Introduction et modélisation

Correction de l'exercice 1

P1 et P2 ne sont pas sous la forme standard car les contraintes de P1 ne sont pas formées d'inéquations du type $\leq$ et P2 est un problème de minimisation. P3 est bien sous la forme standard (maximiser,$\leq$,$x_j \geq 0$).

Correction de l'exercice 2

Minimiser $z = c.x$ est équivalent à maximiser $w = -c.x = (-c)x$. Pour obtenir la valeur correspondante de z il faut multiplier w par -1.

Pour les inéquations, $a.x \geq b$ est équivalent à $-a.x \leq -b$.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcr}
\text{P4 : Maximiser} & 8x_1 & - & 9x_2 & - & 2x_3 & + & 6x_4 & + & 5x_5 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & -6x_1 & - & 6x_2 & + & 10x_3 & - & 2x_4 & + & 8x_5 & \leq & -3 \\
 & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Correction de l'exercice 3

En lisant les inéquations de (1.9) on voit que la deuxième contrainte s'écrit $-2(x_1 + x_2) \leq -10$, donc $x_1 + x_2 \geq 5$ mais ceci est impossible car la première contrainte est $x_1 + x_2 \leq 2$. Le problème est non réalisable.

Pour le problème (1.10), soit un réel $M \geq 2$ alors la solution $x_1 = M$, $x_2 = 0$ vérifie les contraintes. On peut prendre M aussi grand que l'on veut.

Correction de l'exercice 4

a) $s > 0$ et $t > 0$

b) jamais

c) $s \leq 0$ et/ou $t \leq 0$

Correction de l'exercice 5

Soient x et y les quantités de produits X et Y fabriqués. La quantité totale de produits A utilisée est:

$$2x + 3y \leq 180. \quad (1)$$

De même pour les produits B et C on obtient :

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 120. \quad (2) \\ x + 3y &\leq 150. \quad (3) \end{aligned}$$

Bien entendu, les quantité x et y sont positives : $x, y \geq 0$.

Enfin, on tente de maximiser le profit qui est le total des bénéfices sur la vente des produits de types X et Y : $3x + 4y$. On obtient le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{llrcrcrl} \text{Maximiser} & z = & 3x & + & 4y & & & \\ \text{Sous les contraintes :} & & 2x & + & 3y & \leq & 180 & (1) \\ & & 2x & + & y & \leq & 120 & (2) \\ & & x & + & 3y & \leq & 150 & (3) \\ & & & & x, y & \geq & 0 & \end{array}$$

On peut représenter le problème dans un espace à deux dimensions.

