Mathématiques pour l'Optimisation

LP SIL

I. Sau et C. Molle

Plan du cours

- **Séance 1 :** Introduction à l'Optimisation, Modélisation de problèmes en Programmation Linéaire, et Résolution graphique
- **Séance 2 :** Algorithme du Simplexe
- **Séance 3 :** Notion d'optimalité et Dualité

Objectifs

- Introduire les différents aspects de l'optimisation dans le cadre de l'optimisation linéaire.
- Présenter les outils et les algorithmes de base en optimisation linéaire :
  - Apprendre comment modéliser un problème touchant divers domaines.
  - Savoir résoudre un problème simple d'optimisation linéaire sous contraintes.

Introduction à l'Optimisation

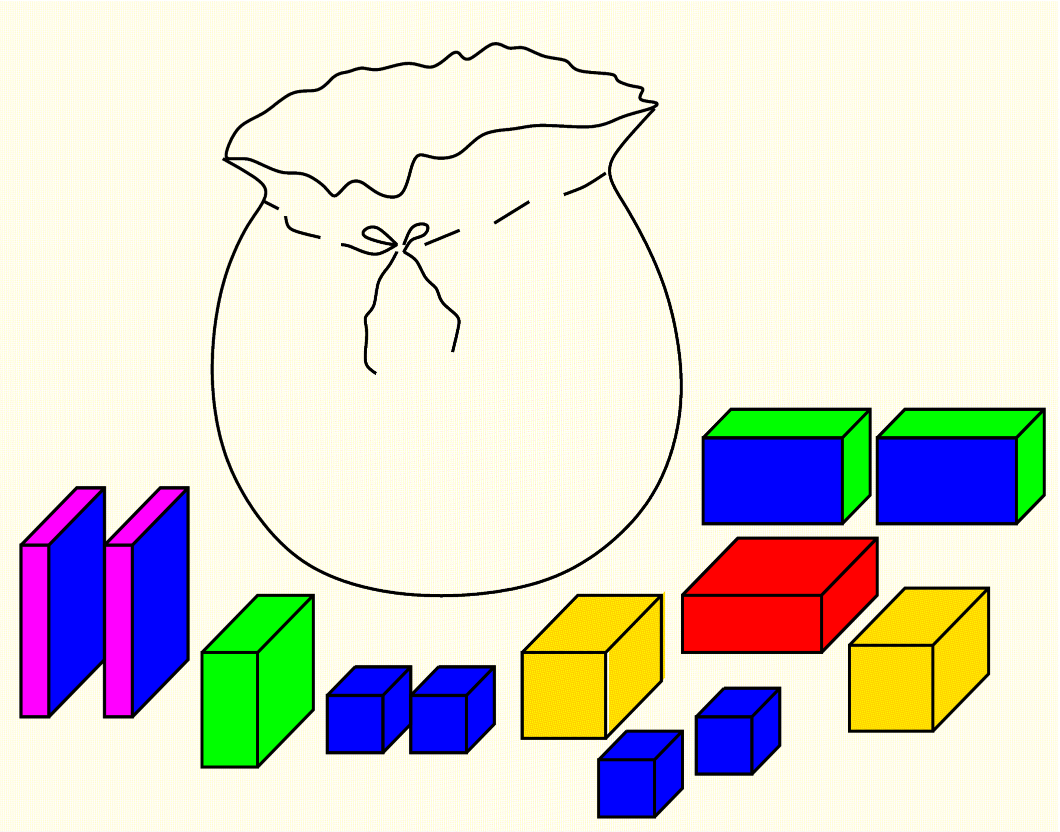
- **DÉFINITIONS**
  - Application de méthodes, techniques, instruments scientifiques pour modéliser et résoudre les problèmes dans tous les domaines.
  - Approche généraliste qui relève des sciences de la décision et qui combine :
    - savoir-faire pratique (comment formuler un problème d'optimisation, comment résoudre un problème à l'aide d'algorithmes numériques)
    - connaissances théoriques (comment caractériser les solutions optimales, que nous apprennent les conditions d'optimalité sur les propriétés qualitatives et quantitatives des solutions)

Introduction à l'Optimisation

- **APPLICATIONS**
  - Applications aux problèmes réels de grande envergure
    - arrivée des processeurs rapides
    - développement des bases de données
    - techniques d ’optimisation appliquées à de nombreux domaines
  - Domaines d’utilisation :
    - militaire
    - transport (aéroport, route, trajet, livraison, horaire)
    - contrôle des réseaux (infrastructures, distribution)
    - etc.

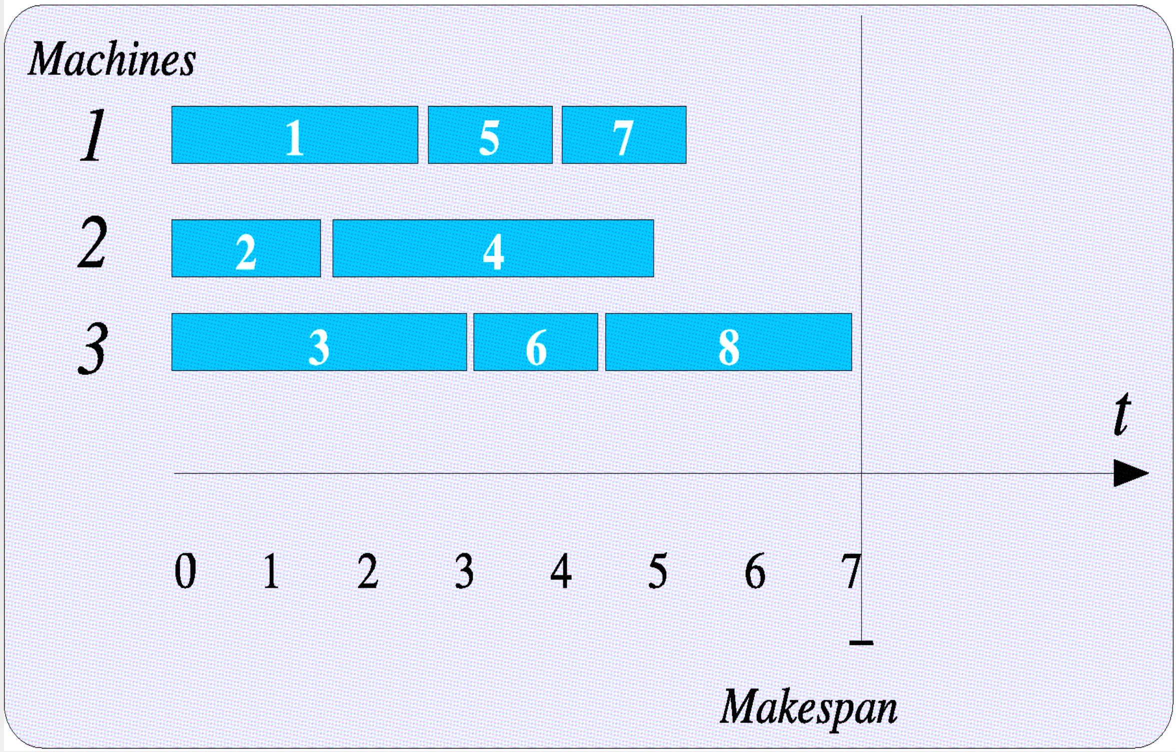
Problème du sac à dos

- **Données** :
  - un sac à dos de poids 15 kg
  - 12 objets ayant chacun :
    - un poids
    - une valeur
- **Objectif :** quelles objets choisir afin de maximiser la valeur emportée tout en ne dépassant pas les 15 kg autorisés ?



