{\vdash \Gamma, A, B}}{\vdash \Gamma, A ⅋ B} \quad \Pi'}{\vdash \Gamma, A ⅋ B, \Delta}$$

LA PROPRIÉTÉ CLÉ:

PAS DE CYCLE EA
⇔ COUPLAGE PARFAIT UNIQUE
⇔ ISTHME DU COUPLAGE (RÉC)

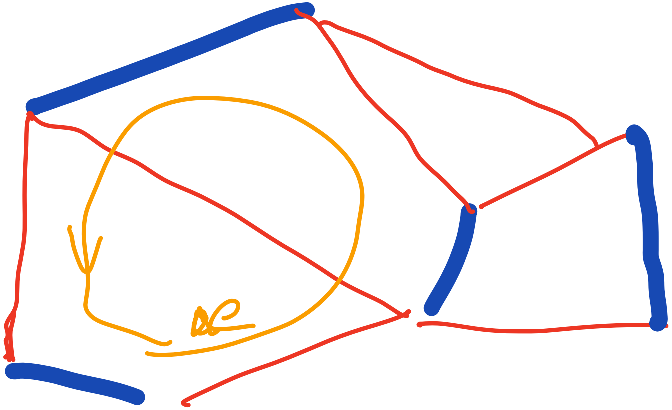
Merci à J.-C. Bermond et G. Zémor (pointeurs +méthodes)

LEMME CENTRAL: AECF ⇔ UNICITÉ DU COUPLAGE ⇔ISTHME DU COUPLAGE (RÉC)

- Un graphe est muni d'une unique couplage parfait si et seulement si il n'y pas de cycle élémentaire alternant les arêtes du couplages et les arêtes hors-couplage
  Retoré 93… mais Berge l'avais vu bien avant ☺
- Equivalent à le graphe appartient à la plus petite classe AECF (AE cycle free) définie inductivement par:
  - Graphe à une arête, incluse dans le couplage
  - Clos par: on prend GA, GB deux graphes de AECF on ajoute:
    - Deux points A, B
    - Une arête AB dans le couplage,
    - Des arêtes entre A et des points de GA (autant qu'on veut)
    - Des arêtes de entre B et des points de GB (autant qu'on veut)
- Tout graphe de AECF est AECF: ok Retoré 93 (et sans doute Kotzig 59 en slovaque)
- Si G dans AECF, alors G contient un isthme du couplage - Retoré 93, merci à G. Zémor, J.Cl. Bermond

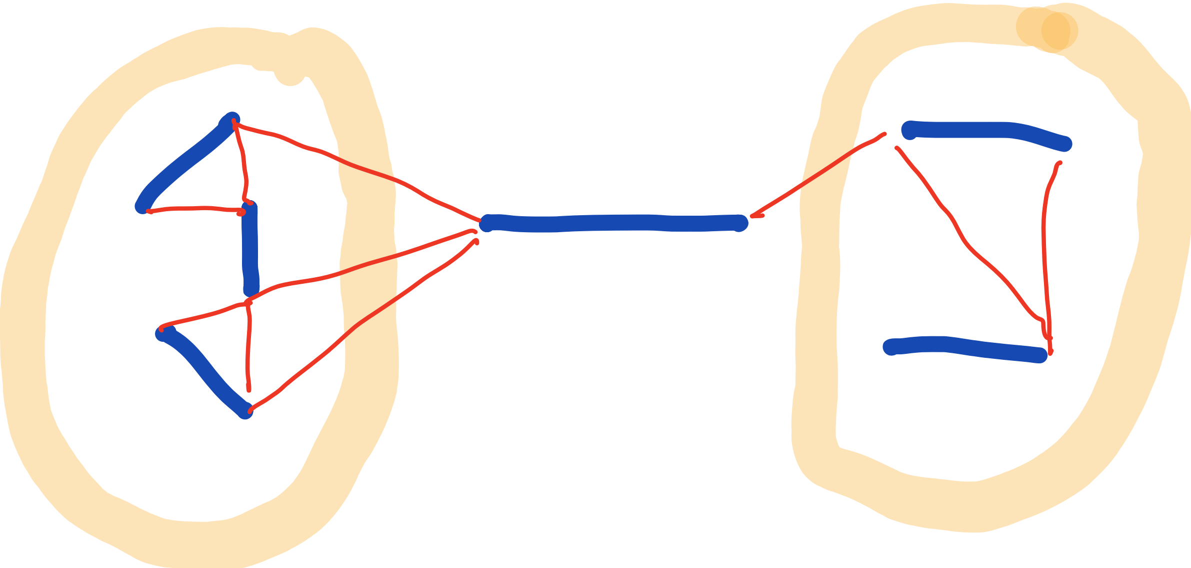
PAS DE CYCLE EA ⇔ COUPLAGE PARFAIT UNIQUE

- C’était connu (Berge, je crois)



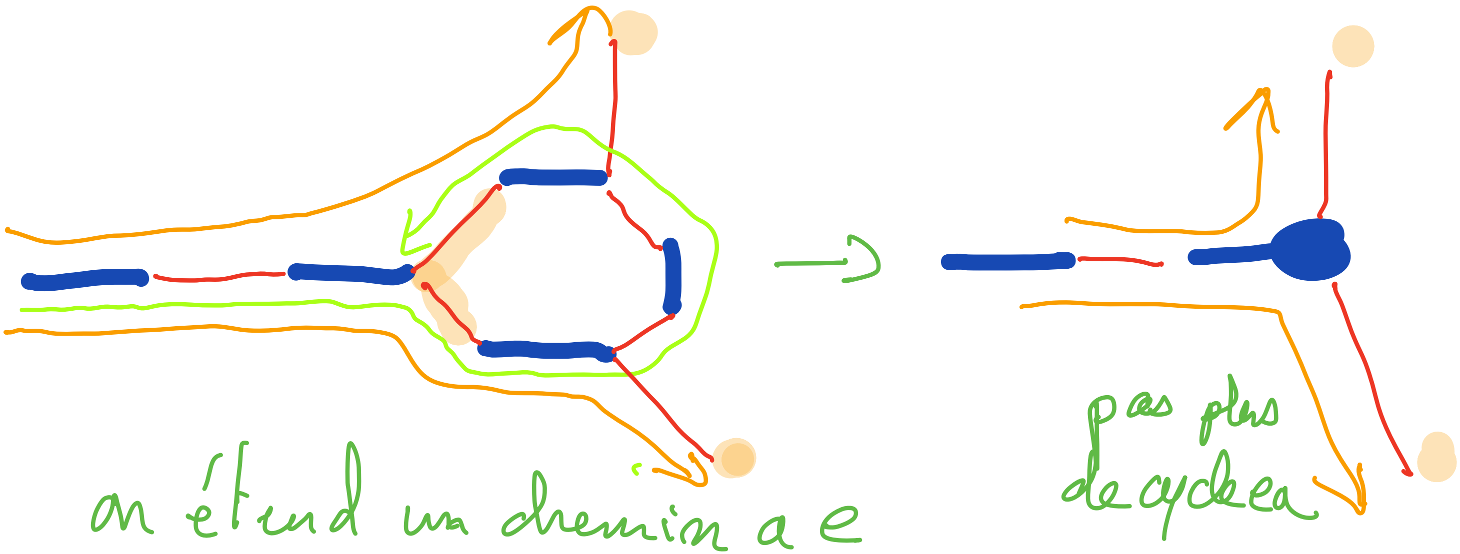
DÉF INDUCTIVE
GRAPHES AVEC COUPLAGE PARFAIT UNIQUE

- Dans Lovasz et Plummer Matching Theory recommandé par Bermond est cité un article de Kotzig en slovaque qui prouve l'implication simple de ce que j'avais prouvé
  (d'après Miki Hermann qui est Slovaque)



IDÉE DE LA PREUVE

- L'idée de contracter une boucle et autres méthodes standard sur les graphes m'a été soufflée par Gilles Zémor.