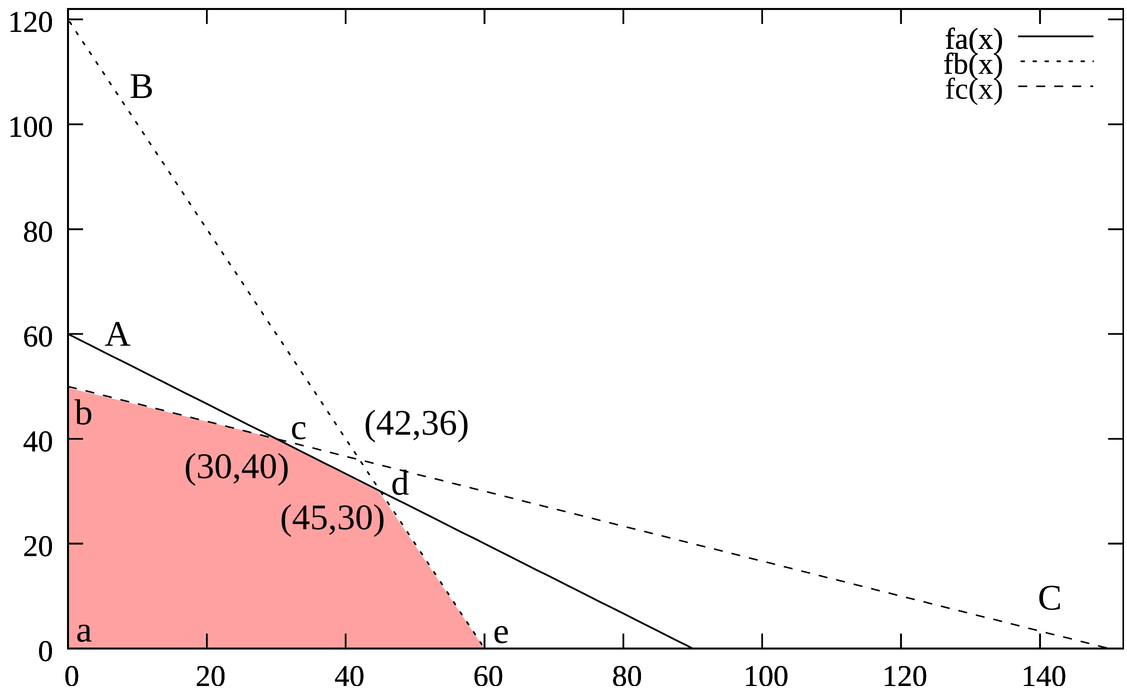

Figure 1: Représentation graphique du problème des produits X et Y

Les solutions admissibles sont représentées par la zone grisée (a, b, c, d, e). Ensuite, nous nous intéressons à la fonction $z = 3x + 4y$ sur la figure (2). Pour $z = 120$, on obtient une droite D_1 $(3x + 4y = 120)$ qui représente les solutions pour lesquelles le profit vaut 120. Pour $z = 180$, on obtient une autre droite D_2 $(3x + 4y = 180)$ qui représente les solutions pour lesquelles le profit vaut 180. On remarque que D_2 est parallèle à D_1 et que, en ayant fait glisser D_1 vers le haut jusqu'à D_2 on a augmenté le profit z. Donc, pour résoudre graphiquement le problème, on va faire "glisser" la droite vers le haut tout en conservant une intersection non vide avec la zone grisée. C'est en d de coordonnées $(45, 30)$ que l'on obtient l'intersection de la droite D_3 qui est la plus haute possible. La solution du problème est de produire 45 produits de type X et 30 produits de type Y, avec un profit $z = 3x + 4y = 255$ €.

