Introduction à l’algorithmique

Intervenants:

Michel Syska, Michel.Syska@inria.fr

Ignasi Sau, Ignasi.Sau@sophia.inria.fr

http://www-sop.inria.fr/mascotte/personnel/Ignasi.Sauvalls

LPSIL Année 2008-2009

Cours original conçu par Hélène Collavizza et Marc Gaetano

http://www.polytech.unice.fr/~helen/LPSIL

Objectifs

- Quels sont les critères pour caractériser un « bon algorithme »
- Notions élémentaires de complexité algorithmique
- Récursivité
- Algorithmes de base sur les listes
- Algorithmes de base sur les arbres
- Algorithmes de base sur les graphes

Exemple 1 : Recherche d'un élément dans une séquence

- Données : une séquence de n entiers distincts e_0, e_1, …., e_{n-1}
  un entier x
- Résultat : -1 si x n'est pas dans la séquence e_0,…., e_{n-1}
  j si $x = e_j$

Recherche de 6 dans {3, 10, 4, 1, 6, 3} $\rightarrow$ 4
Recherche de 31 dans {3, 10, 4, 1, 6, 3} $\rightarrow$ -1

- Principe de l'algorithme : parcourir la séquence en comparant x à e_0 puis à e_1, puis à e_2, ….

  Si l'on trouve un i tel que e_i=x, le résultat est i,

  Si l'on parcourt les e_i jusqu'à i=n, le résultat est -1

Traduction en Java :

```
public class TableauEntier {

   /** méthode pour rechercher l'indice d'un élément
    ** dans un tableau  */

  public static int recherche(int[] tab, int x) {
      int i=0;
      while(i<tab.length && x!=tab[i])
         i++;
      if (i==tab.length) return -1;
      else return i;
  }
```

- Question 1 : l’algorithme est-il correct ?
- Question 2 : l’algorithme termine-t-il ?
- Question 3 : quelle est la place utilisée en mémoire ?
- Question 4 : quel est le temps d’exécution ?

Question 1 : l'algorithme est-il correct ?

```
public static int recherche(int[] tab, int x) {
   /** méthode pour rechercher l'indice d'un élément
   * antécédent : tab est un tableau d'entiers distincts,
   *              x est un entier
   * conséquent : renvoie i si tab[i] == x,
   *                     -1 si x n'est pas dans le tableau
   */
    int i=0;
    while(i<tab.length && x!=tab[i])
        // A1 : ∀ 0 ≤j ≤i, tab[j]!=x
        i++;
    if (i==tab.length)
        // A2 : x n'est pas dans le tableau
        return -1;
    else return i; // A3 : x est à l'indice i
}
```

- A1 est vrai en rentrant dans la boucle (pour i = j = 0)

- A1 est vrai à chaque passage dans la boucle

  Puisque on entre dans la boucle quand tab[i]!=x et que l'on a incrémenté i

- A2 est vrai

  Puisque A1 est vrai à chaque étape de la boucle, si i = tab.length alors

  $\forall$ 0 $\leq$ j $\leq$ tab.length `tab[j]!=x`

  `donc x n'est pas dans le tableau`

- A3 est vrai

  Si i < tab.length alors on est sorti du while avec la condition `x==tab[i]`

  `donc x est à l'indice i`

Question 2 : l'algorithme termine-t-il ?

```
int i=0;
while(i<tab.length && x!=tab[i])
    i++;
if (i==tab.length) return -1;
else return i;
```

au pire i croît de 0 à tab.length qui est une valeur finie

Question 3 : quelle est la place utilisée en mémoire ?

La place nécessaire pour stocker x et tab

Si tab contient n éléments on dit :

Complexité en espace = $\theta(n)$

Question 4 : quel est le temps d'exécution ?

Temps CPU : dépend de la machine

« Temps de l'algorithme » : on fait au plus tab.length passages dans la boucle for

Si le tableau contient n éléments :

Complexité en temps dans le pire des cas = n

Complexité en temps dans le meilleur des cas = 1

Complexité en temps en moyenne = p (n+1)/2 + n (1-p)

(où p est la probabilité pour que x soit dans le tableau)

Algorithmique en Java : du java bien commenté !