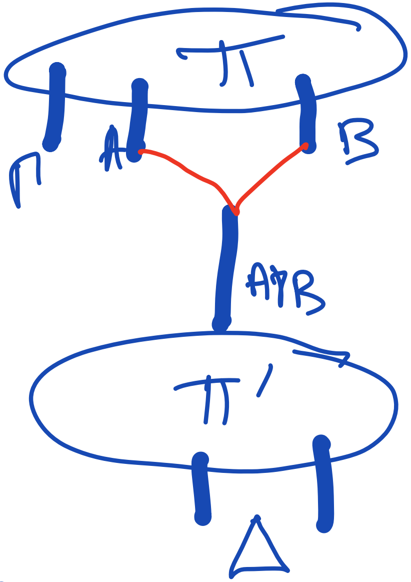
IDÉE DE LA PREUVE, SUITE

- on prolonge un chemin de
- si pas de boucle la dernière arête bleue est un isthme
- si sa boucle on contracte et on continue le chemin de

par récurrence isthme bleu du graphe réduit sans cycle ea

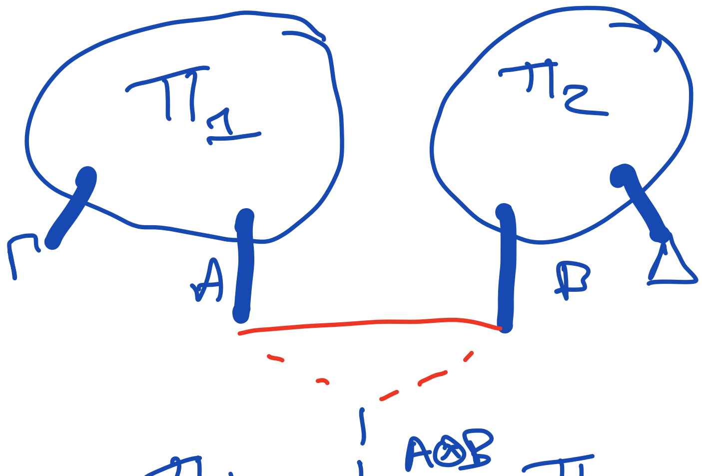
→ ISTHME bleu du graphe initial sans cycle ea

LEMME → SÉQUENTIALISATION



$$\left(\dfrac{\begin{array}{c}\pi \\ \vdash \Gamma, A, B\end{array}}{\vdash \Gamma, A⅋B} \right) \pi' \left(\vdash \Gamma \right)$$

$$\vdash \Gamma, A⅋B, \Delta$$



$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ \vdash \Gamma, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2 \\ \vdash B, \Delta\end{array}}{\vdash \Gamma, A \otimes B, \Delta}$$

DE PLUSIEURS MANIÈRES

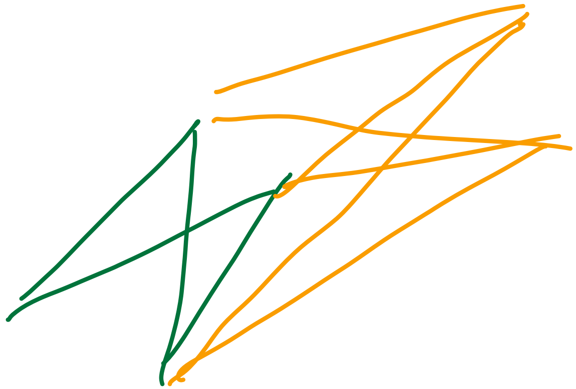
- $\otimes$ scindant Girard
- $⅋$ scindant Retoré, Danos

ET LES COGRAPHES ?

C’est pour faire de beaux réseaux

AVANT LES GRAPHES BICOLORES

« AGREGATS » (PLUSIEURS $K_{N,P}$ UNE COULEUR POUR CHAQUE)

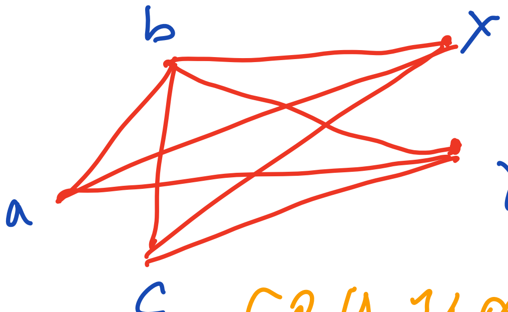


COGRAPHES

- Cographes = classe de graphes contenant les graphes à un point et close par somme disjointe et composition en série.
  - (V,E) ⅋ (V',E') = (V+V', E+E')   (+ union disjointe)
  - (V,E) $\otimes$ (V',E') = (V+V', E+E'+VV')
- Caractérisés par absence de P4
- Un cographe se décrit par un terme UNIQUE
  modulo l'associativité et la commutativité de ⅋ et de $\otimes$

PROPRIÉTÉS DES COGRAPHES PAS DE P4

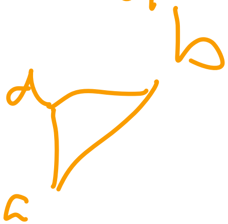
ASSOCIATIVITÉ, COMMUTATIVITÉ DES CONNECTEURS → ÉGALITÉ



$((a ⅋ c) \otimes b) \otimes (x ⅋ y)$

formule F

cographe associé à F



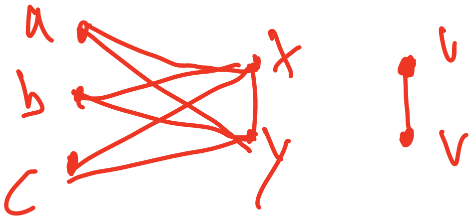
$a \otimes (b \otimes c)$

$(a \otimes b) \otimes c$

FORMULE ET/OU → COGRAPHE

$$(((a \parr b) \parr c) \otimes (x \otimes y)) \parr (u \otimes v)$$

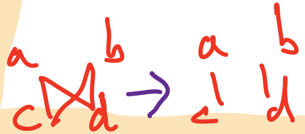
$$= (x \otimes ((b \parr (c \parr a)) \otimes y)) \parr (u \otimes v)$$

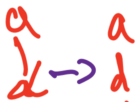


égalité des cographes

RÉÉCRITURE DE COGRAPHES ET INCLUSION DE COGRAPHES

- Inclusions des cographes axiomatisée par la réécriture de cotermes Bechet de Groote Retoré 97 RTA
- Récriture de termes interchange law (modulo commutativité et associativité)
  - 4 $\otimes$ $\parr$: $(a \parr b) \otimes (c \parr d) \rightarrow (a \otimes c) \parr (b \otimes d)$ (incorrect)
  - 3 $\otimes$ $\parr$: $a \otimes (c \parr d) \rightarrow (a \otimes c) \parr d$ (=mll!)
  - 2 $\otimes$ $\parr$: $(a \otimes d) \rightarrow (a \parr d)$ (mix)





- Inclusion et correction
  - 3 préserve la correction
  - 3 et 2 préserve la correction avec mix
  - 4 ne préserve PAS la correction

