LPSIL **Année 2007-2008**

TD MathOpt - Feuille 1

Introduction et modélisation

Rappel sur les définitions

1. Dites quel(s) problèmes parmi P1,P2,P3 sont sous forme standard?

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{P1 : Maximiser} & 3x_1 & - & 5x_2 & & \\ \text{Sous les contraintes :} & 4x_1 & + & 5x_2 & \geq & 3 \\ & 6x_1 & - & 6x_2 & = & 7 \\ & x_1 & + & 8x_2 & \leq & 20 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcr} \text{P2 : Minimiser} & 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & & \\ \text{Sous les contraintes :} & 9x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & + & 3x_5 & \leq & 5 \\ & 8x_1 & + & 9x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & + & 3x_5 & \leq & 2 \\ & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{P3 : Maximiser} & 8x_1 & - & 4x_2 & & \\ \text{Sous les contraintes :} & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\ & 9x_1 & + & 5x_2 & \leq & -2 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

2. Mettre sous la forme standard :

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcr} \text{P4 : Minimiser} & -8x_1 & + & 9x_2 & + & 2x_3 & - & 6x_4 & - & 5x_5 & & \\ \text{Sous les contraintes :} & 6x_1 & + & 6x_2 & - & 10x_3 & + & 2x_4 & - & 8x_5 & \geq & 3 \\ & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & & \geq & 0 \end{array}$$

3. Prouver que le problme (1.9) du cours est non réalisable est que (1.10) est non borné.

4. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour les nombres s et t pour que le problème :

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{P5 : Maximiser} & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{Sous les contraintes :} & sx_1 & + & tx_2 & \leq & 1 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

   a) ait une solution optimale
   b) soit non réalisable
   c) soit non borné

Modélisation

5. Une entreprise fabrique 2 produits X et Y. Pour sa conception, chaque produit fini nécessite 3 produits intermédiaires A, B et C. Pour fabriquer un produit X, on a besoin de 2 produits A, de 2 produits B et de 1 produit C. De même, pour fabriquer un produit Y, on a besoin de 3 produits A, de 1 produit B et de 3 produits C. En outre, l'entreprise dispose d'une quantité limitée de produits A, B et C. Elle a 180 produits A, 120 produits B et 150 produits C. Sachant que le bénéfice pour une unité de X est 3 euros et que celui pour une unité de Y est de 4 euros, combien de produits X et Y faut-il fabriquer pour maximiser le profit ?

   Modéliser ce problème par un programme linéaire et donner une représentation graphique des contraintes et de la solution.

6. On suppose qu'une entreprise fabrique deux produits et décide d'augmenter le niveau de production pour maximiser le bénéfice. Soient x_1 la quantité de produit de type 1 fabriquée en un mois et x_2 la quantité de produit de type 2 fabriquée en un mois. Chaque unité du produit 1 rapporte à l'entreprise un bénéfice de 120, alors que chaque unité du produit 2 rapporte à l'entreprise un bénéfice de 500. A ce stade on dirait qu'il suffit de ne produire que du produit de type 2. Cependant il existe des contraintes sur la production de x_1 et x_2. A cause de considérations bassement matérielles, on ne peut pas produire plus de 200 x_1 et plus de 300 x_2. De plus, on ne peut pas produire plus de 400 produits (quels que soient leurs types) en tout, à cause de la force de travail limitée. Donner un PL qui maximise le bénéfice, ainsi que sa représentation graphique en 2D. En déduire la solution optimale.

7. [Adapté de Greene *et al.* (1959)] Une usine d'emballage de viande produit 480 unités de jambons, 400 unités de poitrines de porcs et 230 unités de lardons chaque jour. Chacun de ces produits peut être vendu frais ou fumé. Le nombre total d'unités de produits pouvant être fumées au cours d'une journée normale de travail est de 420. De plus, 250 unités de produits supplémentaires peuvent être fumées au cours d'heures supplémentaires pour un coût plus élevé. Les bénéfices net par unité produite sont les suivants :

	Frais	Fumé en heures normales	Fumé en heures supplémentaires
Jambons	8 €	14 €	11 €
Poitrines	4 €	12 €	7 €
Lardons	4 €	13 €	9 €

   Par exemple, la planification suivante rapporte un bénéfice net de 9965 €.

	Frais	Fumés en heures normales	Fumés en heures supplémentaires
Jambons	165	280	35
Poitrines	295	70	35
Lardons	55	70	105

   On veut trouver la planification qui maximise le bénéfice total net. Formulez ce problème en PL dans la forme standard.