Ordonnancement

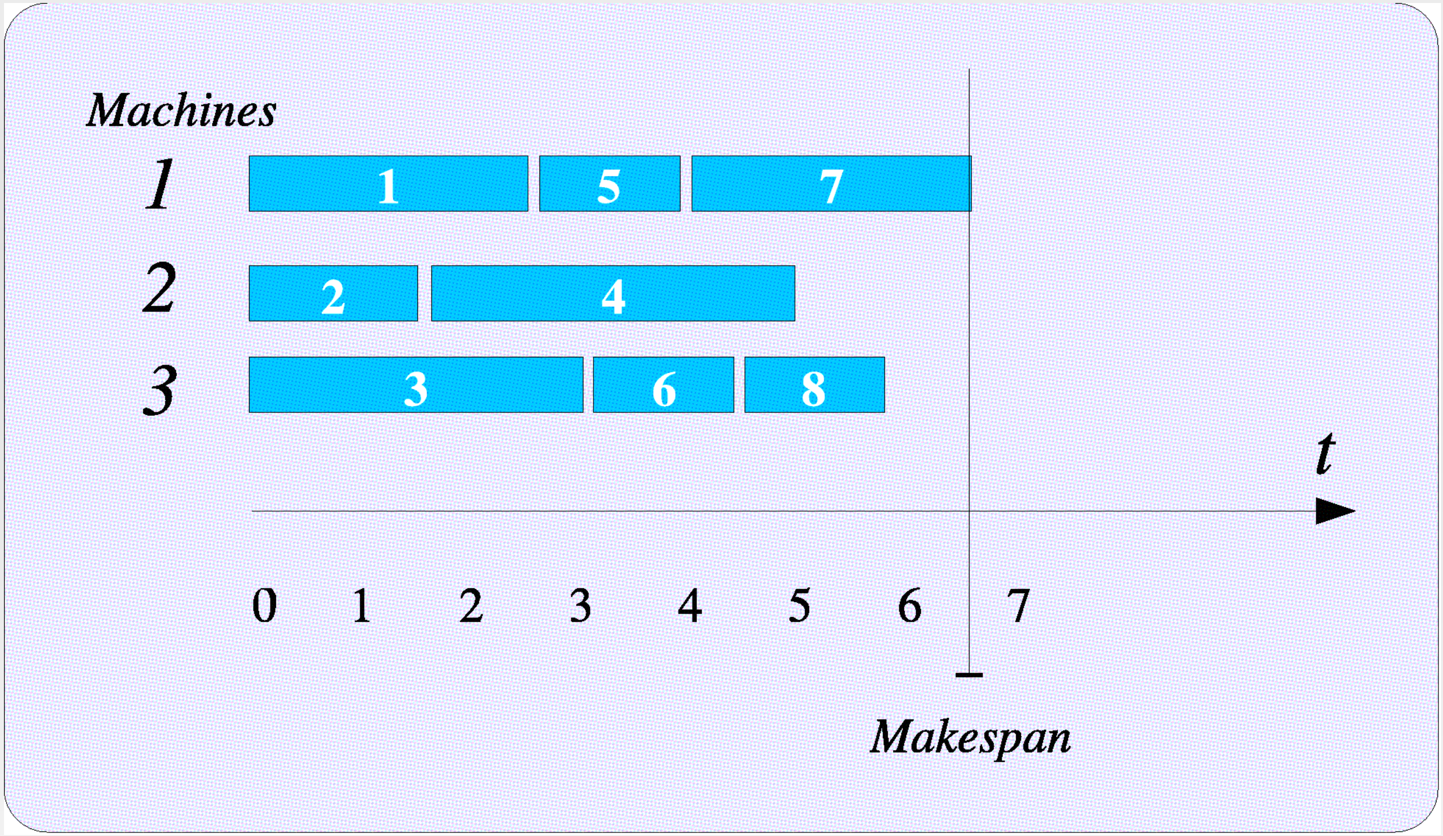
- 3 machines
- 8 tâches
- Chaque tâche utilise x unités de temps



Objectif : affecter les tâches aux machines de manière à minimiser le temps utilisé

- Ici, les 8 tâches sont accomplies au bout de 7 unités de temps sur 3 machines.