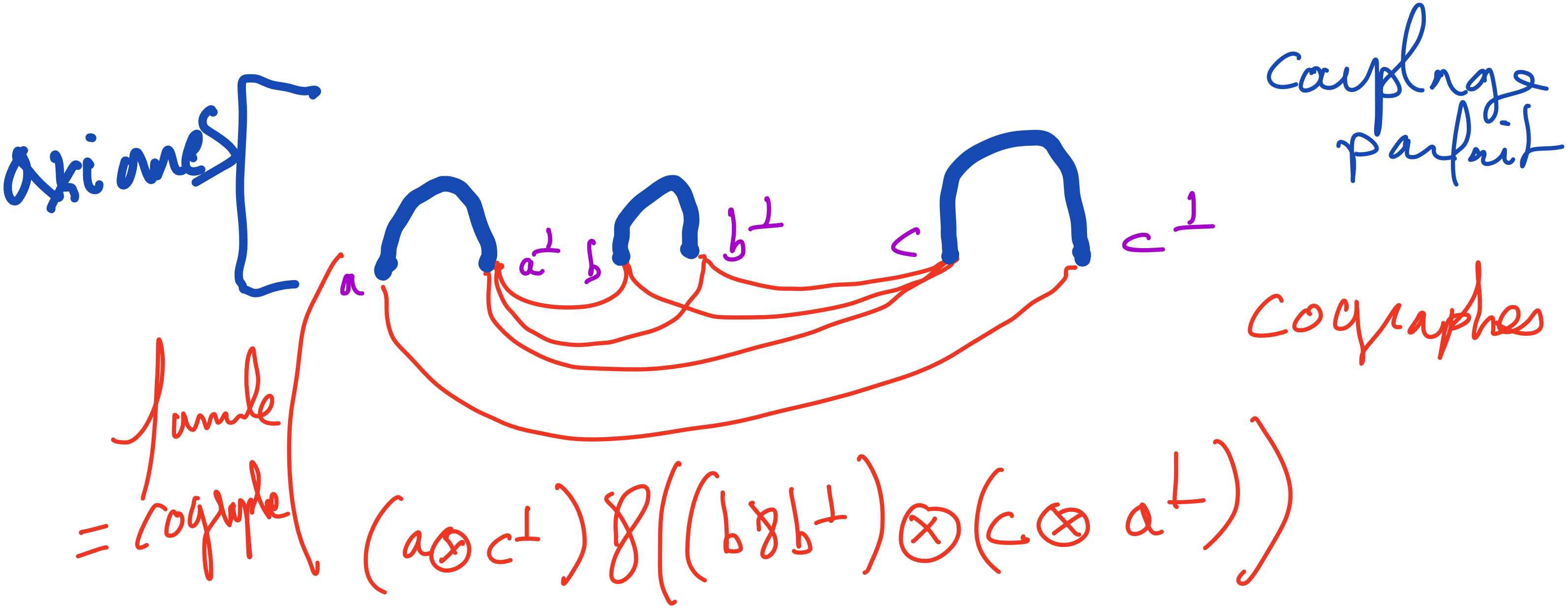
(définie ci après, tout cycle en contient une corde)

HANDSOME PROOFNETS
BEAUX RÉSEAUX

RÉSEAUX SANS LIENS: BEAUX RÉSEAUX

SEXY → CUTE → HANDSOME PROOFNETS

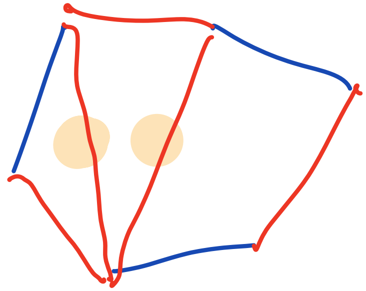
(POLITICALLY CORRECT…)



QUID DU CRITÈRE DE CORRECTION ?

- on a vu le vain en obtenant les beaux réseaux par <u>dépliage</u> à partir des réseaux bicolores
- tout cycle e.a contient une corde (rouge forcément)

HANDSOME PROOF NETS COGRAPHE + COUPLAGE PARFAIT



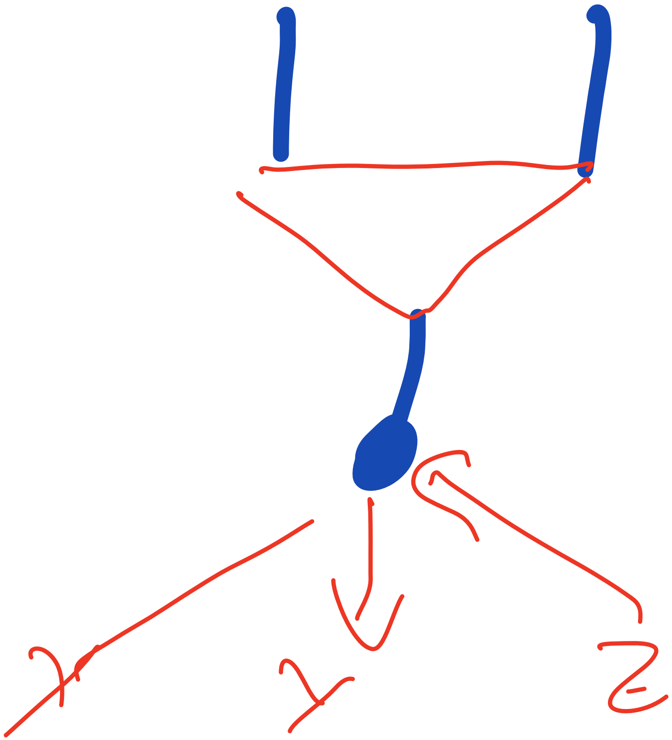
- Cographe: la formule
- Couplage parfait les axiomes
- Graphe qui représente fidèlement la preuve:
  en plus de d'habitude , ordre des règles, associativité et commutativité des connecteurs deviennent l'égalité
- Critère:
  - Tout cycle ae contient une corde
  - Pas MIX ⇔ un chemin ae entre toute paire de point

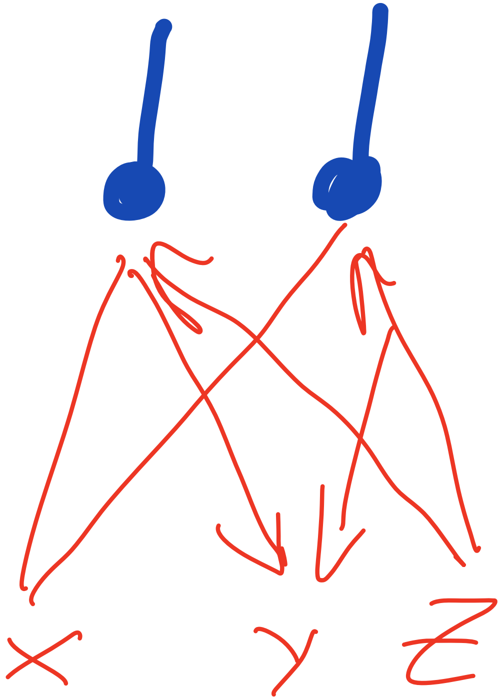
(DÉ)PLIAGE

PLIAGES ET DÉPLIAGES (FOLD / UNFOLD)

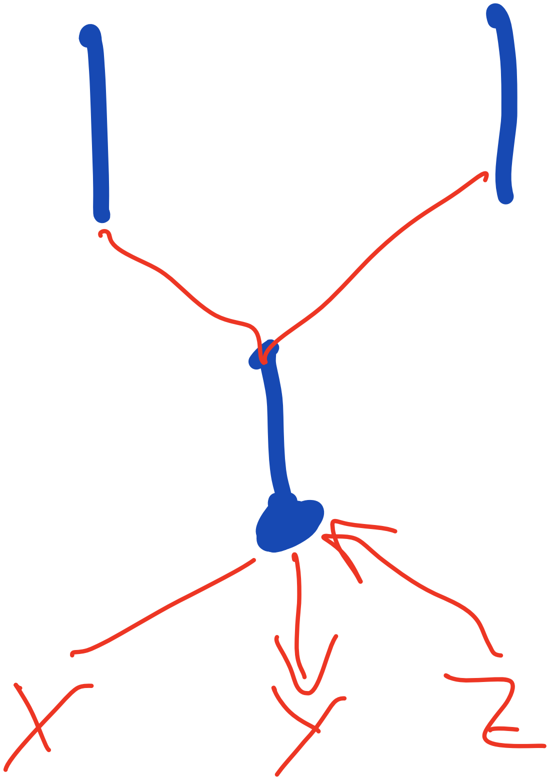
- Préservent la correction
- On passe **progressivement** de
  - Réseau bicolore avec liens
  - Beau réseau
- Etapes intermédiaire: cographe entre les conclusions
- Et vice versa!