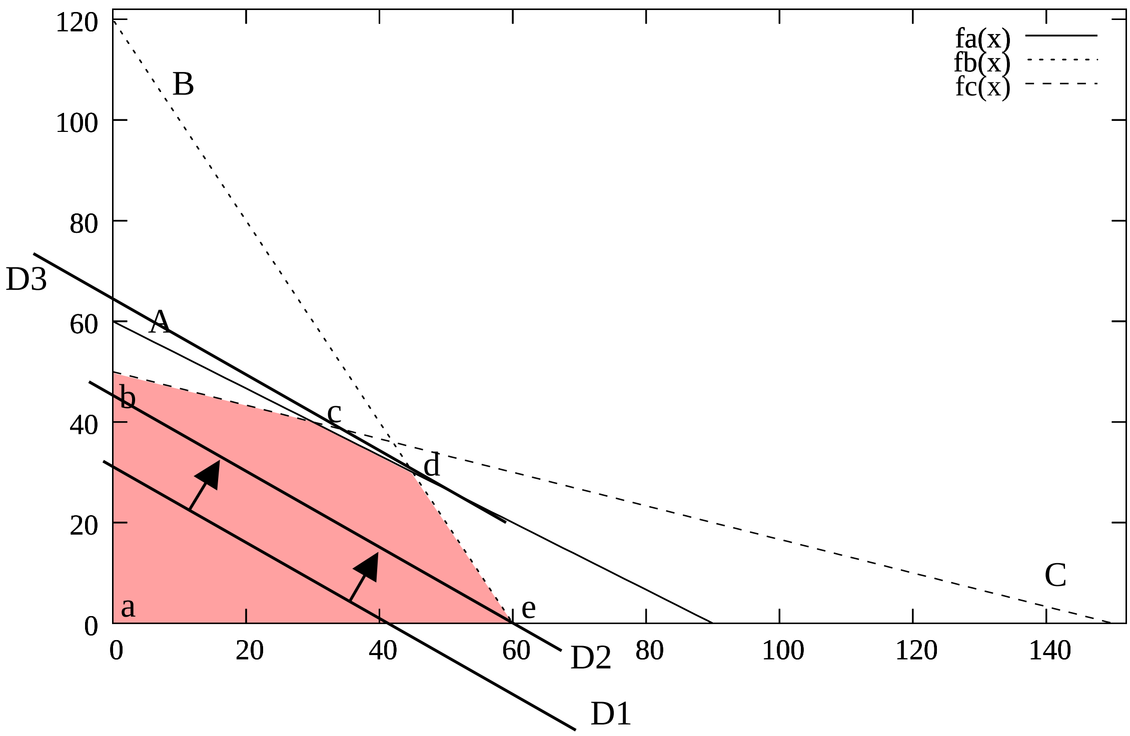

Figure 2: Recherche du profit maximum

Correction de l'exercice 6

On obtient le programme linéaire suivant :

$$
\begin{array}{llcrcrcrl}
\text{Maximiser} & z & = & 120x_1 & + & 500x_2 & & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & x_1 & & & \leq & 200 & (1) \\
 & & & & & x_2 & \leq & 300 & (2) \\
 & & & x_1 & + & x_2 & \leq & 400 & (3) \\
 & & & x_1 & & & \leq & 0 & (4) \\
 & & & & & x_2 & \leq & 0 & (5)
\end{array}
$$

On peut représenter le problème dans un espace à deux dimensions sur la figure (3)

L'ensemble des solutions réalisables est le polygone 1,3,4,5,2 de la figure 3. Dans le tableau suivant, on donne les sommets et les *contraintes actives* correspondantes.