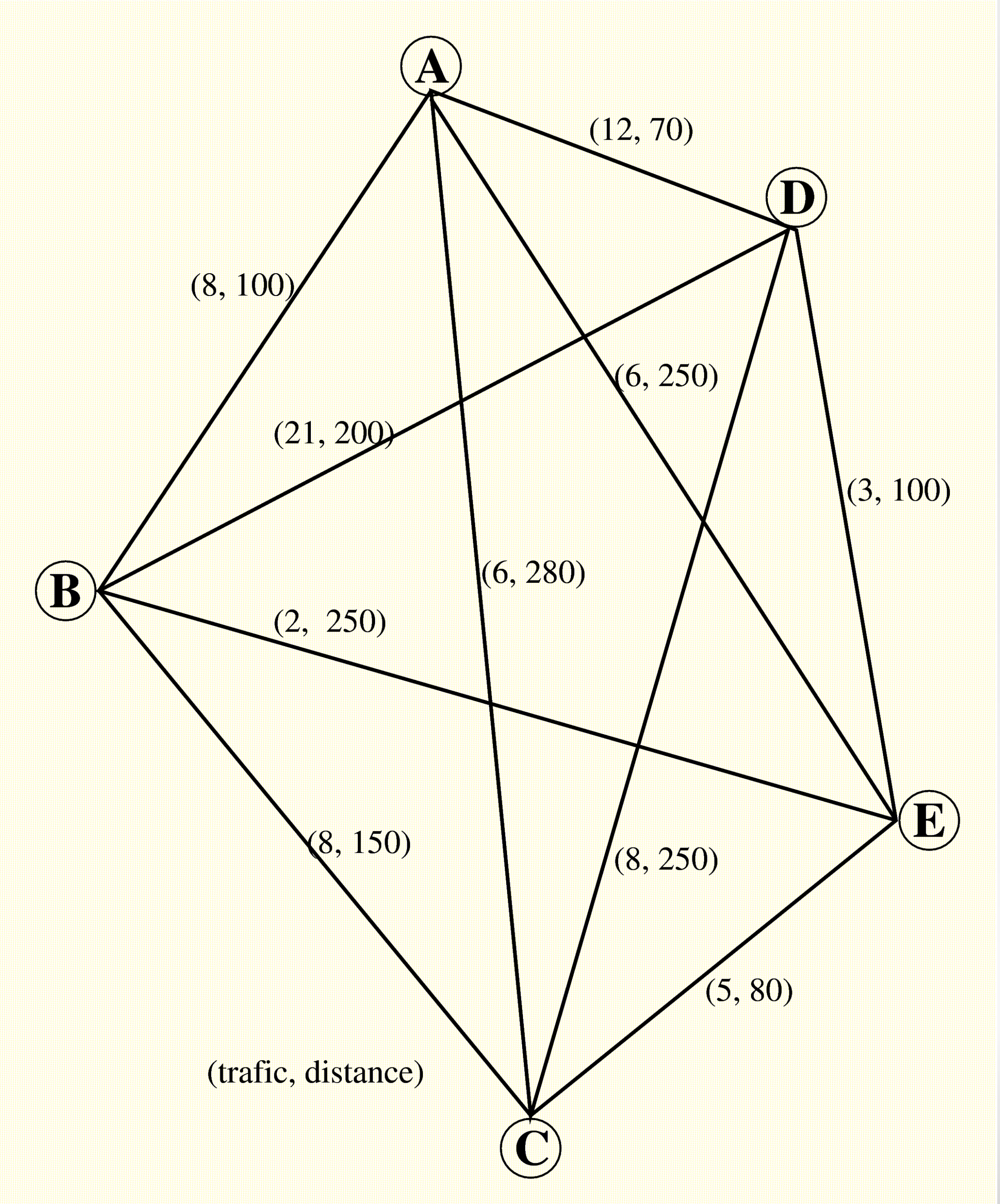
Ordonnancement



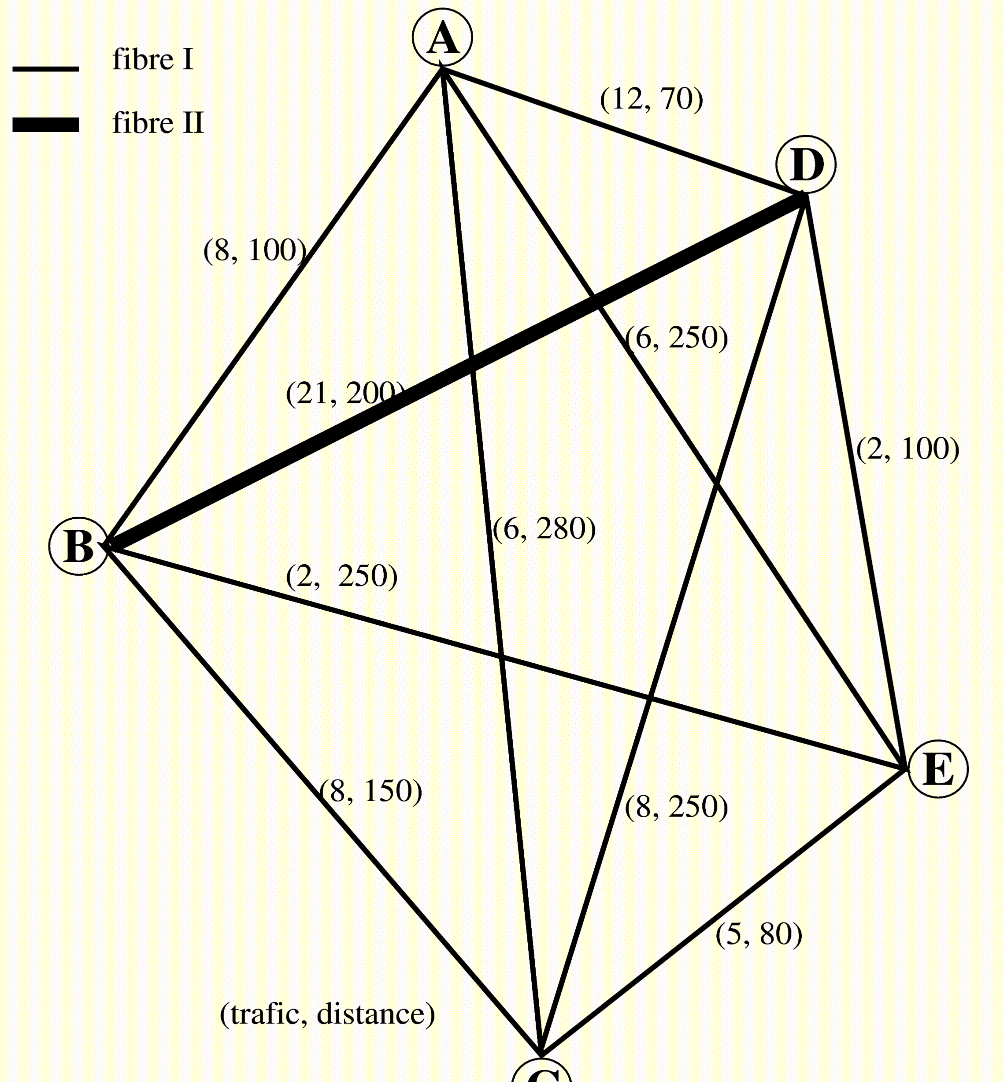
- et là, les 8 tâches sont accomplies au bout de 6,5 unités de temps : OPT ? Il y a m^n possibilités

Conception de réseau

- **Données** :
  - villes (A, B ...),
  - matrice de trafic,
  - matrice de distance,
  - fibre optique :
    - I,   : cap. 16, coût 100,
    - II : cap. 32, coût 175,
- **Objectif :** Installer un réseau de coût minimum écoulant tout le trafic.