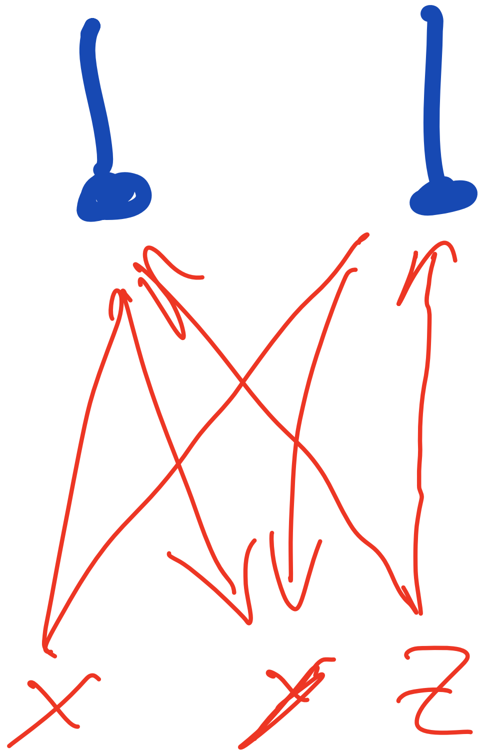
GRAPHES BICOLORES → BEAUX RÉSEAUX DÉPLIAGE





GRAPHES BICOLORES → BEAUX RÉSEAUX DÉPLIAGE



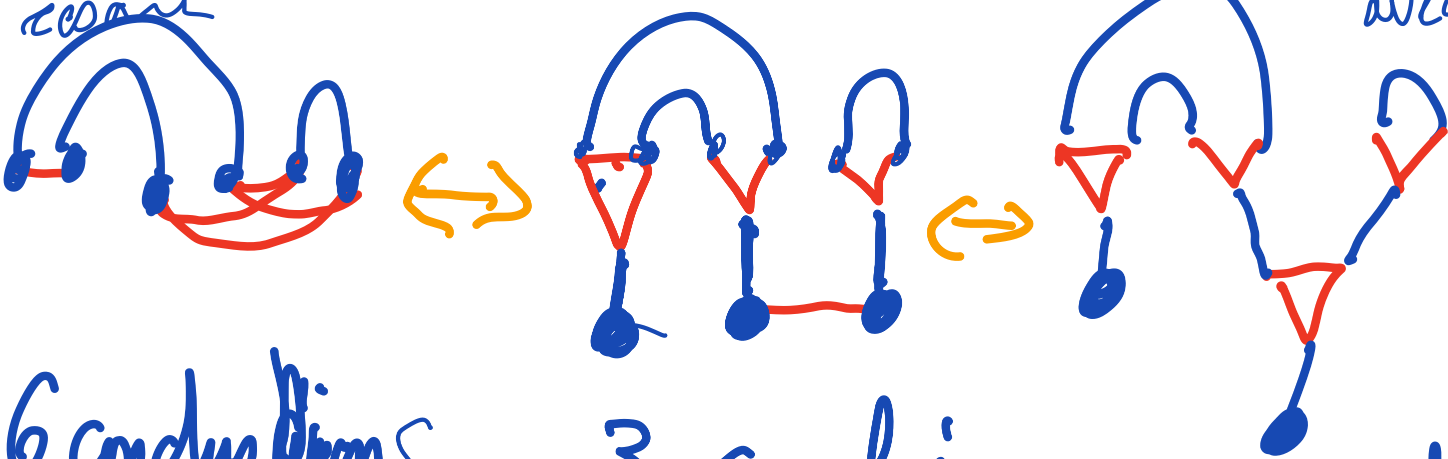


BEAUX RÉSEAUX → RÉSEAUX BICOLORES

PLIAGE

beau réseau

bicolores avec lien



6 conclusions cographe

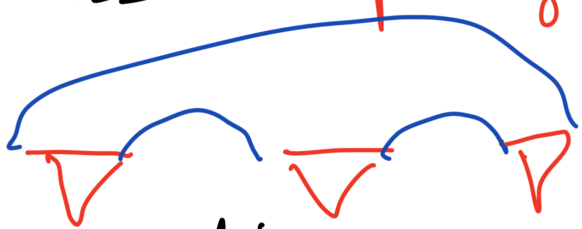
3 conclusion + cographe

2 conclusion pas de cographe

CRITÈRE DES BEAUX RÉSEAUX
TOUT CYCLE EA CONTIENT UNE CORDE

- Sur les réseaux bicolores, avec liens, ~~c'est pareil.~~
- Préservé par ~~réécriture.~~