- Antécédent : conditions d’entrée
  - quels types de données sont traités ?

    entiers, chaînes de caractères, réels, tableau d’entiers, …
  - conditions sur les données ?

    entiers positifs, non nuls, tableau d’entiers triés par ordre croissant, décroissant, …
- Conséquent : que renvoie la méthode (return) ? quelles modifications ont été apportées sur les données (void) ?

  renvoie l’ indice de l’élément

  renvoie le maximum des éléments du tableau,

  ordonne les éléments du tableau par ordre croissant, …
- Assertions : propriétés liant les données d’entrée et les variables de la méthode.

  Permettent de justifier la correction : si l’antécédent est vérifié, après exécution de la méthode, le conséquent est vérifié

  Permettent de justifier la terminaison : si l’antécédent est vérifié, le calcul s’arrêtera
- Complexité en temps dans le pire des cas

Exemple 2 : Recherche d'un élément dans une séquence ordonnée

- Données : une séquence de n entiers distincts e_0, e_1, …., e_{n-1} ordonnés par ordre croissant

  un entier x
- Résultat : -1 si x n'est pas dans la séquence e_0, e_1,…, e_{n-1}

  i si x = e_i

  Recherche de 6 dans {3, 4, 6, 10, 34} $\rightarrow$ 2

  Recherche de 31 dans {3, 4, 6, 10, 34} $\rightarrow$ -1

- Solution 1 : le même algorithme que dans le cas où les éléments ne sont pas ordonnés.

- Solution 2 : utiliser le fait que les éléments sont ordonnés pour appliquer le paradigme « diviser pour régner »

  - *Principe* : comparer x à l'élément m qui est au milieu de la partie du tableau considérée.

    Si x = m renvoyer l'indice de m

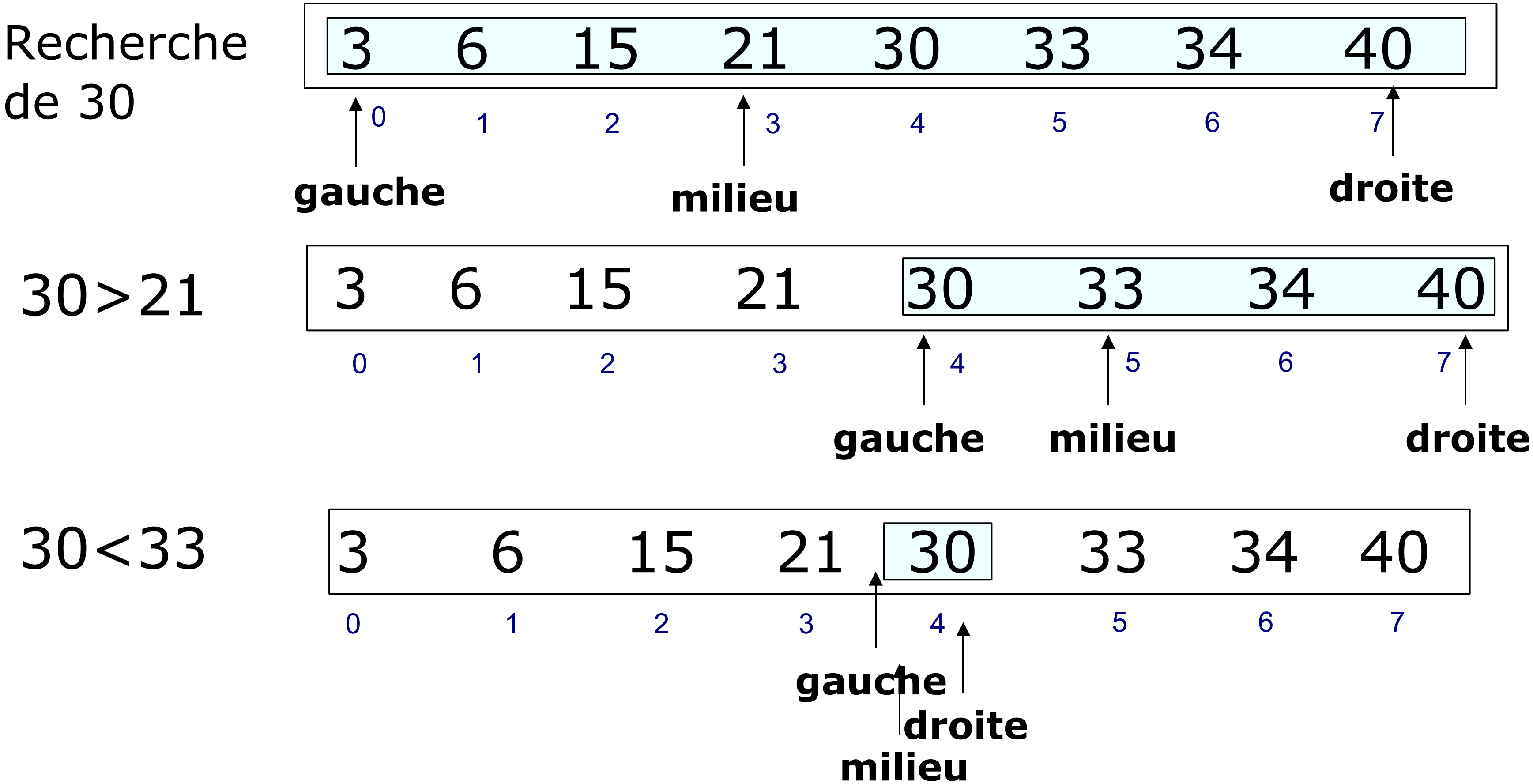
    Si x < m chercher x dans la partie du tableau à gauche de m