8. La fabrique RadioIn fabrique deux types de radios A et B. Chaque radio produite est le fruit des efforts conjoints de 3 spécialistes Pierre, Paul et Jean. Pierre travaille au plus 24 heures par semaine. Paul travaille au plus 45 heures par semaine. Jean travaille au plus 30 heures par semaine. Les ressources nécessaires pour construire chaque type de radio ainsi que leurs prix de vente sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	Radio A	Radio B
Pierre	1h	2h
Paul	2h	1h
Jean	1h	3h
Prix de vente	15 €	10 €

On suppose que l'entreprise n'a aucun problème à vendre sa production, quelle qu'elle soit.

Modéliser le problème de la recherche d'un plan de production hebdomadaire maximisant le chiffre d'affaire de RadioIn sous forme d'un programme linéaire. Préciser clairement les variables de décision, la fonction objectif et les contraintes.

9. Un assembleur de mobiles doit fournir par contrat 20000 téléphones dans les quatre prochaines semaines. Le client payera 20 € pour chaque mobile livré avant la fin de la première semaine, 18 € pour ceux livrés avant la fin de la deuxième semaine, 16 € pour ceux livrés avant la fin de la troisième semaine et 14 € avant la fin de la quatrième. Chaque ouvrier peut assembler 50 mobiles par semaine. La société ne peut honorer la commande avec ses 40 ouvriers, ainsi elle doit embaucher et former des travailleurs temporaires. Chacun des 40 ouvriers permanents peut être affecté à la formation d'une classe de trois travailleurs temporaires. Après une semaine de formation, ceux qui ont suivi la formation peuvent soit monter des mobiles soit instruire des ouvriers non qualifiés.

   A cet instant il n'y a pas d'autre contrat en cours mais tous les ouvriers, permanents ou temporaires, seront payés jusqu'à la fin des quatre semaines (même si certains sont inoccupés).

   Un ouvrier qui produit des mobiles, est inactif ou instruit reçoit un salaire de 200 € par semaine alors qu'un ouvrier en formation perçoit 100 € par semaine. Le coût de production (sans compter les salaires) est de 5 € par mobile.

   Par exemple, la compagnie peut adopter le programme de fabrication suivant.

Semaine 1	10 assembleurs, 30 instructeurs, 90 apprentis Salaires des travailleurs : 8000 € Salaires des apprentis : 9000 € Profit sur les 500 mobiles : 7500 € Perte nette : 9500 €
Semaine 2	120 assembleurs, 10 instructeurs, 30 apprentis Salaires des travailleurs : 26000 € Salaires des apprentis : 3000 € Profit sur les 6000 mobiles : 78000 € Profit net : 49000 €
Semaine 3	160 assembleurs Salaires des travailleurs : 32000 € Profit sur les 8000 mobiles : 88000 € Profit net : 56000 €
Semaine 4	110 assembleurs, 50 inactifs Salaires des travailleurs : 32000 € Profit sur les 5500 mobiles : 49500 € Profit net : 17500 €

Ce programme de planification qui rapporte 113000 € à la compagnie est l'un des nombreux possibles. La compagnie souhaite faire le meilleur bénéfice possible : formulez ce problème sous la forme d'un PL (pas nécessairement sous forme standard).

10. Après la réhabilitation des thermes de SEIX (Ariège), le propriétaire de l'hôtel du Mont Vallier décide de faire un certain nombre d'aménagements afin de décrocher deux étoiles au guide Michelin. Pour cela toutes les chambres doivent comporter une douche ou une salle de bains, mais la proportion de chambres n'étant équipée que d'une douche ne doit pas dépasser 25%. Une chambre peut être aménagée avec un lit double (2 couchages) ou un lit double et un lit simple (3 couchages). Cependant, vu la taille des chambres actuelles, seulement 50% de celles-ci pourraient contenir 3 couchages. La quasi-totalité des clients seront des curistes et optent donc en général pour une pension complète. Les heures d'ouverture des thermes obligent le restaurant de l'hôtel à n'envisager qu'un service unique fixé à midi trente. La salle de restaurant ne pouvant accueillir que 100 personnes, cela a bien sûr des conséquences sur le nombre de chambres à proposer. On suppose qu'en période de cure l'hôtel est systématiquement rempli.

    Ecrire sans le résoudre le programme linéaire qui permettra de déterminer le nombre de chambres de chaque type que devra aménager le propriétaire afin de maximiser son bénéfice. Les tarifs des chambres en euros sont donnés ci-dessous:

	2 couchages	3 couchages
Douche	40	55
Salle de bains	45	60

    On notera respectivement $x1$, $x2$, $x3$, $x4$, le nombre de chambres à 2 couchages avec douche, à 2 couchages avec salle de bains, à 3 couchages avec douche, à 3 couchages avec salle de bains.

