

**UNE HISTOIRE DE
LA LOGIQUE MATHÉMATIQUE
AU **XXE** SIÈCLE:
DE LA PHILOSOPHIE À L'INFORMATIQUE**

Christian Retoré

Professeur, Université de Montpellier & LIRMM-CNRS

LA LOGIQUE EST ELLE SULFUREUSE?

- **"Forse tu non pensavi ch'io loico fossi. [Lucifero]"** Dante Alighieri (1265-1321)
Comedia, Inferno XXVII
Une traduction pourrait être: "*sans doute ne savais tu pas que j'étais aussi bon logicien*".
- *En tout cas, en France la logique est peu enseignée:*
 - *Philosophie?*
 - *Mathématiques?*
 - *Informatique?*
 - *Linguistique (sémantique et philosophie du langage)?*



AVANT LA LOGIQUE MODERNE

3

Aristote
Antiquité
Scolastique
XIXe anglo-américain

LA LOGIQUE

- Art de raisonner correctement
- Avec la rigueur des raisonnements mathématiques
- Dérivée correctement des énoncés
...mais à partir de quels axiomes?
- Etude de la vérité dans une situation particulière, mais cela est plus récent.

AUPARAVANT: ARISTOTE (III AV JC) L'ANTIQUITÉ & LA SCOLASTIQUE (MOYEN ÂGE)

- Certains types d'énoncés:
 - A Tout A est B
 - E Certains A sont B
 - I Aucun A est B
 - O Tous les A ne sont pas B.
(ou Certains A ne sont pas B, mais le thème est différent)
- Les fameux syllogismes (règles de déduction)
 - Barbara : *tout M est P, or tout S est M, donc tout S est P;*
 - Baroco : *tout P est M, or quelque S n'est pas M, donc quelque S n'est pas P*

PRINCIPES ARISTOTE & LES STOÏQUES

○ Aristotele

- Identité: Tout A est A
- Non contradiction NON (A et NON A)
- *"Tout personne niant le principe de non contradiction devrait être battue et brûlée jusqu'à ce qu'elle admette qu'être battu n'est pas la même chose que ne pas être battu, et qu'être brûlé n'est pas la même chose que ne pas être brûlé"* Avicenne (980-1037)
- Tiers exclus: A ou NON A (**tertium non datur**)

○ Stoïciens (calcul propositionnel)

- Modus ponens Si A alors B Or A donc B.
- Modus tollens Si A alors B. Or NON B. Donc A.
- **Ex falso quodlibet sequitur**

PLACE DE LA LOGIQUE EN PHILOSOPHIE

- A étudier en premier pour raisonner correctement (Organon Catégories,..)
- « *Celui qui souhaite atteindre la perfection humaine doit d'abord étudier la logique, puis les diverses branches des mathématiques dans l'ordre qui convient, puis la physique et enfin la métaphysique.* » (Maimonides, XIIe)

XIXE: LOGIQUE ALGÈBRIQUE ANGLO-AMERICAINE BOOLE, DE MORGAN, PIERCE

- Lois et calculs
- Calcul propositionnel: tables de vérités
 - $X \rightarrow \text{VRAI}: \text{VRAI}$
 - $\text{FAUX} \rightarrow X: \text{VRAI}$
 - $\text{VRAI} \rightarrow \text{FAUX}: \text{FAUX}$
(si Paris est en France alors Rome est en Chine)
- Pour les prédicats des règles parfois fausses
 $\forall x [I(x) \rightarrow (F(x) \vee M(x))]$
 \Leftrightarrow
 $\forall x (I(x) \rightarrow F(x)) \text{ ou } \forall x (I(x) \rightarrow M(x))$
pensez à $F = \text{femme}$ $M = \text{homme}$...