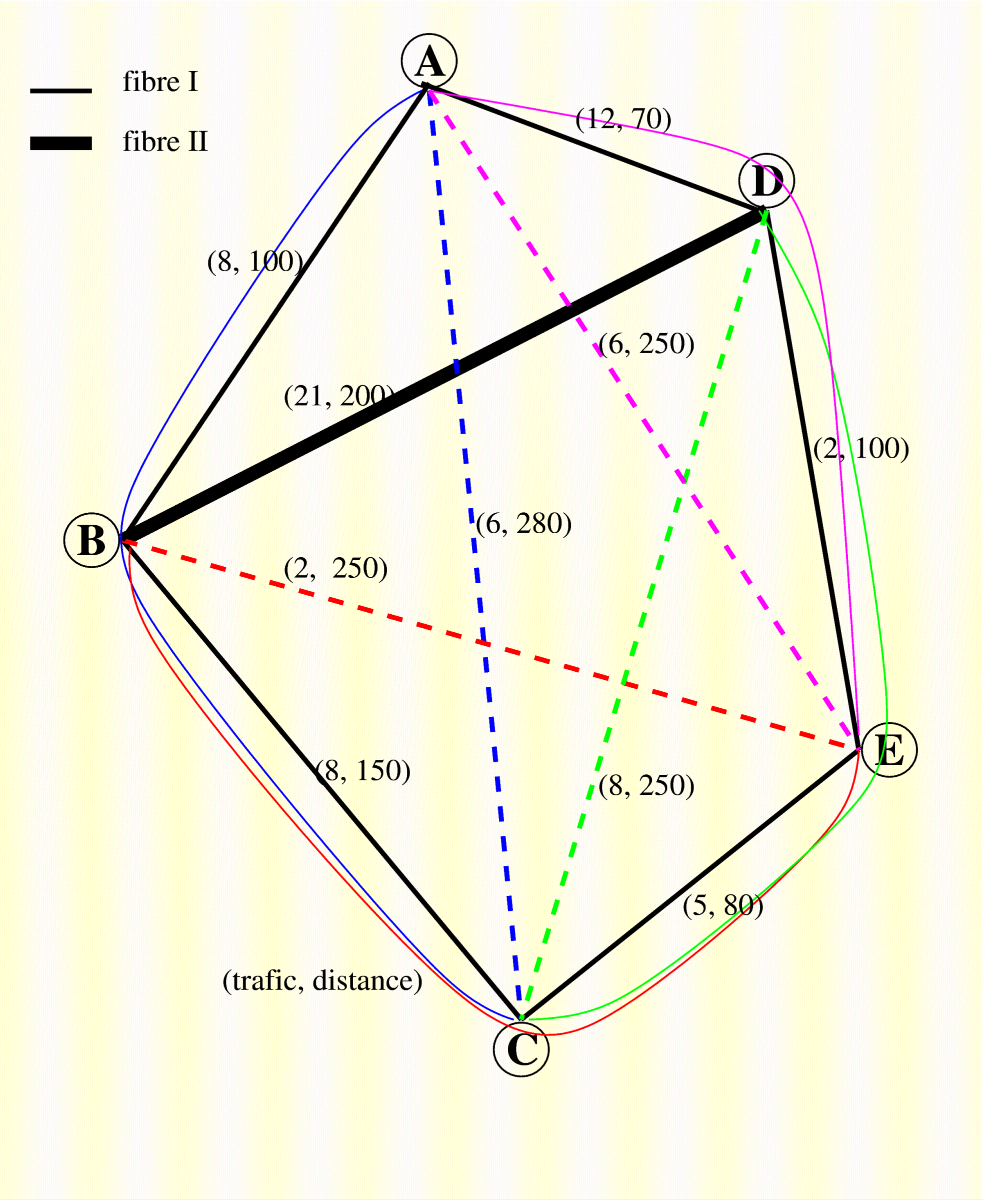


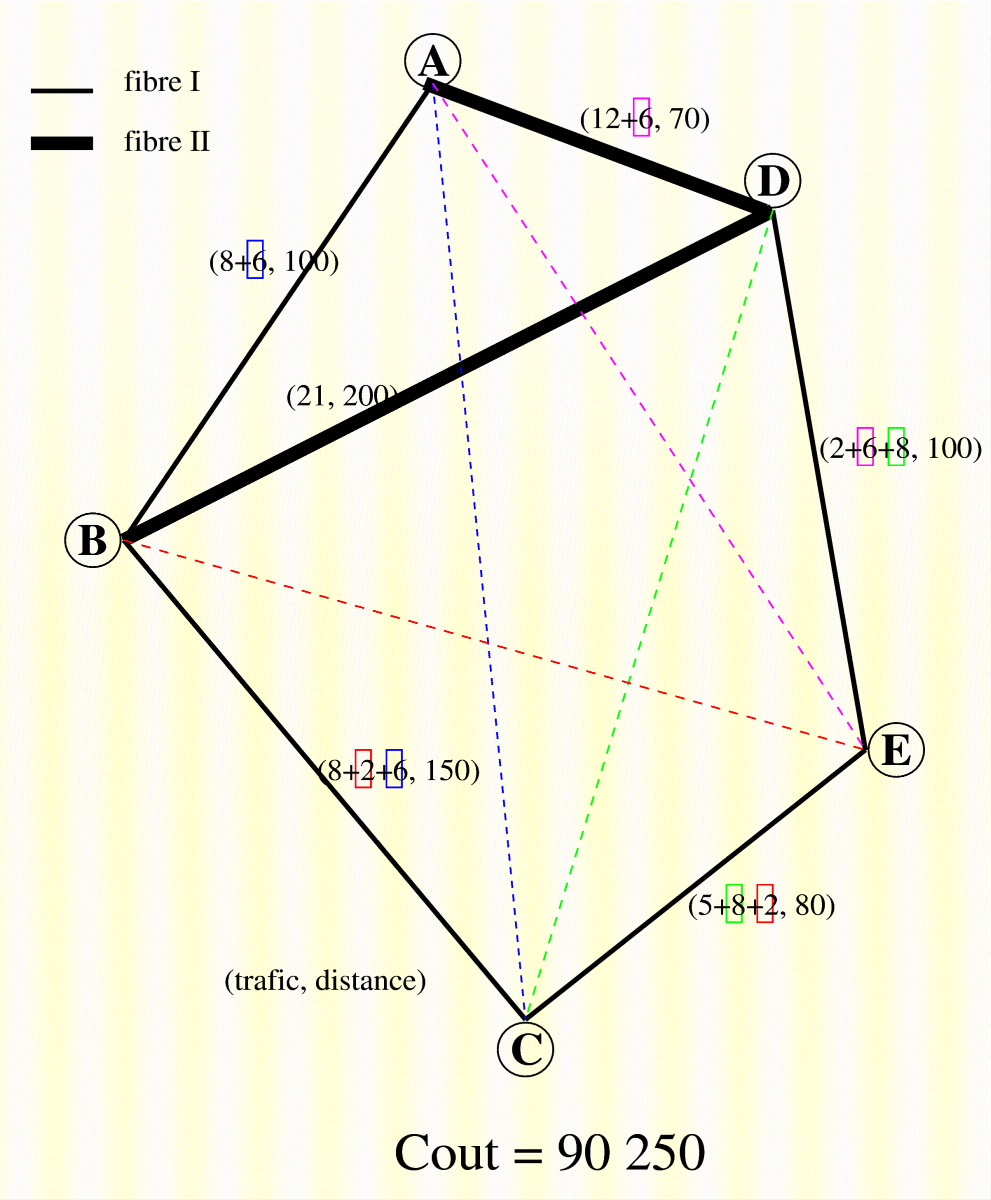
Conception de réseau



Cout = 188 000

Conception de réseau





Problèmes Difficiles

- **Objectif :** Minimiser ou Maximiser une fonction de coût
- Choisir la meilleure solution parmi 2n ou n! possibles : on ne peut les énumérer toutes
- Complexité des problèmes (voir cours Algo et Complexité) : P, NP, NP-Complet
- La plupart des problèmes étudiés sont NP-Complets : on cherche des approximations
- Trouver une solution : certifier sa qualité par rapport à la solution optimale OPT
- Sinon on peut utiliser des (meta) heuristiques