    Si x > m chercher x dans la partie du tableau à droite de m

    Si la partie considérée est vide, renvoyer –1

< m	m	> m

  - *Avantage* : meilleure complexité en temps (i.e en $O(\log n)$)



30 est trouvé; il est à l'indice 4

```java
/** pour rechercher l'indice d'un élément
* antécédent : tab est un tableau d'entiers
*              distincts ordonné par ordre croissant,
*              x est un entier
* conséquent : renvoie i si tab[i] == x,
*              -1 si x n'est pas dans le tableau
* complexité : O(log n)
*/
public int rechercheVite(int[] tab, int x) {
   int gauche = 0;
   int droite = tab.length - 1;
   int milieu;
```

```
  while (gauche <= droite) {
       // A1 : ∀ j < gauche tab[j]!=x
       //      ∀ j > droite tab[j]!=x
       milieu  = (gauche + droite) / 2 ;
       if (x==tab[milieu])
           // A2 : x est à l'indice milieu
           return milieu;
       if (x<tab[milieu]) droite = milieu - 1;
           else gauche = milieu + 1;
       }
  // A3 : x n'est pas dans le tableau
   return -1;
}
```

A VOUS

- Que se passe-t-il si les éléments du tableau ne sont pas distincts dans le cas de la recherche simple ?

21	6	2	21	21	33	21	40
0	1	2	3	4	5	6	7

- Que se passe-t-il si les éléments du tableau ne sont pas distincts dans le cas de la recherche dichotomique ?

3	6	21	21	21	33	34	40
0	1	2	3	4	5	6	7

- Comment peut-on prendre en compte le fait que les éléments sont triés dans la recherche simple ?