11. Une entreprise disposant de 10 000 m^2 de carton en réserve, fabrique et commercialise 2 types de boîtes en carton. La fabrication d'une boîte en carton de type 1 ou 2 requiert, respectivement, 1 et 2 m^2 de carton ainsi que 2 et 3 minutes de temps d'assemblage. Seules 200 heures de travail sont disponibles pendant la semaine à venir. Les boîtes sont agrafées et il faut quatre fois plus d'agrafes pour une boîte du second type que pour une du premier. Le stock d'agrafes disponible permet d'assembler au maximum 15 000 boîtes du premier type. Les boîtes sont vendues, respectivement, 3 € et 5 €.

    a) Formuler le problème de la recherche d'un plan de production maximisant le chiffre d'affaires de l'entreprise sous forme d'un programme linéaire standard.

    b) Déterminer un plan de production optimal en résolvant graphiquement le programme linéaire trouvé en a).

12. On désire déterminer la composition, à coût minimum, d'un aliment pour le bétail composé de maïs, de soja et d'herbe. L'aliment ainsi conditionné devra comporter au plus 0.5 % de calcium, au maximum 5 % de fibres et au moins 30 % de protéïnes, pour se conformer au désir de la clientèle. On a indiqué ci-dessous les pourcentages de calcium, de fibres et de protéïnes contenus, respectivement, dans le maïs et le soja, ainsi que le coût par tonne de chacun de ces produits bruts (on suppose que le prix de l'herbe est nul et que sa teneur en calcium, fibres et protéïnes est négligeable).

Produit brut	Pourcentage de calcium	Pourcentage de fibres	Pourcentage de protéïnes	Prix (€)
Maïs	0.1 %	2 %	9 %	400
Soja	0.2 %	6 %	60 %	1200
Pourcentage requis	$\leq 0.5\%$	$\leq 5\%$	$\geq 30\%$	

    Formuler le problème sous la forme d'un programme linéaire, le résoudre graphiquement et donner la composition optimale du mélange et son coût.

13. L'entreprise R&O's produit des pastilles chocolatées. Chaque pastille est formée d'un cœur en chocolat enrobé d'une couche de sucre coloré. Les pastilles sont commercialisées en paquets de 100g. Pour faire 1kg de pastilles, il faut 750g de chocolat et 250g de sucre. Quatre couleurs sont disponibles pour colorer les pastilles : vert, jaune, rouge et brun. Chaque paquet doit contenir au moins 20% de pastilles de chaque couleur et la quantité de pastilles rouges et jaunes ne doit pas être inférieure à celle des pastilles vertes et brunes. On suppose que tous les paquets ont la même répartition. Pour le mois à venir, l'entreprise dispose de

    - C tonnes de chocolat
    - S tonnes de sucre
    - colorant brun en suffisance
    - colorant rouge pour au plus R tonnes de pastilles
    - colorant jaune pour au plus J tonnes de pastilles
    - colorant vert pour au plus V tonnes de pastilles.

    En ne tenant compte que des contraintes exposées ci-dessus, formuler un programme linéaire permettant à l'entreprise de déterminer le nombre maximal de paquets qu'elle peut produire pendant le prochain mois.

14. Une verrerie produit des verres à vin, des verres à eau et des flûtes à champagne. Les prix de vente, les quantités requises de verre ainsi que les temps de façonnage et d'emballage sont différents pour chacun des produits et sont résumés dans la table suivante :

	Verres à vin	Verres à eau	Flûtes à champagne
Temps de façonnage (min)	4	2	12
Temps d'emballage (min)	2	1	4
Quantité de verre (kg)	0.1	0.15	0.1
prix de vente (€)	8	6	15

Pour la semaine à venir, l'entreprise dispose de 3000 minutes pour le façonnage, de 1200 minutes pour l'emballage et de 100 kilogrammes de verre.

Formuler un programme linéaire aidant l'entreprise à déterminer une production maximisant son chiffre d'affaires en utilisant les variables de décision suivantes : x_1 nombre de verres à vin produits pendant la semaine à venir ; x_2 nombre de verre à eau produits pendant la semaine à venir ; x_3 nombre de flûtes à champagne produites pendant la semaine à venir.

15. Le tableau suivant contient les différents horaires possibles pour les chauffeurs d'une compagnie de bus. Cette dernière cherche à déterminer les horaires à retenir de manière à assurer, à moindre coût, qu'au moins un chauffeur soit présent pendant chaque heure de la journée (de 9 à 17 heures).

Horaire	9 à 11h	9 à 13h	11 à 16h	12 à 15h	13 à 16h	14 à 17h	16 à 17h
Coût	18	30	38	14	22	16	9

Formuler un programme linéaire en nombres entiers permettant de résoudre le problème de décision de la compagnie.