La Programmation Linéaire

- Problème d’optimisation consistant à :
  - maximiser (ou minimiser) une fonction objectif linéaire
  - de n variables de décision
  - soumises à un ensemble de contraintes exprimées sous forme d’équations ou d’inéquations linéaires
- La terminologie est due à George B. Dantzig, inventeur de l’algorithme du simplexe (1947)

Mise en forme Mathématique

- **Définir les variables de décision**
  - ensemble des variables qui régissent la situation à modéliser
  - variables réelles, entières, binaires
- **Préciser la fonction objectif**
  - fonction mathématique composée des variables de décision qui représente le modèle physique modélisé
  - fonction linéaire
- **Préciser les contraintes du problème**
  - ensemble des paramètres qui limitent le modèle réalisable
  - équations ou inéquations composées des variables de décision
- **Préciser les paramètres du modèle**
  - constantes associées aux contraintes et à la fonction objective

Formulation mathématique

- **Fonction Objectif**
  - Maximiser ou minimiser $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$
- **Contraintes**
  - $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_1$
  - $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_2$
  - $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_m$
- **Contraintes de non-négativité**
  - $x_j \geq 0$; $j = 1, 2, 3, \ldots n$
- **avec**
  - x_j variables de décision (inconnues)
  - a_{ij}, b_i, c_j paramètres du programme linéaire

Terminologie de la solution

- **Solution réalisable**
  - Solution où toutes les contraintes du modèle sont satisfaites
- **Zone de solution**
  - Ensemble de toutes les solutions réalisables
- **Solution optimale**
  - Solution réalisable où la fonction objectif atteint la meilleure valeur, maximum ou minimum
  - Plusieurs solutions optimales possibles

Terminologie du problème

- **Problème irréalisable**
  - s'il n'admet pas de solutions réalisables
- **Problème non borné**
  - si aucune des solutions réalisables n'est optimale
- **Problème sous forme standard**

Max $(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n)$

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i;\ i = 1, 2, 3, \ldots m$

$x_j \geq 0\ ;\ j = 1, 2, 3, \ldots n$

Exemple

$$MAX: 350X_1 + 300X_2$$

$$
\begin{aligned}
\text{T.Q.:}\quad & 1X_1 + 1X_2 <= 200 \\
& 9X_1 + 6X_2 <= 1566 \\
& 12X_1 + 16X_2 <= 2880 \\
& X_1 >= 0 \\
& X_2 >= 0
\end{aligned}
$$

Solution Réalisable

Posons $X_2 = 0$

1ère contrainte : $1X_1 <= 200$

2è contrainte : $9X_1 <=1566$ ou $X_1 <=174$

3è contrainte : $12X_1 <= 2880$ ou $X_1 <= 240$

Si $X_2=0$, la valeur maximale de X_1 est 174 et la valeur de l'objective est:

(350 * **174**) + (300 * **0**) = **60 900**

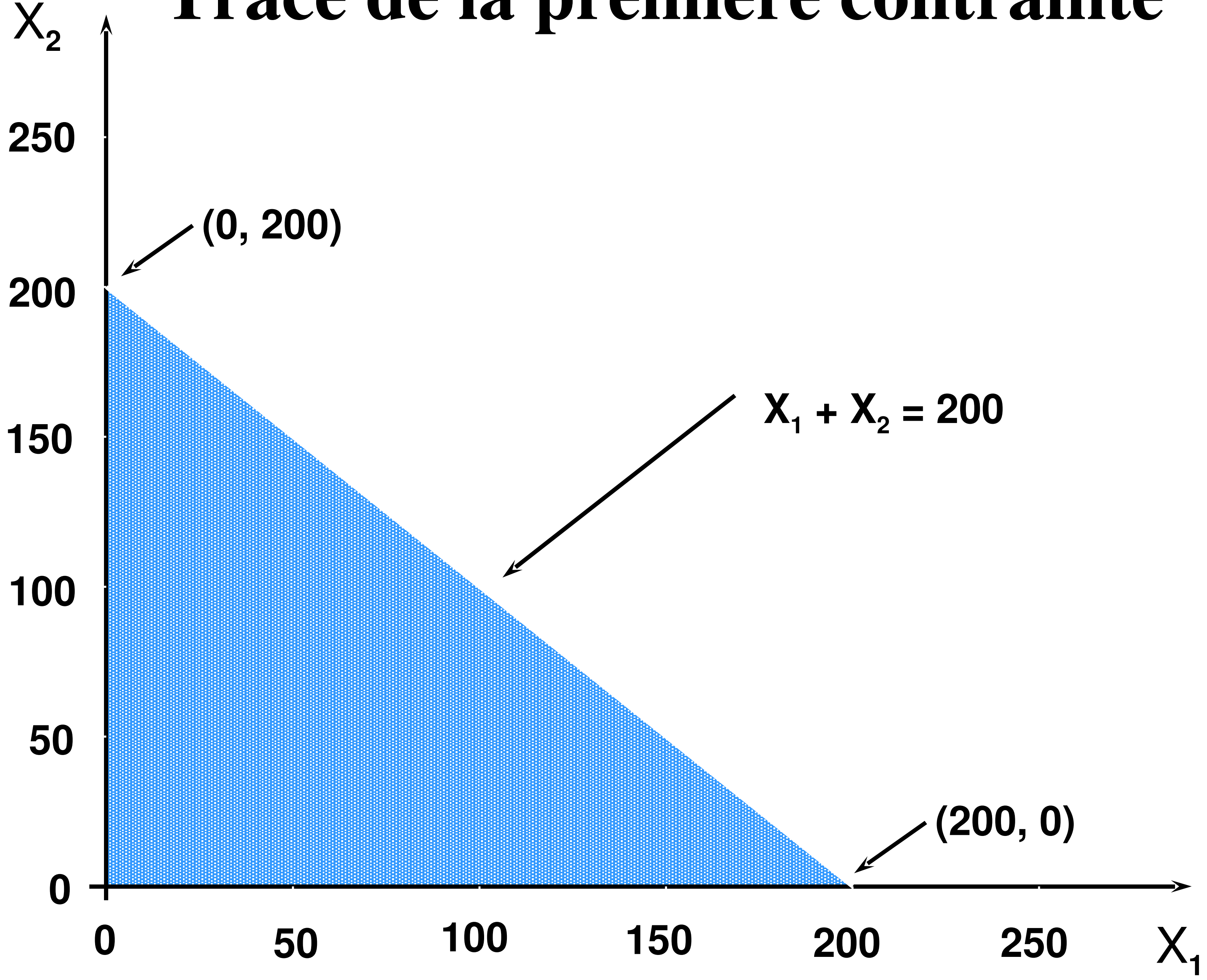
C'est une solution possible mais est-elle *optimale*?