A VOUS : tri par insertion

- Données : un tableau d'entiers
- Résultat : le tableau est trié par ordre croissant
- Algorithme : respecter l'assertion de boucle A1

6	3	21	62	68	30	33	4	1	40	70
0	1	2	3							tab.length-1

```
public static void triInsertion(int[] tab) {
        for (int i=1; i<tab.length;i++) {
```

3	6	21	30	62	68	33	4	1	40	70
0	1	2			i-1	i				tab.length-1

```
            // A1: les éléments de tab de 0 à i-1 sont triés par ordre croissant
            //     tab contient les mêmes valeurs qu'à l'état initial
        }
}
```

Plan

- Complexité des algorithmes
  - Bases mathématiques
    - sommations
    - logarithmes
  - Notations asymptotiques
  - Évaluation de la complexité d'algorithmes itératifs

- Induction et récursivité
  - Exemple 1 : palindrome
  - Exemple 2 : recherche d'un élément dans une liste ordonnée
  - Exemple 3 : factorielle
  - schémas d'induction
    - les entiers positifs
    - les listes
    - les arbres binaires
  - correction et terminaison des algorithmes récursifs
  - relations de récurrence et évaluation de la complexité d'algorithmes récursifs

- Listes
  - les listes chaînées
  - les listes chaînées ordonnées

- Les arbres binaires
  - les arbres binaires de recherche
  - les AVL

- Introduction aux graphes
  - Définition et exemples d'utilisation
  - Algorithmes de parcours élémentaire

Bibliographie

- T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest : « Introduction à l'algorithmique », Dunod.
- S. Baase, A. V. Gelder : « Computers algorithms : Introduction to Design & Analysis », Addison Wesley
- U. Mander : « Introduction to algorithms, A Creative Approach », Addison Wesley

Introduction à l'algorithmique

Intervenants:
Michel Syska, Michel.Syska@inria.fr

Ignasi Sau, Ignasi.Sau@sophia.inria.fr
http://www-sop.inria.fr/mascotte/personnel/Ignasi.Sauvalls

LPSIL Année 2008-2009

Cours original conçu par Hélène Collavizza et Marc Gaetano

http://www.polytech.unice.fr/~helen/LPSIL

Objectifs

- Quels sont les critères pour caractériser un « bon algorithme »
- Notions élémentaires de complexité algorithmique
- Récursivité
- Algorithmes de base sur les listes
- Algorithmes de base sur les arbres
- Algorithmes de base sur les graphes

Exemple 1 : Recherche d'un élément dans une séquence

- Données : une séquence de n entiers distincts e_0, e_1, …., e_{n-1}
  un entier x
- Résultat : -1 si x n'est pas dans la séquence e_0,…., e_{n-1}
  j si $x = e_j$

Recherche de 6 dans {3, 10, 4, 1, 6, 3} $\rightarrow$ 4
Recherche de 31 dans {3, 10, 4, 1, 6, 3} $\rightarrow$ -1

- Principe de l'algorithme : parcourir la séquence en comparant x à e_0 puis à e_1, puis à e_2, ….

  Si l'on trouve un i tel que e_i=x, le résultat est i,

  Si l'on parcourt les e_i jusqu'à i=n, le résultat est -1

Traduction en Java :

```
public class TableauEntier {

   /** méthode pour rechercher l'indice d'un élément
    ** dans un tableau  */

  public static int recherche(int[] tab, int x) {
      int i=0;
      while(i<tab.length && x!=tab[i])
         i++;
      if (i==tab.length) return -1;
      else return i;
  }
```

- Question 1 : l’algorithme est-il correct ?
- Question 2 : l’algorithme termine-t-il ?
- Question 3 : quelle est la place utilisée en mémoire ?
- Question 4 : quel est le temps d’exécution ?

Question 1 : l'algorithme est-il correct ?

```
public static int recherche(int[] tab, int x) {
   /** méthode pour rechercher l'indice d'un élément
   * antécédent : tab est un tableau d'entiers distincts,
   *              x est un entier
   * conséquent : renvoie i si tab[i] == x,
   *                     -1 si x n'est pas dans le tableau
   */
    int i=0;
    while(i<tab.length && x!=tab[i])
        // A1 : ∀ 0 ≤j ≤i, tab[j]!=x
        i++;
    if (i==tab.length)
        // A2 : x n'est pas dans le tableau
        return -1;
    else return i; // A3 : x est à l'indice i
}
```