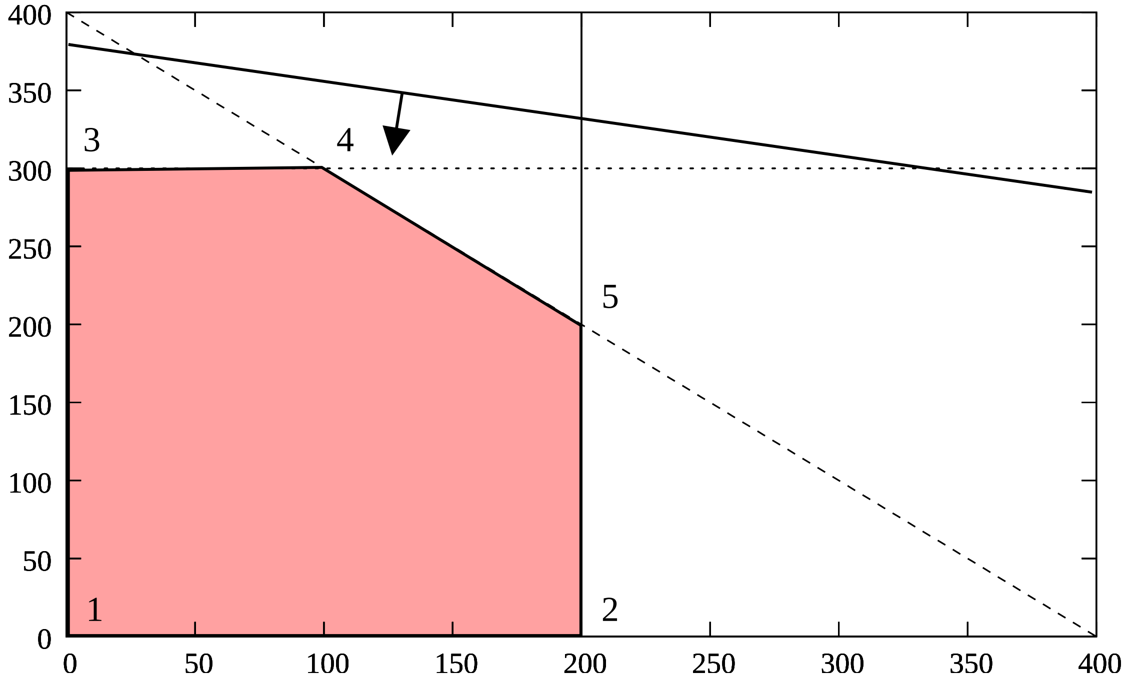

Figure 3: Représentation graphique du problème des produits X et Y

Sommet	Coordonnée x	Coordonnée y	Contraintes actives
1	0	0	(4) et (5)
2	200	0	(1) et (5)
3	0	300	(2) et (4)
4	100	300	(2) et (3)
5	200	200	(1) et (3)

Correction de l'exercice 7

Une première solution consiste à affecter une variable à chaque case du tableau de l'énoncé:

Maximiser

$$z = 8x_1 + 14x_2 + 11x_3 + 4x_4 + 12x_5 + 7x_6 + 4x_7 + 13x_8 + 9x_9$$

Sous les contraintes :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & & & & & \leq & 480 \\
 & & & & & & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & & & & & & \leq & 400 \\
 & & & & & & & & & & & & x_7 & + & x_8 & + & x_9 & \leq & 230 \\
 & & x_2 & & & & & + & x_5 & & & & & + & x_8 & & & \leq & 420 \\
 & & & & x_3 & & & & & + & x_6 & & & & & + & x_9 & \leq & 250 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & x_1, x_2, \cdots, x_9 & \geq & 0
\end{array}$$

On peut aussi écrire un programme avec moins de variables (6 au lieu de 9): ici on a posé le problème de maximiser la différence entre les bénéfices réalisés par la production de produits fumés au lieu de frais

$(6 = 14 - 8, 3 = 11 - 8, 8 = 12 - 4, ...)$.

$$\begin{array}{llllllllllllll}
\text{Maximiser} & 6x_1 & + & 3x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & + & 9x_5 & + & 5x_6 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & \leq & 480 \\
 & & & & & x_3 & + & x_4 & & & & & \leq & 400 \\
 & & & & & & & & & x_5 & + & x_6 & \leq & 230 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & + & x_5 & & & \leq & 420 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & + & x_6 & \leq & 250 \\
 & & & & & & & & & & & x_1, x_2, \cdots, x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Si on résout le programme à 9 variables on trouve la solution $x_1 = 440; x_2 = 0; x_3 = 40; x_4 = 0; x_5 = 400; x_6 = 0; x_7 = 0; x_8 = 20; x_9 = 210$, qui donne une valeur d'objectif de 10910 €. La solution trouvée pour le problème formulé avec 6 variables est $x_1 = 0; x_2 = 40; x_3 = 400; x_4 = 0; x_5 = 20; x_6 = 210$. La nouvelle valeur d'objectif est alors de 4550 €. Pour retrouver le bénéfice réel, il faut y ajouter $6360 = 480 \times 8 + 400 \times 4 + 230 \times 4$, ce que l'on gagne au moins en produisant tous les produits, fumés ou non.

Notons que le plan de production essayé en TD qui consiste à fumer toutes les unités de lardons en heures normales (formulation à 9 variables) $x_1 = 440; x_2 = 0; x_3 = 40; x_4 = 0; x_5 = 190; x_6 = 210; x_7 = 0; x_8 = 230; x_9 = 0$, n'est pas optimal et atteint un objectif de 10700 seulement.