plinge deplinge

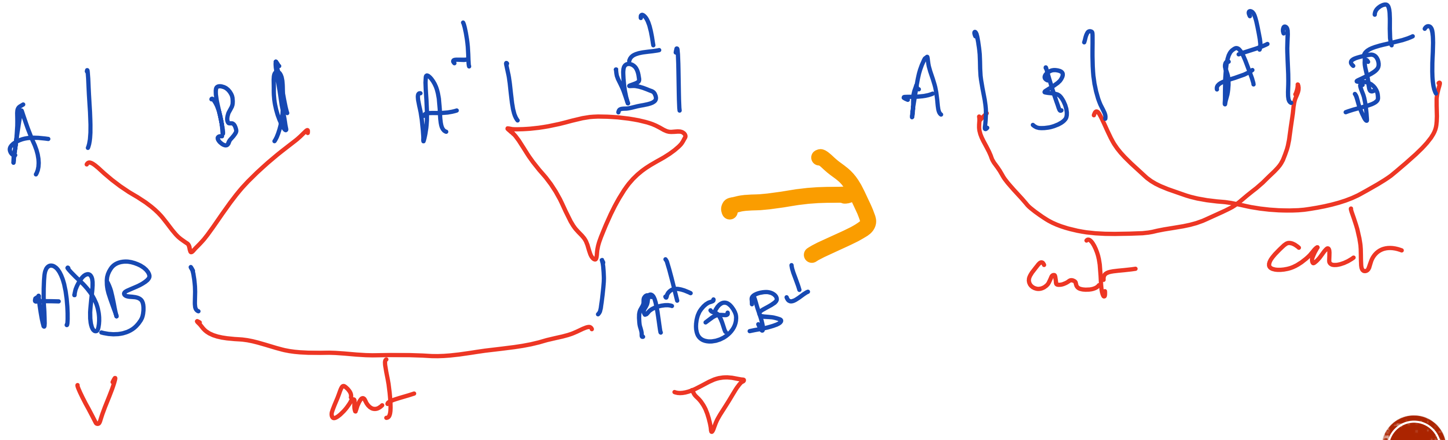


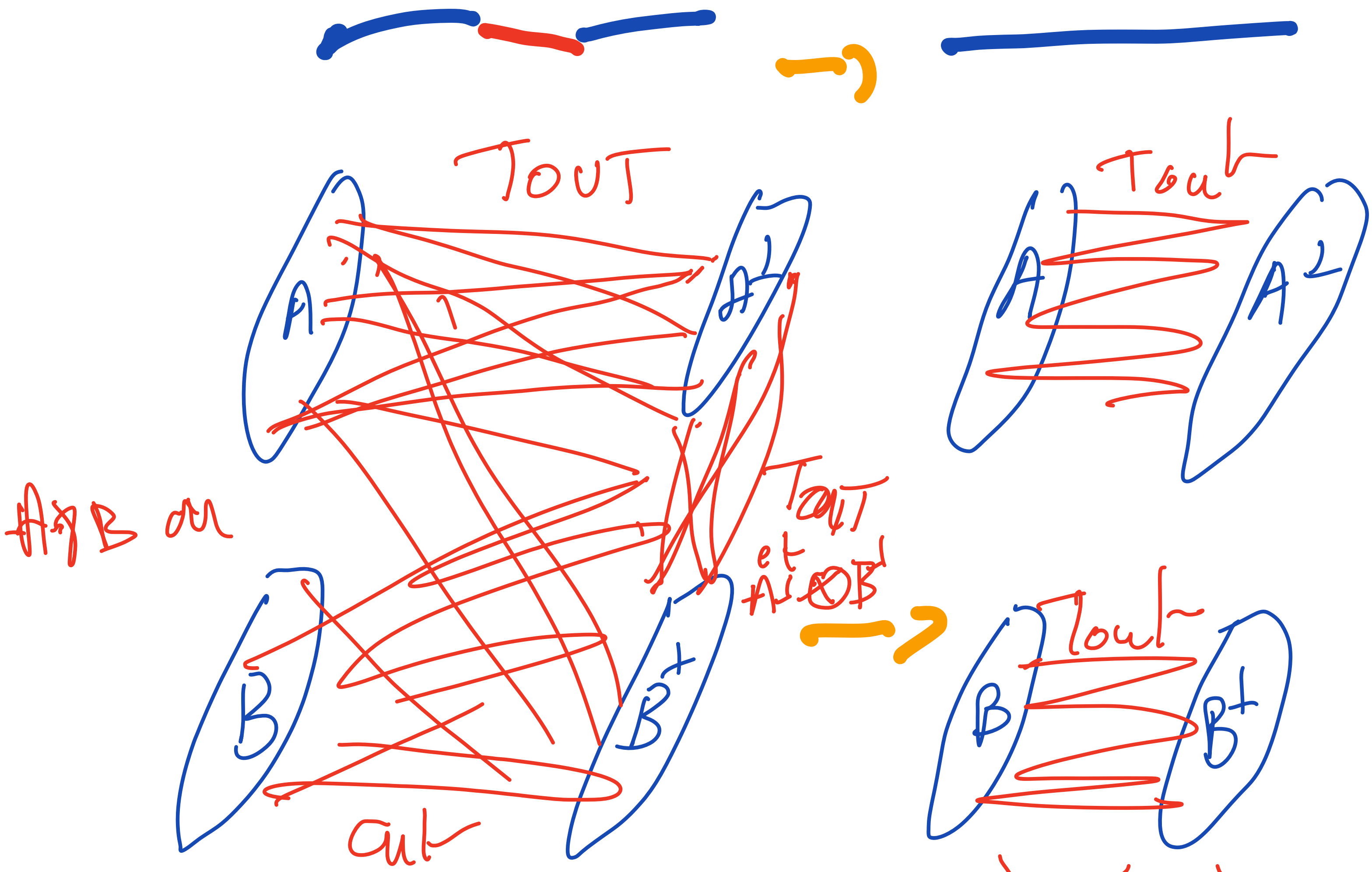
cycle ea, dans un réseau avec lien

réseau avec lien tout cycle ea contient une corde

$\iff$ pas de cycle ea

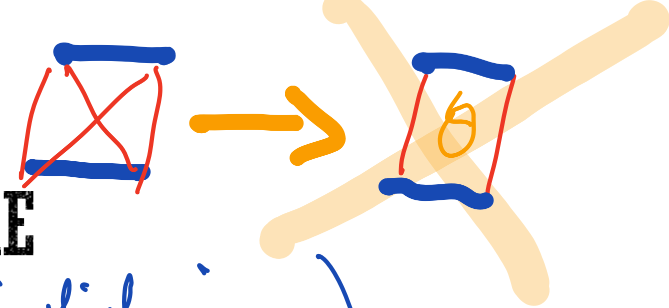
ELIMINATION DES COUPURES ET RÉÉCRITURES CORRECTES





$A \otimes (B \otimes C) \to (A \otimes B) \otimes C$

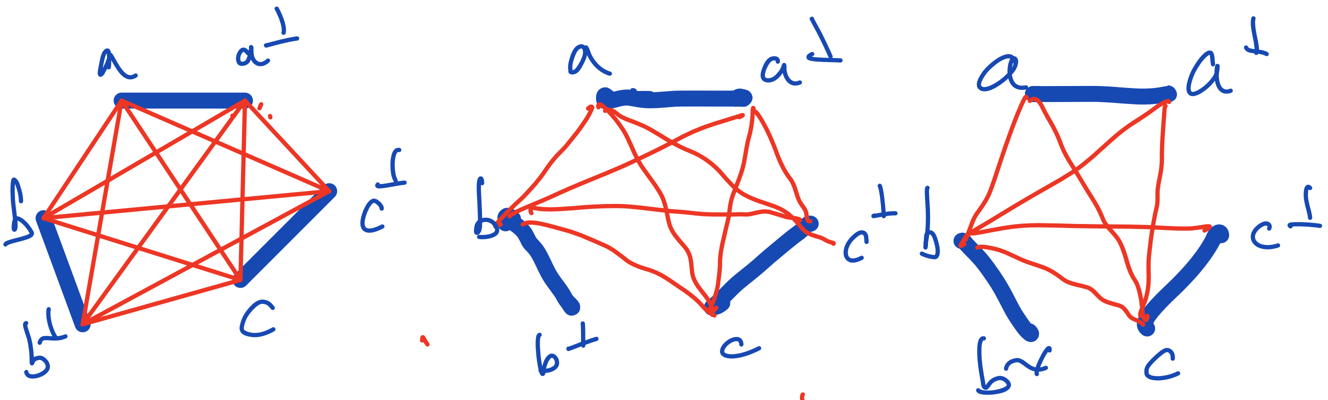
réécriture 4⊗8 :



PREUVES PAR RÉÉCRITURE

deep inference (Guglielmi Strassburger)

- AXn : axiome, c'est-à-dire graphe complet: $\bigotimes_i (a_i ⅋ \bar{a}_i)$
- 3 permet elle d'obtenir de AXn toutes les preuves de MLL? oui!
- 3 et 2 permettent elles d'obtenir de AXn toutes les preuves de MLL+mix? oui!



l'Axiome

$b^\perp ⅋ b \otimes (a ⅋ a^\perp) \otimes (c ⅋ c^\perp)$

$b^\perp ⅋ (b \otimes ((a ⅋ a^\perp) \otimes c) ⅋ c^\perp)$

CORRECTION SYNTAXIQUE

$\Leftrightarrow$

CORRECTION SÉMANTIQUE

n'assisterait, un exposé

sémantique des preuves

formule : graphe simple infini

π preuve de $A \vdash B$ $[\![\pi]\!]$ fn d'un clique $\to$ clique

$\overline{\phantom{\pi\ \text{preuve de}\ A}}$ B clique max de B

$\pi \rightsquigarrow \pi'$ $\qquad [\![\pi]\!] = [\![\pi']\!]$

réseau correct $\iff$ son interprétation est une clique de $A_1 \mathbin{⅋} \cdots \mathbin{⅋} A_n$

concl $A_1 \ldots A_n$

LE CAS ORIENTÉ

PRÉCÈDE / BEFORE
(UN PEU DE SÉMANTIQUE)

Dans la sémantique 4 connecteurs
2 commutatifs, 1 non commutatif/autodual

$$\begin{tikzcd}
 & A < B \arrow[dr] & \\
A \otimes B \arrow[ur] \arrow[dr] & & A \parr B \\
 & B < A \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$A < B \neq B < A$
non commutatif

$(A < B)^\perp = (A^\perp < B^\perp)$

$(A < B) < C = A < (B < C)$
associatif

CALCUL DES SÉQUENTS ?