Non!

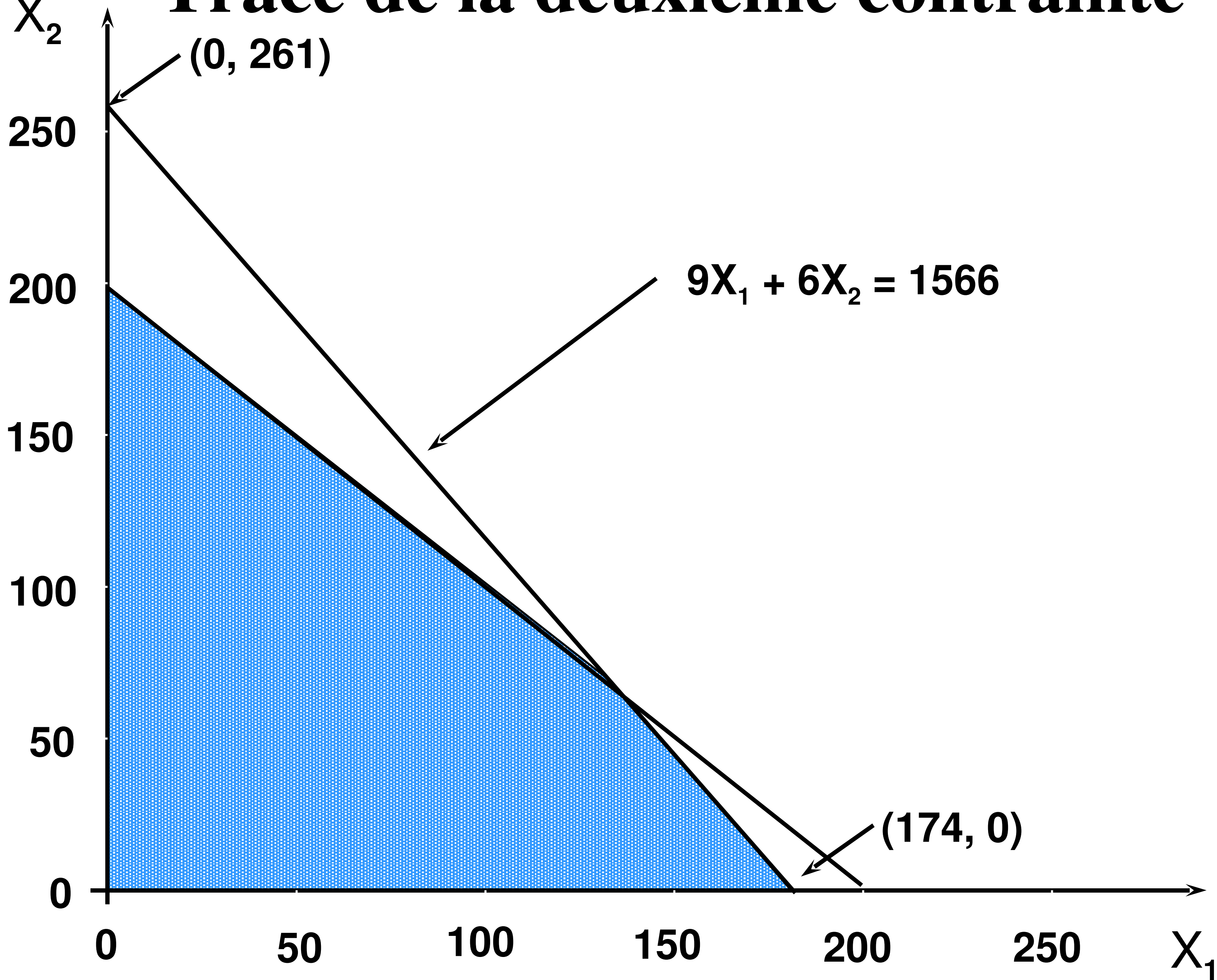
Résolution problème PL: approche graphique

- Les contraintes d'un programme linéaire définissent une zone de solution.
- Le meilleur point dans la zone de solution correspond à la solution optimale.
- Pour des problèmes à 2 variables, il est facile de tracer la zone de solution et de trouver la solution optimale graphiquement.