Correction de l'exercice 8

Nous définissons les variables suivantes :

- x_1 est le nombre de radios de type A produites chaque semaine
- x_2 est le nombre de radios de type B produites chaque semaine

Comme Pierre doit consacrer 1 h de travail par radio de type A et 2 h par radio de type B alors que son temps total de travail hebdomadaire ne doit pas dépasser 24 h, on en déduit la contrainte :

$$x_1 + 2x_2 \leq 24. \tag{4}$$

Comme Paul doit consacrer 2 h de travail par radio de type A et 1 h par radio de type B alors que son temps total de travail hebdomadaire ne doit pas dépasser 45 h, on en déduit la contrainte :

$$2x_1 + x_2 \leq 45. \tag{5}$$

Comme Jean doit consacrer 1 h de travail par radio de type A et 3 h par radio de type B alors que son temps total de travail hebdomadaire ne doit pas dépasser 30 h, on en déduit la contrainte :

$$x_1 + 3x_2 \leq 30. \tag{6}$$

Chaque radio de type A produite rapporte 15 € et chaque radio de type B produite rapporte 10 €, on en déduit la fonction objectif z à maximiser suivante :

$$z = 15x_1 + 10x_2.$$

Le programme linéaire qui maximise le chiffre d'affaire de RadioIn est donc donné par :

$$\begin{array}{llrcrcrl}
\text{Maximiser} & z = & 15x_1 & + & 10x_2 & & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 24 & (4) \\
& & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 45 & (5) \\
& & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (6) \\
& & & & x_1, x_2 & \geq & 0 &
\end{array}$$

L'interprétation graphique de ce problème est donné sur la figure (4). En faisant varier la ligne z, on trouve l'optimum au point $x_1 = 22$ et $x_2 = 1$.

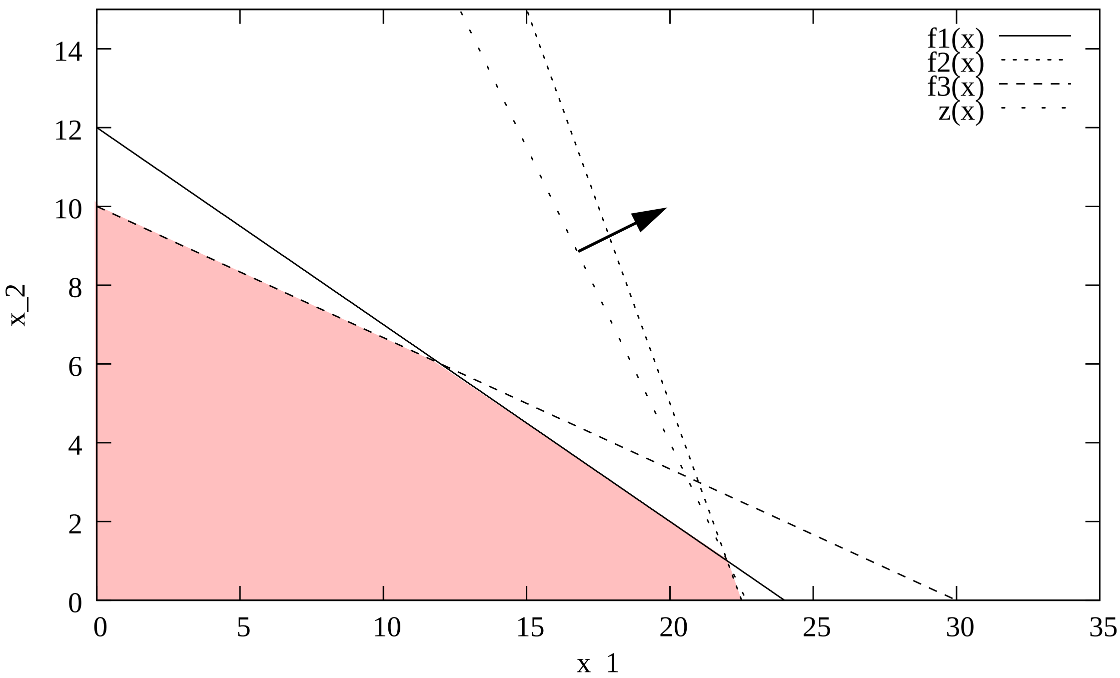

Figure 4: Représentation graphique du problème de RadioIn

La compagnie RadioIn gagne alors 340 €.