XXE SIÈCLE

La crise des fondements des mathématiques
La logique du premier ordre

9

GOTTLOB FREGE (1878-1925)

- Calcul des prédicats (formules quantifiées)
 - Tout x est P : $(x) P(x)$ ou $\forall x P(x)$
 - Certains x sont P : $Ex P(x)$ ou $\exists x P(x)$
- Tout A est B :
Pour tout X , SI X est A ALORS X est B
 $\forall X (A(X) \rightarrow B(X))$
- Certains A sont B :
Il existe X , tel que X est A ET ce même X est B .
 $\exists X (A(X) \text{ ET } B(X))$
- Système déductif avec des règles comme:
 - SI on a établi $P(x)$ ou x est une variable dont on ne suppose aucune propriété ALORS on a $\forall x P(x)$

FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES

GEORG CANTOR (1845-1918)

- Infinis, plusieurs sortes de nombres:
 - Ordinaux
 - Cardinaux
- Il ya plusieurs sortes d'infinis
- Il y a plus de nombres réels que d'entiers: Si nous avons une liste des nombres réels entre 0 et 1 (développements décimaux infinis, sans 999999...)
 1. 0,5786086346780965431346789098764666...
 2. 0,8861453781936528901766189918714428...
 3. 0,8623503894729474548494646849947452...
 4. 0,5618903412252820282534176444510186...
- On fabrique un nombre qui est différent du premier sur la première décimale, du second sur la deuxième, du troisième sur la troisième:
 - 0,6939....
- 1. Il n'est pas dans la liste!!!

GIUSEPPE PEANO (1848-1932)

AXIOMATISATION DE L'ARITHMÉTIQUE

- Esperanto mathématique ...
- Symboles: 0 (zéro) +, x ...
fonction S: successeur (l'entier suivant)
- $\forall n \quad S(0) \neq n$
- $\forall n \quad$ si $n \neq 0$ alors il existe p tel que $S(p) = n$
- $\forall n \forall p \quad$ si $S(n) = S(p)$ alors $n = p$
- $\forall n \quad n + 0 = n$
- $\forall n \forall p \quad n + S(p) = S(n + p)$
- $\forall n \quad n \times 0 = 0$
- $\forall n \forall p \quad n \times S(p) = (n \times p) + n$
- Récurrence: pour établir qu'une propriété P(...) est vraie de tout entier il suffit de:
 1. Montrer qu'elle est vraie de 0
 2. Montrer qu'elle passe au successeur:
si P(n) alors P(S(n))

DAVID HILBERT (1862-1943)

ET LE PROGRAMME ÉPONYME

- En 1900 à Paris 23 problèmes majeurs
- Programme de fondements des mathématiques
- Méthode axiomatique
- Montrer en raisonnant sur les preuves (de manière finitaire) que les axiomes ne conduisent jamais à une proposition fausse (par ex. $0=1$) par les règles de déduction formelle

BERTRAND RUSSELL (1872-1970)

- Paradoxe de Russell:
 - $U = \{X / X \notin X\}$
 - $U \in U ?$
 - $U \notin U ?$
 - Schéma de compréhension restreint.
- Principia mathematica (1910-1913)
formalisation/ axiomatisation purement logique
des mathématiques

THÉORIE AXIOMATIQUE DES ENSEMBLES ZERMELO (1871-1953) PUIS FRAENKEL (1891- 1965)

- 1 seul symbole: $X \in Y$ (X appartient à Y) (et $=$)
- Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments
- Il existe un ensemble sans élément (le vide)
Formellement: $\exists y \forall x x \notin y$
- Paire, union, ensemble des parties
- Schéma de compréhension restreint:
 - $\{X \in Y \mid P(X)\}$ est un ensemble (exit le paradoxe de Russell)
- Axiome de l'infini: il existe N qui contient \emptyset et
si $x \in N$ alors $(x \cup \{x\}) \in N$
au minimum N contient:
 $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$
 $0, 1, 2, 3$
- On peut faire TOUTES les mathématiques dans ZF

MODÈLE, VÉRITÉ: CALCUL PROPOSITIONNEL

- Une interprétation:
 - On fixe la valeur, vrai ou faux de chaque proposition élémentaire
 - On en déduit la valeur dans cette interprétation des propositions complexes par les tables de vérités
- Validité:
 - Une proposition dérivable (par exemple $p \rightarrow p$) vaut vrai dans toute interprétation
- Complétude:
 - Si une proposition vaut vrai dans toute interprétation, alors elle est dérivable (Bernays, 1926)

