MASTER MIAGE 2e ANNÉE
MERCREDI 20 OCTOBRE 2010, 14H
DOCUMENTS AUTORISÉS
(MAIS TÉLÉPHONES ET INTERNET ETC. INTERDITS)
CE SUJET COMPORTE 1 PAGE

Exercice I *(calcul propositionnel)*

Pour chaque formule F qui suit, donner une preuve formelle de F ou une valuation qui rende F fausse.

I.a. $((a \wedge b) \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow (b \Rightarrow c))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a,b \vdash a,c \quad a,b \vdash b,c}{a,b \vdash (a \wedge b),c}\wedge_d \qquad c,a,b \vdash c}{((a \wedge b) \Rightarrow c),a,b \vdash c}\Rightarrow_g}{\vdash ((a \wedge b) \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow (b \Rightarrow c))}\Rightarrow_g 3fois$$

I.b. $(a \Rightarrow (b \vee c)) \Rightarrow (a \Rightarrow (b \Rightarrow c))$ $a = b = 1$ $c = 0$

Exercice II *(calcul des prédicats)*

Exprimer dans le calcul des prédicats les phrases suivantes, à l'aide des prédicats unaires: enseignant(_), étudiant(_) des prédicats binaires connaît(_,_) et de la constante Rosine.

II.a. Tout étudiant connaît Rosine.
$\forall x\ (etudiant(x) \Rightarrow connait(x,Rosine)\ )$

II.b. Tout étudiant connaît tous les enseignants.
$\forall x \forall y\ (\ (etudiant(x) \wedge enseignant(y)) \Rightarrow connait(x,y)\ )$

II.c. Un étudiant connaît tous les enseignants.
$\exists x\ (etudiant(x) \wedge (\forall y\ (enseignant(y) \Rightarrow connait(x,y)\ )\ )\ )$

Exercice III *(calcul des prédicats)*

On considère les formules:

$$\begin{array}{lcl} U & : & \forall x\, \forall y (P(x,y) \Rightarrow P(y,x)) \\ V & : & \forall x\, \forall y\, \forall z\ ((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow P(x,z)) \\ W & : & \forall x ((\exists y P(x,y)) \Rightarrow P(x,x) \end{array}$$

III.a. Donner une interprétation concrète pour laquelle U est vraie et V est fausse.
Domaine: l'ensemble des nombres entiers. On définit $P(x,y)$ par $|x - y| = 2$

III.b. Montrer formellement que $(U \wedge V) \Rightarrow W$.

III.c. Expliquer en quelques phrases pourquoi $(U \wedge V) \Rightarrow W$.

U signifie que P est symétrique et W signifie que P est transitive. W signifie que s'il y a un élément y en relation avec x ($P(x,y)$) alors x est en relation avec lui-même.

Supposons que $\forall x((\exists y P(x,y))$ Si y est en relation avec x ($P(x,y)$), comme P est symétrique (U) x est en relation avec y ($P(y,x)$). Mais comme $P(x,y)$ et $P(y,x)$ et que P est transitive, on a $P(x,x)$.

MASTER MIAGE 2^{e} ANNÉE
MERCREDI 20 OCTOBRE 2010, 14H
DOCUMENTS AUTORISÉS
(MAIS TÉLÉPHONES ET INTERNET ETC. INTERDITS)

CE SUJET COMPORTE 1 PAGES

Exercice IV *(calcul propositionnel)*

Pour chaque formule F qui suit, donner une preuve formelle de F ou une valuation qui rende F fausse.

IV.a. $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \wedge b) \Rightarrow c)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a,b \vdash c,a \qquad \dfrac{a,b \vdash c,b \quad c,a,b \vdash c}{(b \Rightarrow c),a,b \vdash c}\Rightarrow_g}{(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)),a,b \vdash c}\Rightarrow_g}{(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)),a \wedge b \vdash c}\wedge_g}{(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \wedge b) \Rightarrow c)}\Rightarrow_d 2fois$$

IV.b. $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow (b \wedge c))$ $a = c = 1$ $b = 0$

Exercice V *(calcul des prédicats)*

Exprimer dans le calcul des prédicats les phrases suivantes, à l'aide des prédicats unaires: enseignant(_), étudiant(_) des prédicats binaires connaît(_,_) et de la constante Rosine.

V.a. Un étudiant connaît Rosine.
$\exists x\, etudiant(x) \wedge connait(x,Rosine)$

V.b. Un enseignant connaît un étudiant.
$\exists x\, \exists y\, etudiant(x) \wedge enseignant(y) \wedge connait(x,y)$

V.c. Tous les enseignants connaissent un étudiant.
$\forall x\, enseignant(x) \Rightarrow (\exists y etudiant(y) \wedge connait(x,y)\ )$

Exercice VI *(calcul des prédicats)*

On considère les formules:

$$\begin{array}{lll} U & : & \forall x\, \forall y (P(x,y) \Rightarrow P(y,x)) \\ V & : & \forall x\, \forall y\, \forall z\ ((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow P(x,z)) \\ W & : & \forall x ((\exists y P(y,x)) \Rightarrow P(x,x)) \end{array}$$

VI.a. Donner une interprétation concrète pour laquelle V est vraie et U est fausse.

Domaine: les nombres entiers. On définit $P(x,y)$ par $x < y$.

VI.b. Montrer formellement que $(U \wedge V) \Rightarrow W$.

VI.c. Expliquer en quelques phrases pourquoi $(U \wedge V) \Rightarrow W$.

U signifie que P est symétrique et W signifie que P est transitive. W signifie que s'il y a un élément y en relation avec x ($P(x,y)$) alors x est en relation avec lui-même.

Supposons que $\forall x((\exists y P(x,y))$ Si x est en relation avec y ($P(y,x)$), comme P est symétrique (U) x est en relation avec y ($P(x,y)$). Mais comme $P(x,y)$ et $P(y,x)$ et que P est transitive, on a $P(x,x)$.