Correction de l'exercice 9

Nous définissons les variables suivantes :

- a_i est le nombre d'ouvriers assembleurs la semaine i, $i = 1, 2, 3, 4$
- f_i est le nombre d'ouvriers instructeurs - ou formateurs - la semaine i, $i = 1, 2, 3, 4$
- s_i est le nombre d'ouvriers apprentis - ou stagiaires - la semaine i, $i = 1, 2, 3, 4$
- t_i est le nombre d'ouvriers inactifs - ou touristes - la semaine i, $i = 1, 2, 3, 4$

Le profit total enregistré est la somme des bénéfices hebdomadaires : $b_1 + b_2 + b_3 + b_4$.

Au cours de la première semaine, a_1 ouvriers assemblent 50 téléphones vendus 20 € chacun et qui coûtent 5 € chacun. Le bénéfice est donc de $50(20-5)a_1$ sans compter les salaires. On a donc :

$$b_1 = 50(20-5)a_1 - 200(a_1 + f_1 + t_1) - 100s_1.$$

De la même façon pour les trois autres semaines :

$$\begin{aligned}
b_2 &= 50(18-5)a_2 - 200(a_2 + f_2 + t_2) - 100s_2\\
b_3 &= 50(16-5)a_3 - 200(a_3 + f_3 + t_3) - 100s_3\\
b_4 &= 50(14-5)a_4 - 200(a_4 + f_4 + t_4) - 100s_4
\end{aligned}$$

Nous allons ajouter des contraintes pour assurer la production d'exactement 20000 téléphones et aussi l'embauche des employés jusqu'au bout des quatre semaines.

$$\begin{array}{rcl}
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &=& \frac{20000}{50}\\
a_1 + t_1 + f_1 &=& 40\\
a_2 + t_2 + f_2 &=& a_1 + t_1 + f_1 + s_1\\
a_3 + t_3 + f_3 &=& a_2 + t_2 + f_2 + s_2\\
a_4 + t_4 + f_4 &=& a_3 + t_3 + f_3 + s_3
\end{array}$$

Si on se rappelle qu'un formateur forme 3 stagiaires (exactement pour simplifier), alors $s_i = 3f_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. On peut donc simplifier le problème est écrire :

$$\begin{array}{rl}
\text{Maximiser} & 550a_1 + 450a_2 + 350a_3 + 250a_4 - 500f_1 - 500f_2 - 500f_3 - 500f_4\\
& -200t_1 - 200t_2 - 200t_3 - 200t_4\\
\text{Sous les contraintes :} & \begin{array}{rcl}
a_1 + t_1 + f_1 &=& 40\\
a_2 + t_2 + f_2 &=& a_1 + t_1 + 4f_1\\
a_3 + t_3 + f_3 &=& a_2 + t_2 + 4f_2\\
a_4 + t_4 + f_4 &=& a_3 + t_3 + 4f_3\\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &=& 400
\end{array}
\end{array}$$

La valeur optimale est de 127000.