MODÈLE, VÉRITÉ: CALCUL DES PRÉDICATS

1/2

- La même chose, en plus compliqué:
 - Ensemble (domaine) par exemple les gens
 - Interprétation des constantes, des relations, ...
 - Dort: ensemble de personnes
 - Connaît: ensemble de couples
 - On peut vérifier dans un modèle donné que, par exemple:
 - Pour tout x il existe y, x connaît y et y dort;
- Il y a des formules vraies dans TOUT modèle:
 - SI il existe X tel que pour tout Y
X soit en relation R avec Y
ALORS pour tout Y il existe un X
tel que X soit dans la relation R avec Y
 - C'est-à-dire $\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$

MODÈLE, VÉRITÉ: CALCUL DES PRÉDICATS $\frac{1}{2}$

- Validité
- Toute formule dérivable est vraie dans tout modèle,.
- **Complétude (Gödel, 1929) : Toute formule vraie dans tout modèle est dérivable**

LUITZEN EGBERTUS JAN BROUWER (1881-1966)

ET L'INTUITIONNISME

- Rejet du tiers exclus:
 - A ou non A
 - Différent de non (A et non A)
 - « ou » intuitionniste: plus exigeant
- Même chose pour le « il existe »
 - Existe x $P(x) = P(0)$ ou $P(1)$ ou $P(2)$...
 - Ne se déduit pas de NON pour tout X non $P(x)$
- Raisonnement qui construit la solution
- Ex. théorème des valeurs intermédiaires
- Paradoxe du buveur:
 - Il existe X tel que si X boit alors tout le monde boit.

KURT GÖDEL (1906-1978)

- Complétude de la logique du premier ordre
- Compatibilité de l'axiome du choix avec les axiomes de la théorie des ensembles
- Compatibilité de l'hypothèse du continu avec les axiomes de la théorie des ensembles
- Incomplétude de l'arithmétique...

KURT GÖDEL (1906-1978)

INCOMPLÉTUDE DE L'ARITHMÉTIQUE

- A contre courant (chute du programme de Hilbert) fascinant / mal compris
- Codage:
 - Formule \rightarrow entier
 - Preuve \rightarrow entier
 - Preuve(d,f) : d est le code d'une démonstration D, f est le code d'une formule F et D est une preuve de F
- 1^{er} théorème d'incomplétude
Certains énoncés de l'arithmétique de sont ni démontrés ni réfutés par l'arithmétique.
 - Exemple concret convergence des suites de Goodstein (avec ε_0)
 - Théorème de Fermat ?
- 2^e théorème d'incomplétude
La cohérence l'arithmétique $PA \mid \neg 0=1$ fait partie des énoncés indémonstrables.
- Gentzen 1934: cohérence de l'arithmétique avec induction sur ε_0

EN RÉSUMÉ: FONDAMENTAUX

- Preuves
- Modèles
- Théorie des ensembles, ordinaux, cardinaux
- *Lowenheim Skolem:*
une théorie qui admet un modèle infini en admet de toute cardinalité infinie
- Complétude de la logique du premier ordre
- *Compacité:*
étant donné une famille de formules dont chaque partie finie admet un modèle, toute la famille admet un modèle
- Incomplétude de toute théorie contenant l'arithmétique de Peano.



INFORMATIQUE

Et calculabilité

23

POURQUOI LA SCIENCE INFORMATIQUE EST ELLE AUSSI LIÉE À LA LOGIQUE

- Informatique? Science? technologie ?
 - Données (informatique)
 - Calcul (computer science)
- Mécanisation du raisonnement (et du calcul) dans le programme de Hilbert
- Formalisation, codage,...(cf. Gödel)

- Dès les débuts analyse du langage naturel, test de Turing pour l'intelligence artificielle: berner 30% des humains dans un dialogue.

MACHINE ABSTRAITE 1936

ALAN TURING (1912-1954)

- Ruban avec des 0 et des 1 (qui peuvent « tout » représenter via divers codages)
- Tête qui parcourt le ruban
- Etats: 1 initial plusieurs finaux
- Actions
 - lire, écrire (0, 1, rien),
 - déplacer (gauche, droite, rien),
 - Changement d'état
- Instructions:
si dans tel état si on lit tel caractère
alors on fait telle écriture,
on déplace la tête et on va dans tel état.

MACHINES DE TURING: TERMINE? OU PAS?