- A1 est vrai en rentrant dans la boucle (pour i = j = 0)
- A1 est vrai à chaque passage dans la boucle
  Puisque on entre dans la boucle quand tab[i]!=x et que l'on a incrémenté i
- A2 est vrai
  Puisque A1 est vrai à chaque étape de la boucle, si i = tab.length alors
  $\forall$ `0 ≤ j ≤` tab.length `tab[j]!=x`
  `donc x n'est pas dans le tableau`
- A3 est vrai
  Si i < tab.length alors on est sorti du while avec la condition `x==tab[i]`
  `donc x est à l'indice i`

Question 2 : l'algorithme termine-t-il ?

```
int i=0;
while(i<tab.length && x!=tab[i])
    i++;
if (i==tab.length) return -1;
else return i;
```

au pire i croît de 0 à tab.length qui est une valeur finie

Question 3 : quelle est la place utilisée en mémoire ?

La place nécessaire pour stocker x et tab

Si tab contient n éléments on dit :

Complexité en espace = $\theta(n)$

Question 4 : quel est le temps d'exécution ?

Temps CPU : dépend de la machine

« Temps de l'algorithme » : on fait au plus tab.length passages dans la boucle for

Si le tableau contient n éléments :

Complexité en temps dans le pire des cas = n

Complexité en temps dans le meilleur des cas = 1

Complexité en temps en moyenne = $p\ (n+1)/2 + n\ (1-p)$

(où p est la probabilité pour que x soit dans le tableau)

Algorithmique en Java : du java bien commenté !

- Antécédent : conditions d'entrée
  - quels types de données sont traités ?
    entiers, chaînes de caractères, réels, tableau d'entiers, …
  - conditions sur les données ?
    entiers positifs, non nuls, tableau d'entiers triés par ordre croissant, décroissant, …
- Conséquent : que renvoie la méthode (return) ? quelles modifications ont été apportées sur les données (void) ?
  renvoie l' indice de l'élément
  renvoie le maximum des éléments du tableau,
  ordonne les éléments du tableau par ordre croissant, …
- Assertions : propriétés liant les données d'entrée et les variables de la méthode.
  Permettent de justifier la correction : si l'antécédent est vérifié, après exécution de la méthode, le conséquent est vérifié
  Permettent de justifier la terminaison : si l'antécédent est vérifié, le calcul s'arrêtera
- Complexité en temps dans le pire des cas

On parle aussi de pre ou post conditions

Exemple 2 : Recherche d'un élément dans une séquence ordonnée

- Données : une séquence de n entiers distincts e_0, e_1, …., e_{n-1} ordonnés par ordre croissant
  un entier x
- Résultat : -1 si x n'est pas dans la séquence e_0, e_1,…, e_{n-1}
  i si $x = e_i$

  Recherche de 6 dans {3, 4, 6, 10, 34} → 2
  Recherche de 31 dans {3, 4, 6, 10, 34} → -1

- Solution 1 : le même algorithme que dans le cas où les éléments ne sont pas ordonnés.

- Solution 2 : utiliser le fait que les éléments sont <u>ordonnés</u> pour appliquer le paradigme « diviser pour régner »

  - *Principe* : comparer x à l'élément m qui est au milieu de la partie du tableau considérée.

    Si x = m renvoyer l'indice de m

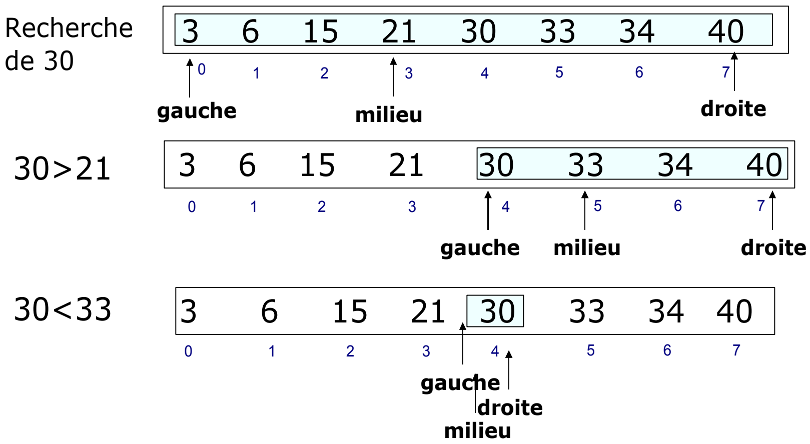
    Si x < m chercher x dans la partie du tableau à gauche de m