Correction de l'exercice 10

Les variables de décision sont :

x_1 : le nombre de chambres à deux couchages avec douche,
x_2 : le nombre de chambres à deux couchages avec salle de bains,
x_3 : le nombre de chambres à trois couchages avec douche,
x_4 : le nombre de chambres à trois couchages avec salle de bains,

La première contrainte est que la proportion de chambres n'étant équipées que d'une douche ne doit pas dépasser 25%:

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + x_3 &\leq& \frac{25}{100}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\\
0.75x_1 - 0.25x_2 + 0.75x_3 - 0.25x_4 &\leq& 0
\end{array}$$

La seconde contrainte est dûe à la taille des chambres, en effet au plus 50% des chambres peuvent contenir trois couchages :

$$\begin{array}{rcl} x_3 + x_4 & \leq & \frac{50}{100}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ -0.5x_1 - 0.5x_2 + 0.5x_3 + 0.5x_4 & \leq & 0 \end{array}$$

Enfin, la salle de restaurant ne pouvant accueillir plus de cent personnes et les clients optant généralement pour une pension complète, le nombre de personnes résidant à l'hôtel du Mont Vallier ne peut excéder cent. Ce qui se traduit par :

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 100$$

L'objectif pour le propriétaire de l'hôtel est de maximiser son bénéfice, c'est à dire maximiser :

$$z = 40x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 60x_4$$

Le programme linéaire (sous forme standard) qui permettra de trouver le nombre de chambres de chaque type à aménager pour maximiser le profit est donc :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \text{Maximiser } z = & 40x_1 & + & 45x_2 & + & 55x_3 & + & 60x_4 & & \\ s.c. & 0.75x_1 & - & 0.25x_2 & + & 0.75x_3 & - & 0.25x_4 & \leq & 0 \\ & -0.5x_1 & - & 0.5x_2 & + & 0.5x_3 & + & 0.5x_4 & \leq & 0 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & \leq & 100 \\ & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Correction de l'exercice 11

a) Soient les variables de décision :

$$\begin{array}{lcl} x_1 & : & \text{le nombre de boîtes de type 1 fabriquées,} \\ x_2 & : & \text{le nombre de boîtes de type 2 fabriquées.} \end{array}$$

On a les contraintes suivantes :

$$\begin{array}{lcl} \text{sur les m}^2 \text{ de carton} & : & x_1 + 2x_2 \leq 10000 \\ \text{sur le temps d'assemblage en minutes} & : & 2x_1 + 3x_2 \leq 200 \times 60 \\ \text{sur le nombre d'agrafes} & : & x_1 + 4x_2 \leq 15000 \end{array}$$

La fonction objectif à maximiser correspond au chiffre d'affaires obtenu lors de la vente des boîtes en carton :

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

On a donc le programme linéaire sous forme standard suivant :

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximiser} & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\ \text{Sous les contraintes :} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10000 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12000 \\ & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 15000 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

b) Il suffit de représenter le domaine admissible D du programme linéaire trouvé en a) et de trouver sur le bord de D le point qui maximise $3x_1 + 5x_2$, c'est à dire de faire glisser la droite d'équation $3x_1 + 5x_2 = C$ jusquà ce que C soit maximal, en prenant garde que cette droite intersecte le domaine D. Sur la figure ainsi obtenue, on voit que le plan optimal consiste à produire 600 boîtes de type 1 ($x_1^* = 600$) et 3600 boîtes de type 2 ($x_2^* = 3600$), pour un chiffre d'affaires d'une valeur de 19800€ ($z^* = 19800$).

Correction de l'exercice 12

On définit les variables de décision suivantes :

$$\begin{array}{lcl} x_m & : & \text{la fraction de maïs dans une tonne d'aliment,} \\ x_s & : & \text{la fraction de soja dans une tonne d'aliment.} \end{array}$$

La proportion de maïs et de soja doit être inférieure à 1, donc :

$$x_m + x_s \leq 1.$$

Le pourcentage de calcium dans le produit final ne devant pas dépasser 0.5%, la deuxième contrainte du problème s'écrit :

$$0.001x_m + 0.002x_s \leq 0.005.$$

Pour les fibres, la contrainte est :

$$0.02x_m + 0.06x_s \leq 0.05.$$

Par ailleurs, l'aliment doit contenir au moins 30% de protéines. D'où la contrainte :

$$0.09x_m + 0.60x_s \geq 0.30.$$

Finalement, comme on désire fabriquer le produit à coût minimal, on devra minimiser :

$$400x_m + 1200x_s.$$

Le programme linéaire est donc, en récapitulant :