- La machine s'arrête quand on atteint un des états finaux
- Le problème de l'arrêt des machines de Turing est indécidable. Il n'y a pas de machine de Turing qui étant donné (sur un ruban):
 - Un entier m qui code une machine de Turing M (un texte finit décrit la machine, et il se représente par un nombre entier)
 - Et un entier n

Répond 1 si la machine M s'arrête sur l'entrée n et 0 sinon.

MACHINE DE JOHN VON NEUMAN (1903-1957)

- 1 processeur
- 1 mémoire : données + programme
- Contrôleur qui dicte la séquence des opérations

- Nos ordinateurs fonctionnent toujours ainsi, mais ils communiquent entre eux.

CALCULABILITÉ À LA CHURCH (1903-1995)

LAMBDA CALCUL

- Du point de vue des ensembles, un nombre est la classe des ensemble ayant le même nombre d'éléments.
- On définit le nombre n comme:
appliquer n fois une fonction F a quelque chose:
 $S(S(S(0))) : 3$
 $\text{mère}(\text{mère}(\text{mère}(\text{Jean}))) : 3$
l'écriture de faire 3 fois une action sur un objet


CALCULABILITÉ À LA CHURCH (1903-1995)

LAMBDA CALCUL

- En lambda calcul est fonction/action
- 3: $(\lambda f \lambda x (f(f(f(x))))$
- S: $\lambda n \lambda f \lambda x f(n f x)$
- +: $\lambda n \lambda p n f (p f x)$
- Calculer c'est remplacer la variable par sa valeur... $(\lambda x. (x+3)) 5 \rightarrow 5+3$ [substitution]
- Quelles fonctions sur les entiers peut on définir?
- Les mêmes que celle de Turing!
- Lambda calcul inventé pour formalisé la logique, pour substituer des formules dans d'autres:
axiome appliqué à instance particulière :
 $(\lambda p p \Rightarrow p)(A \& B)$ donner $(A \& B) \Rightarrow (A \& B)$

THÈSE DE CHURCH (1903-1995) TURING (1912- 1954)

- La machine de Turing ou le lambda calcul de Church (équivalents) rendent exactement compte de tout ce qui se calcule automatiquement.
- Le lien avec la logique est assez clair: comme on peut coder par des entiers:
 - Les formules
 - Les preuves
 - On peut concevoir une machine qui vérifie par exemple si une formule est prouvable.



**"CONTRARIWISE, IF IT WAS SO,
IT MIGHT BE; AND IF IT WERE SO, IT
WOULD BE; BUT AS IT ISN'T, IT AIN'T.
THAT'S LOGIC." LEWIS
CARROLL (1832-1898)**

31

**Merci de votre attention.
Des questions?**

QUELQUES RÉFÉRENCES GRAND PUBLIC

- **BD LOGICOMIX** de Apostolos Doxiadis, Christos H. Papadimitriou, Alecos Papadatos, and Annie di Donna Vuibert 2010 *Les principaux logiciens du début du XXe sont mis en scène. Pas technique, mais des annexes permettent d'aller plus loin.*
- **Roman** La déesse des petites victoires de Yannick Granec Editions Anne Carrière. 2012 Prix des libraires 2013. *Gödel vu par sa femme. Très bonne reconstitution de la vie scientifique à Vienne puis à Princeton, avec des personnages comme Einstein (l'unique ami de Gödel), von Neuman, Morgenstern,...Très bon roman per se.*
- **BD** Les rêveurs lunaires, quatre génies qui ont changé l'histoire de Cédric Villani et Edmond Baudoin (Gallimard/ Grasset) 2015 *Science et éthique pendant la 2nde guerre mondiale, avec Turing, les physiciens Heisenberg et Szilard, un général anglais, Hugh Dowding.*
- **Film** de Morten Tyldum avec Benedict Cumberbatch *Imitation games* 2014. *Film sur Turing, aux nombreux prix.*

DEUX OUVRAGES DE VULGARISATION

- **Essai** Les démonstrations et les algorithmes: introduction à la logique et à la calculabilité de Gilles Dowek 2010
Très bon ouvrage de vulgarisation.
- **Essai** Pierre Cassou-Noguès Les démons de Gödel : Logique et folie Seuil 2015 *Sur Gödel comme le roman de Yannick Grannec, en plus précis sur les travaux de Gödel.*