question ouverte

il faut des sequents structurés

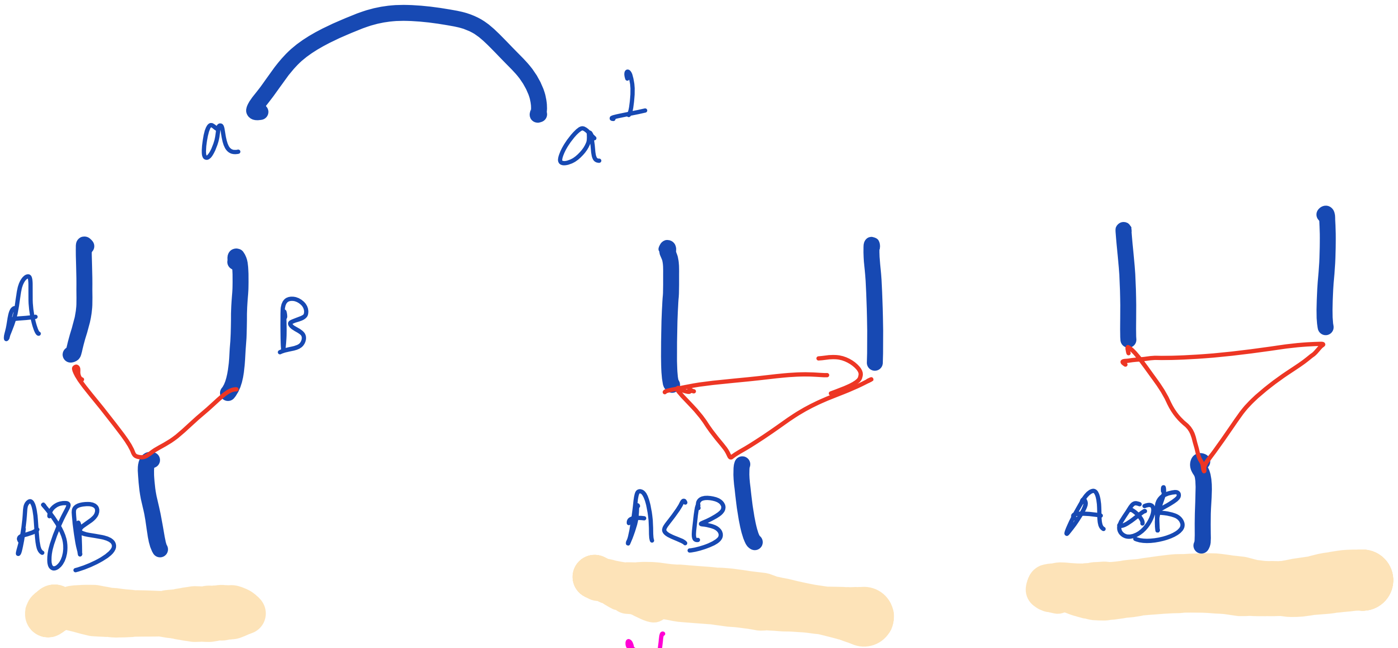
par ex { ordre serie parallèle de formules
cographe orienté

récemment ~~p~~ proposition de Slavnov (juste ?)

$$\frac{\vdash \Gamma \qquad \vdash \Delta}{\vdash \Gamma < \Delta}$$

$$\frac{\vdash A, \Gamma_{(I)} \quad \vdash B, \Delta_{(J)}}{\vdash A \otimes B, \Gamma, \Delta \ (K)}$$

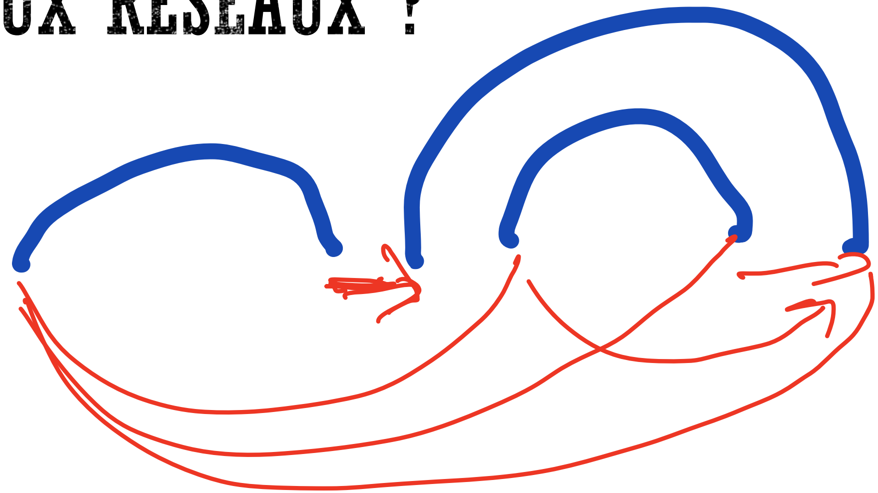
RÉSEAUX BICOLORES ORIENTÉS CRITÈRE



Pas de circuit ae
(cycle orienté élémentaire alternant)

BEAUX RÉSEAUX ?

Axiome



formule du genre cographe

COGRAPHES ORIENTÉS

DICOGRAPHES = COGRAPHES ORIENTÉS PROPRIÉTÉS

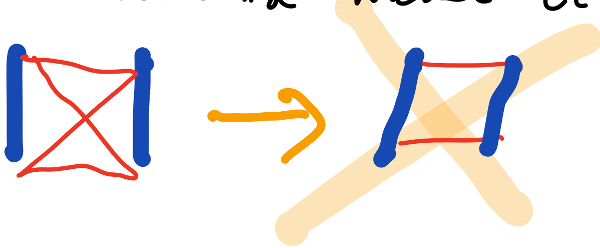
- Caractérisation
  - Retoré 1997 ordre série parallèle + cographes + transitivité faible
  - Guglielmi 2001 (compliqué, je ne la connais pas)
  - Paul 2006 purement en termes de sous graphes exclus

COGRAPHES ORIENTÉS

- Cographes orientés
  - $(V,E) \parr (V',E') = (V+V', E+E')$ (+ union disjointe)
  - $(V,E) \otimes (V',E') = (V+V', E+E'+VV')$
  - $(V,E) < (V',E') = (V+V', E+E'+V<V')$ (arcs de V vers V')
- Caractérisation:
  - Partie symétrique : cographes (pas de P4)
  - Partie orientée: ordre série parallèle (pas de N)
  - Entre ces deux parties transitivité faible: transitif dès que
    - deux arcs se suivent, $a<b$ $b<c$ => $a<c$
    - un arc et une arête se suivent $a<b$ $b-c$ => $a<c$
    - une arête et un arc se suivent $a-b$ $b<c$ => $a<c$
  - Cractérisation par sous graphes exclus (Christophe Paul)

INCLUSION/RÉÉCRITURE DE DICOGRAPHES (POUR ÉLIMINATION DES COUPURES)

- Inclusions des dicographes axiomatisée par la réécriture de cotermes Bechet de Groote Retoré 97 RTA
- Récriture de termes interchange law (modulo commutativité et associativité)
- Seule la même règle que tout à l'heure pose problème