    Si x > m chercher x dans la partie du tableau à droite de m

    Si la partie considérée est vide, renvoyer −1

< m	m	> m

  - *Avantage* : meilleure complexité en temps (i.e en $O(\log n)$)



30 est trouvé; il est à l'indice 4

```java
/** pour rechercher l'indice d'un élément
* antécédent : tab est un tableau d'entiers
*              distincts ordonné par ordre croissant,
*               x est un entier
* conséquent : renvoie i si tab[i] == x,
*              -1 si x n'est pas dans le tableau
* complexité : O(log n)
*/
public int rechercheVite(int[] tab, int x) {
   int gauche = 0;
   int droite = tab.length - 1;
   int milieu;
```

```
   while (gauche <= droite) {
      // A1  : ∀ j < gauche tab[j]!=x
      //       ∀ j > droite tab[j]!=x
      milieu  = (gauche + droite) / 2 ;
      if (x==tab[milieu])
         // A2 : x est à l'indice milieu
         return milieu;
      if (x<tab[milieu]) droite = milieu - 1;
         else gauche = milieu + 1;
      }
   // A3 : x n'est pas dans le tableau
   return -1;
}
```

A VOUS

- Que se passe-t-il si les éléments du tableau ne sont pas distincts dans le cas de la recherche simple ?

21	6	2	21	21	33	21	40
0	1	2	3	4	5	6	7

- Que se passe-t-il si les éléments du tableau ne sont pas distincts dans le cas de la recherche dichotomique ?

3	6	21	21	21	33	34	40
0	1	2	3	4	5	6	7

- Comment peut-on prendre en compte le fait que les éléments sont triés dans la recherche simple ?

A VOUS : tri par insertion

- Données : un tableau d'entiers
- Résultat : le tableau est trié par ordre croissant
- Algorithme : respecter l'assertion de boucle A1

6	3	21	62	68	30	33	4	1	40	70
0	1	2	3							tab.length-1

```
public static void triInsertion(int[] tab) {
        for (int i=1; i<tab.length;i++) {

                 3 6 21 30 62 68 | 33 4 1 40 70
                 0  1  2      i-1    i        tab.length-1
                 // A1: les éléments de tab de 0 à i-1 sont triés par ordre croissant
                 //       tab contient les mêmes valeurs qu'à l'état initial
        }
}
```

Plan

- Complexité des algorithmes
  - Bases mathématiques
    - sommations
    - logarithmes
  - Notations asymptotiques
  - Évaluation de la complexité d'algorithmes itératifs
- Induction et récursivité
  - Exemple 1 : palindrome
  - Exemple 2 : recherche d'un élément dans une liste ordonnée
  - Exemple 3 : factorielle
  - schémas d'induction
    - les entiers positifs
    - les listes
    - les arbres binaires
  - correction et terminaison des algorithmes récursifs
  - relations de récurrence et évaluation de la complexité d'algorithmes récursifs

- Listes
  - les listes chaînées
  - les listes chaînées ordonnées

- Les arbres binaires
  - les arbres binaires de recherche
  - les AVL

- Introduction aux graphes
  - Définition et exemples d'utilisation
  - Algorithmes de parcours élémentaire

Bibliographie

- T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest : « Introduction à l'algorithmique », Dunod.
- S. Baase, A. V. Gelder : « Computers algorithms : Introduction to Design & Analysis », Addison Wesley
- U. Mander : « Introduction to algorithms, A Creative Approach », Addison Wesley