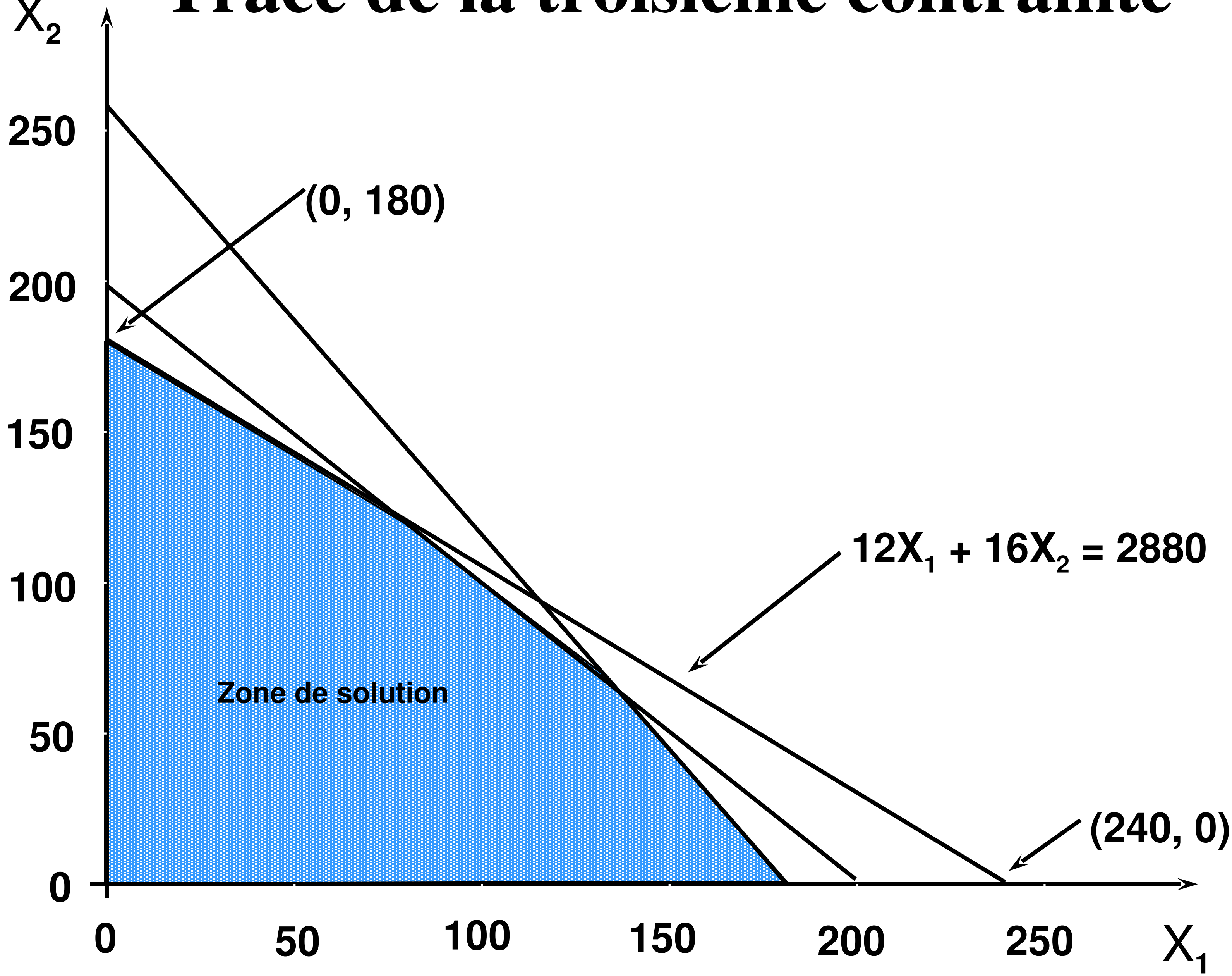
Tracé de la première contrainte



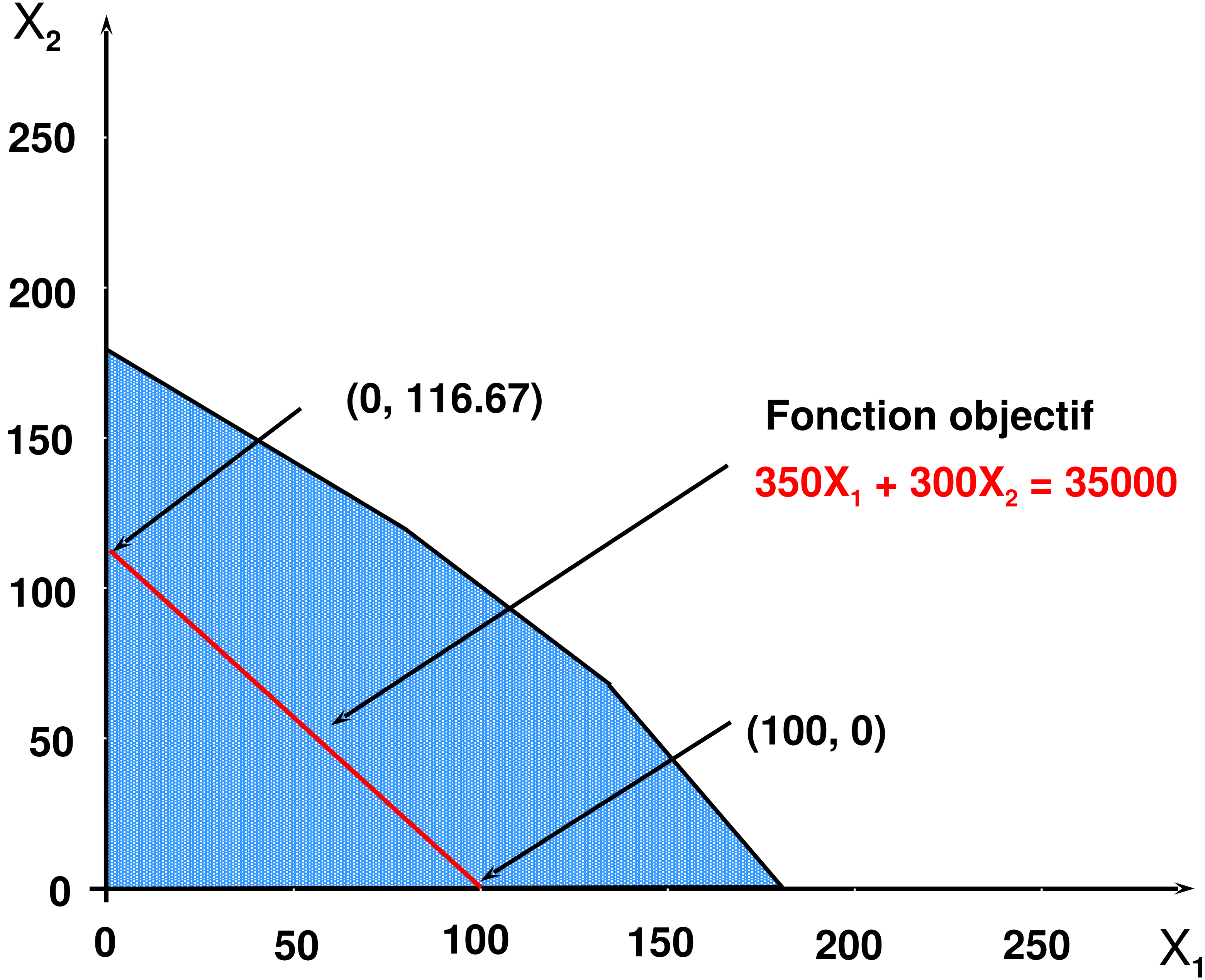
Tracé de la deuxième contrainte



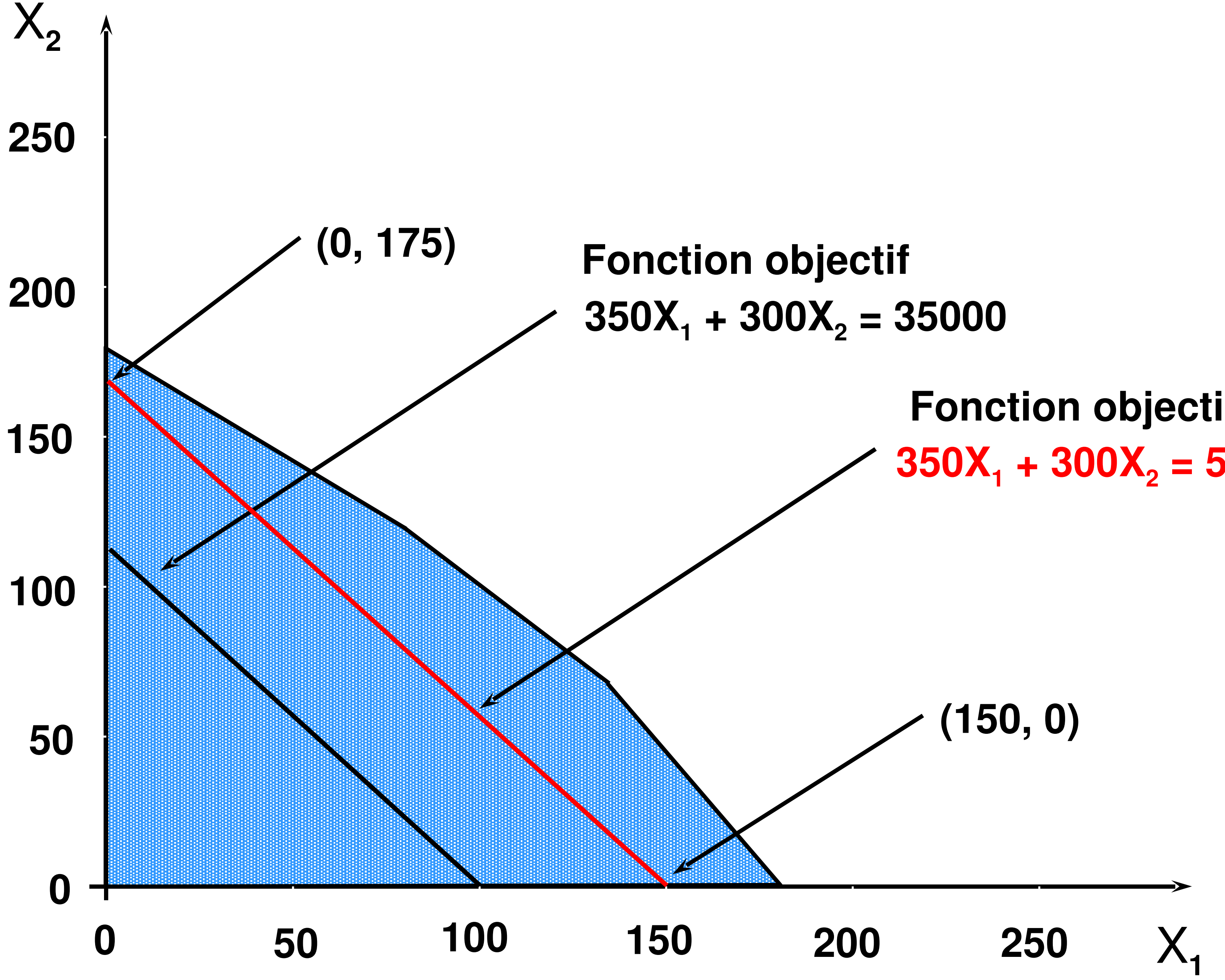
Tracé de la troisième contrainte



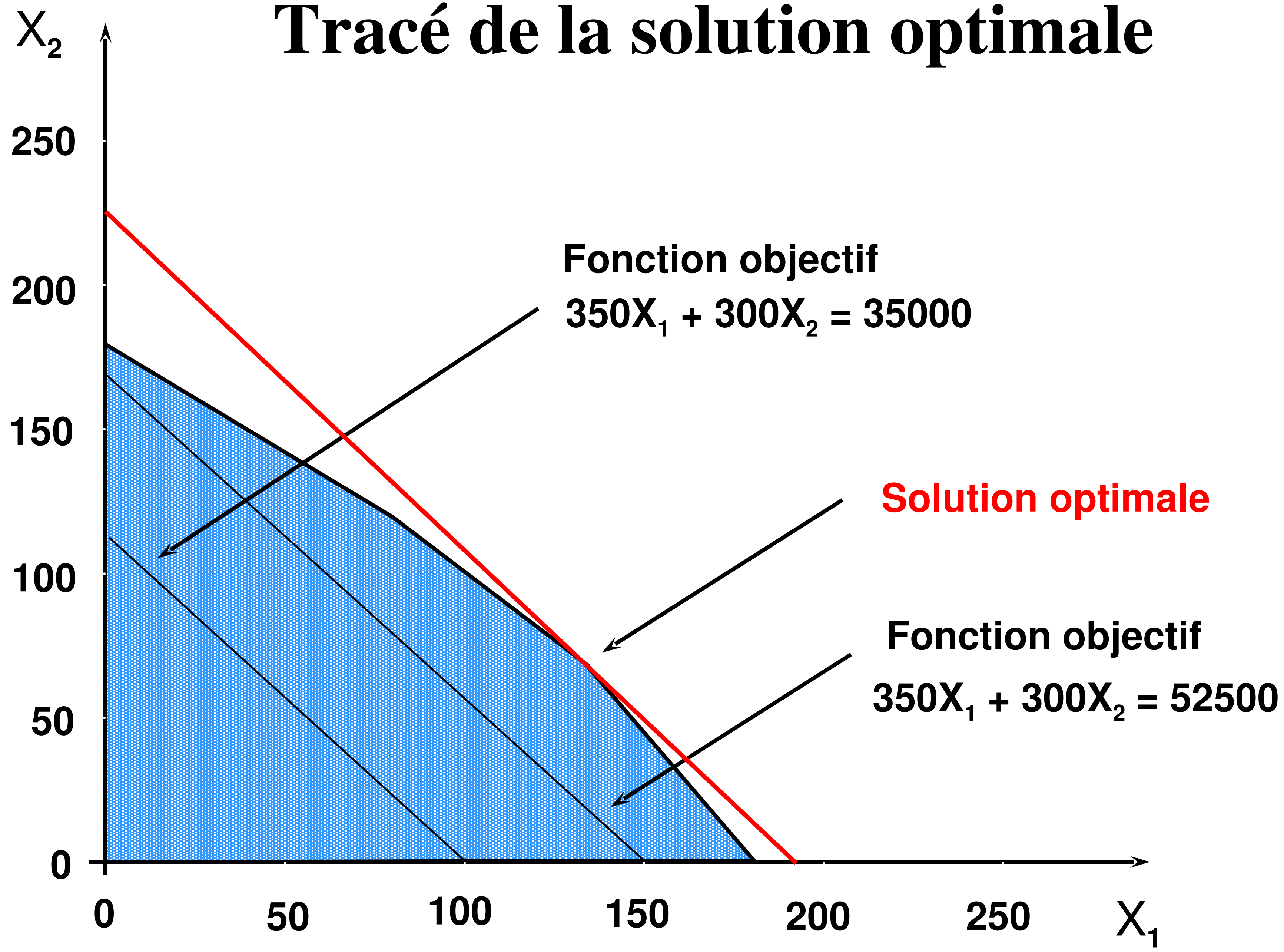
Tracé d'une droite de la fonction objectif



Un deuxième tracé de la fonction objectif



Tracé de la solution optimale



Calcul de la solution optimale

La solution optimale se trouve à l'intersection des contraintes :

$$X_1 + X_2 = 200 \qquad (1)$$

$$9X_1 + 6X_2 = 1566 \qquad (2)$$

De (1) nous avons:

$$X_2 = 200 - X_1 \qquad (3)$$

En substituant (3) pour X_2 dans (2) nous avons:

$$9X_1 + 6\,(200 - X_1) = 1566$$

ce qui fait $X_1 = 122$

Calcul de la solution optimale

La solution optimale est :

$$X_1 = 122$$

$$X_2 = 200 - X_1 = 78$$

Objective = (350***122**) + (300***78**) = **66 100**