les autres sont ok

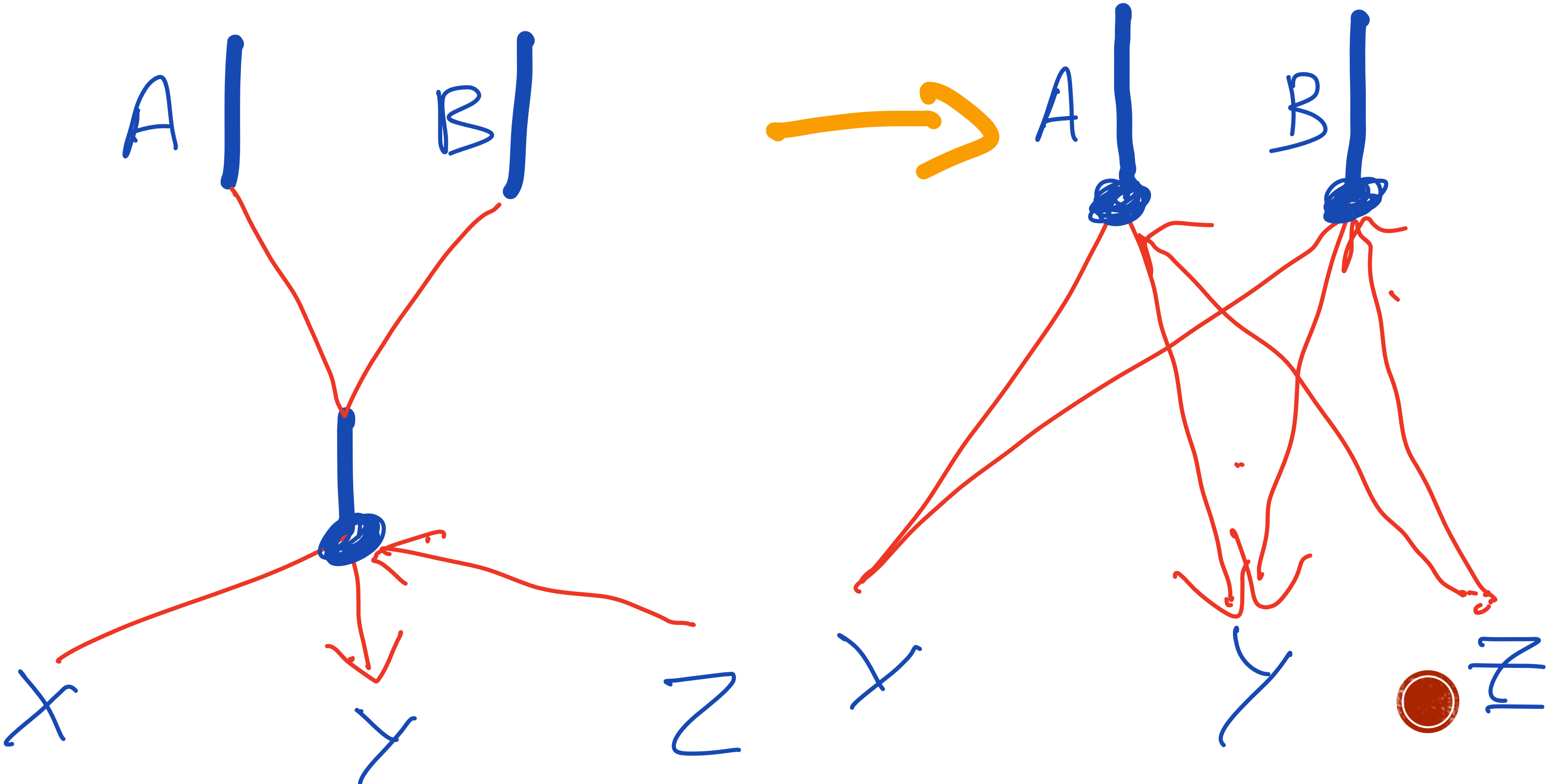
INCLUSION = RÉÉCRITURE DE DICOGRAPHES

- $\otimes \parr$
  - 4 $\otimes \parr$: $(a \parr b) \otimes (c \parr d) \rightarrow (a \otimes c) \parr (b \otimes d)$ (réseaux: incorrect)
  - 3 $\otimes \parr$: $a \otimes (c \parr d) \rightarrow (a \otimes c) \parr d$
  - 2 $\otimes \parr$: $(a \otimes d) \rightarrow (a \parr d)$
- $\otimes <$:
  - 4 $\otimes <$: $(a < b) \otimes (c < d) \rightarrow (a \otimes c) < (b \otimes d)$
  - 3 $\otimes <$ r: $a \otimes (c < d) \rightarrow (a \otimes c) < d$
  - 3 $\otimes <$ l: $(a < b) \otimes c \rightarrow a \otimes c < b$
  - 2 $\otimes <$: $(a \otimes d) \rightarrow (a < d)$
- $< \parr$:
  - 4 $< \parr$: $(a \parr b) < (c \parr d) \rightarrow (a < c) \parr (b < d)$
  - 3 $< \parr$ r: $a < (c \parr d) \rightarrow (a < c) \parr d$
  - 3 $< \parr$ l: $(a \parr b) < c \rightarrow a < (c \parr b)$
  - 2 $< \parr$: $(a < d) \rightarrow (a \parr d)$

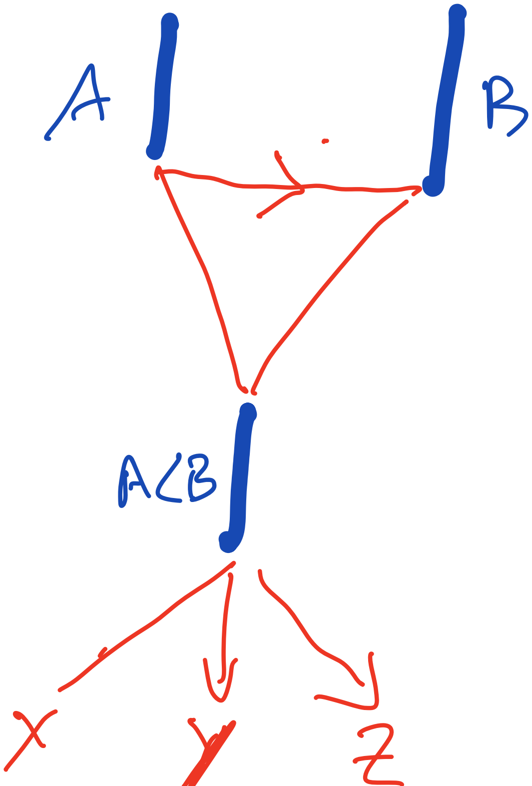
BEAUX RÉSEAUX ORIENTÉS (POMSET LOGIC)

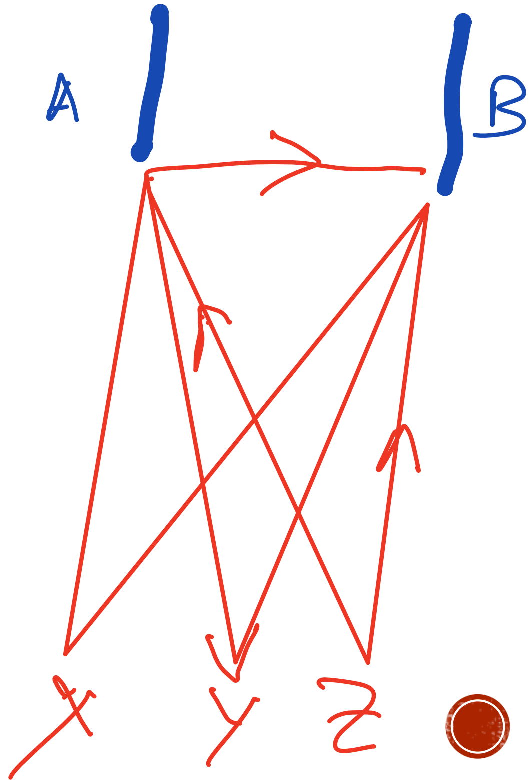
Surtout des questions…peu de réponse

(DÉ)PLIAGE PAR

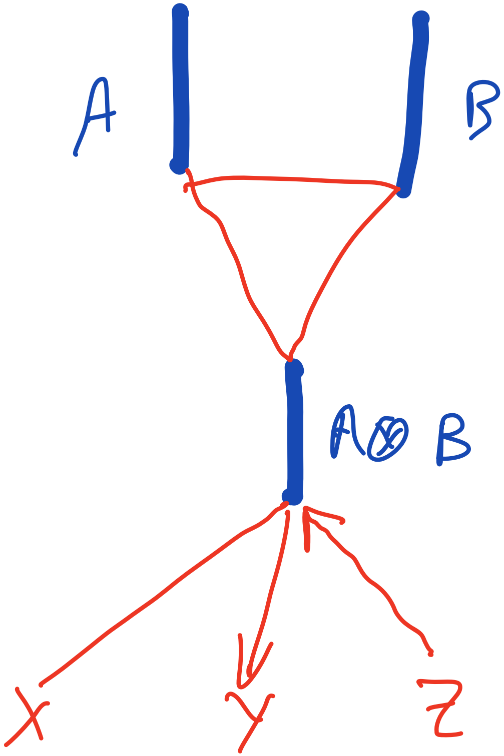


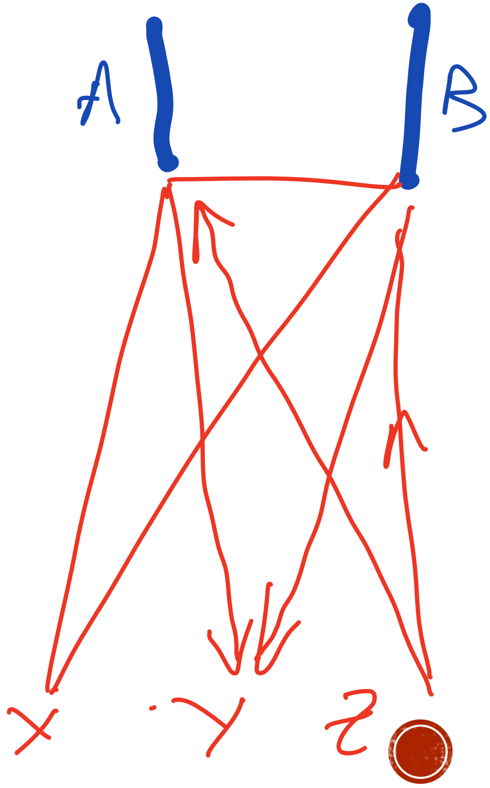
(DÉ)PLIAGE BEFORE





(DÉ)PLIAGE TENSEUR

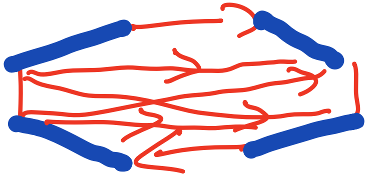




CRITÈRE

tout circuit AE a au moins une corde

corde rouge



sur les réseaux bicolores avec liens:

$\Longleftrightarrow$ pas de circuit e a dilatant

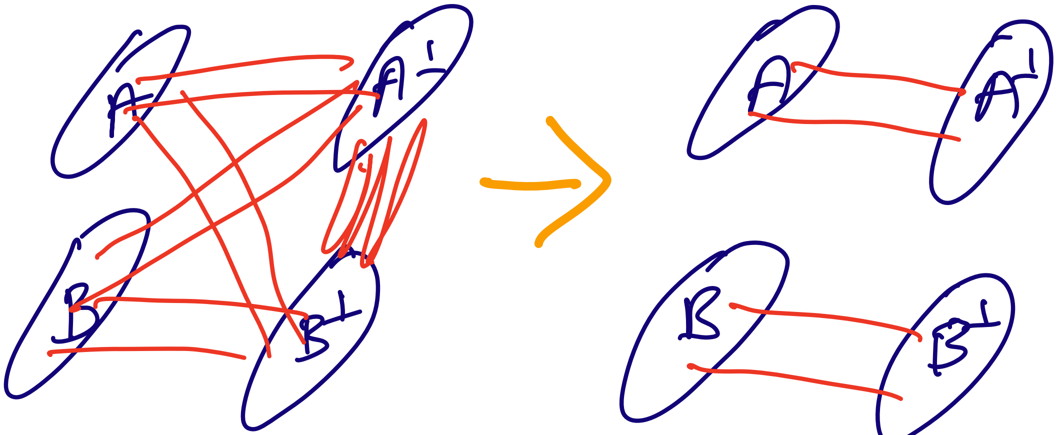
CRITÈRE

- préservé par pliage
- préservé par dépliage
- préservé par réécriture d'inclusion

⚠ SAUF ⊗84 ⚠

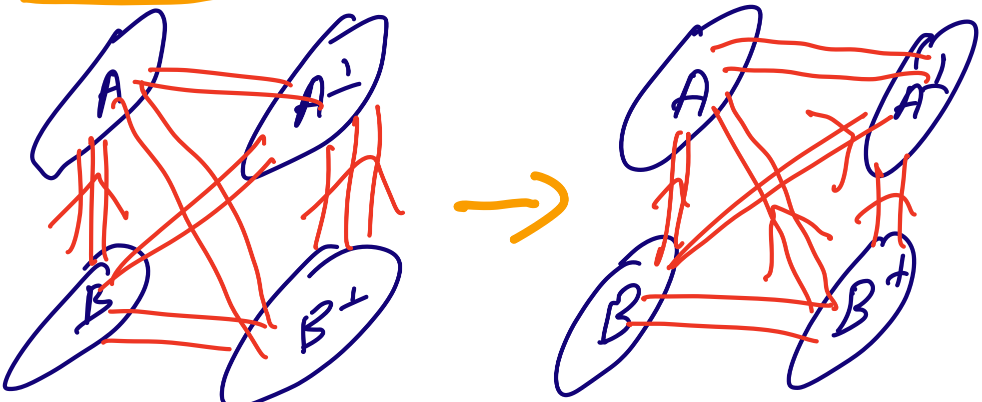
ELIMINATION DES COUPURES

cas particulier de réécriture d'inclusions correctes



avec réécriture

⊗ 8 3



avec réécriture

⊗ < 4

BEAUX RÉSEAUX ORIENTÉS POMSET LOGIC

- Cographe orienté
- Tout circuit (cycle orienté) élémentaire alternant contient une corde.
- Réécriture d'inclusion préserve la correction
- → Elimination des coupures
- Fold unfold préserve la correction
  il y a aussi des réseaux avec liens
  calcul des séquents ne dérive pas tout
  Slavnov 2019 deux < un plutôt par, un plutôt tenseur
- Calcul par réécriture : calculus of structures,
  equivalent à SBV (retoré 2020)
  (mais pomset logic fait plus cf. Tito Nguyen & Lutz Strassburger)
- (correction ⇔ interprétation cohérente=clique)

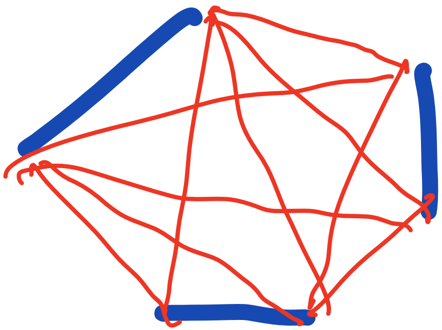
POMSET LOGIC: UNE BONNE LOGIQUE
SANS CALCUL DES SÉQUENTS (?)

- Règles simples sur des séquents munis d'un dicographe
  → réseaux corrects mais pas tous!
- Slavnov séquents si P formules alors P relations binaires entre tuples de longueur 1…P (chemins AE disjoints).

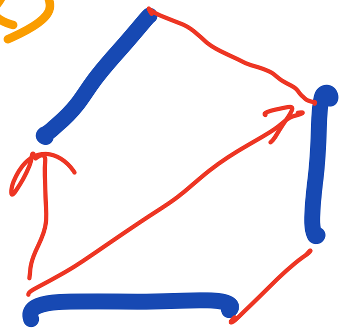
→ très très compliqué. Juste?

BEAUX RÉSEAUX PAR RÉÉCRITURE
DEEP INFERENCE (SBV)

axiome



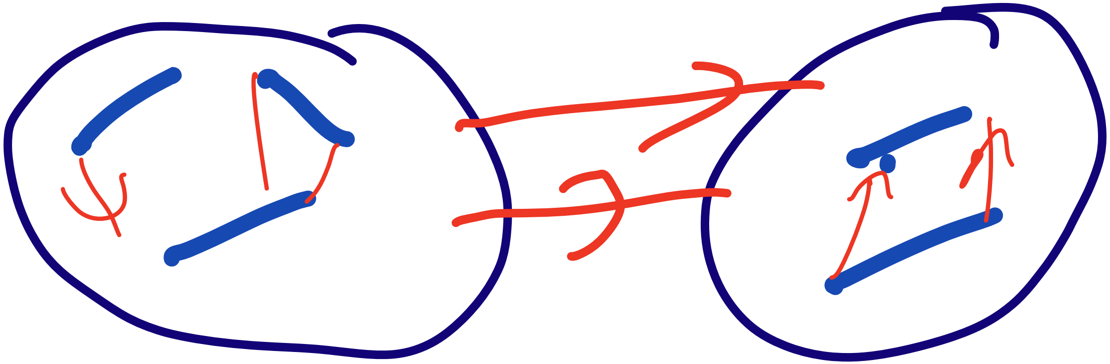
réécritures correctes



obtient-on tous les réseaux corrects ??

NON NguyenStrassburger2021

QUESTION OUVERTE
DÉFINITION INDUCTIVE DES BEAUX RÉSEAUX ?



$\longrightarrow$ règles du calcul des séquents

CRITÈRE PAR RÉÉCRITURE (DEEP INFERENCE)

autre idée

critère pour reconnaître exactement les réseaux qui s'obtiennent par réécriture

Moins bien :

beaux réseaux critère simple

+ correspond exactement à la SÉMANTIQUE

CONCLUSION

De belles questions sur de beaux réseaux?