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Minimiser} & 400x_m & + & 1200x_s & & \\ \text{Sous les contraintes :} & x_m & + & x_s & \leq & 1 \\ & 0.001x_m & + & 0.002x_s & \leq & 0.005 \\ & 0.02x_m & + & 0.06x_s & \leq & 0.05 \\ & 0.09x_m & + & 0.60x_s & \geq & 0.30 \\ & & & x_m, x_s & \geq & 0 \end{array}$$

La solution optimale est donnée par $x_m^* = 0$ et $x_s^* = 0.5$. L'aliment optimal est donc composé de 50% de soja et de 50% d'herbe. Le prix d'une tonne d'aliment revient à $0.5 \times 1200 = 600$ €.

Correction de l'exercice 13

On définit les variables de décision suivantes :

$$\begin{array}{lcl} x_v & : & \text{tonnes de pastilles vertes produites pendant le mois à venir,} \\ x_j & : & \text{tonnes de pastilles jaunes produites pendant le mois à venir,} \\ x_b & : & \text{tonnes de pastilles brunes produites pendant le mois à venir,} \\ x_r & : & \text{tonnes de pastilles rouges produites pendant le mois à venir,} \end{array}$$

On a les contraintes suivantes :

Limitation du chocolat disponible	:	$0.75(x_r + x_v + x_j + x_b) \leq C.$
Limitation du sucre disponible	:	$0.25(x_r + x_v + x_j + x_b) \leq S.$
Limitation du colorant rouge disponible	:	$x_r \leq R.$
Limitation du colorant vert disponible	:	$x_v \leq V.$
Limitation du colorant jaune disponible	:	$x_j \leq J.$
Répartition des couleurs dans un paquet	:	$x_c \geq 0.2(x_r + x_v + x_j + x_b)$ $\forall c \in \{v, r, j, b\}.$
Supériorité du rouge et du jaune par rapport au vert et au brun	:	$x_r + x_j \geq x_v + x_b.$
Positivité des quantités produites	:	$x_c \geq 0, \ \forall c \in \{v, r, j, b\}.$

L'objectif est de maximiser le nombre de paquets produits ou, ce qui est équivalent, la quantité de pastilles produites. La fonction objectif à maximiser est donc :

$$z = x_r + x_v + x_j + x_b.$$

Le programme linéaire à résoudre est donc :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{Maximiser } z = & x_r & + & x_v & + & x_j & + & x_b & & \\
s.c. & 0.75x_r & + & 0.75x_v & + & 0.75x_j & + & 0.75x_b & \leq & C \\
 & 0.25x_r & + & 0.25x_v & + & 0.25x_j & + & 0.25x_b & \leq & S \\
 & x_r & & & & & & & \leq & R \\
 & & & x_v & & & & & \leq & V \\
 & & & & & x_j & & & \leq & J \\
 & 0.8x_r & - & 0.2x_v & - & 0.2x_j & - & 0.2x_b & \geq & 0 \\
 & -0.2x_r & + & 0.8x_v & - & 0.2x_j & - & 0.2x_b & \geq & 0 \\
 & -0.2x_r & - & 0.2x_v & + & 0.8x_j & - & 0.2x_b & \geq & 0 \\
 & -0.2x_r & - & 0.2x_v & - & 0.2x_j & + & 0.8x_b & \geq & 0 \\
 & x_r & - & x_v & + & x_j & - & x_b & \geq & R \\
 & & & & & & & x_r, x_v, x_j, x_b & \geq & 0
\end{array}$$

Etant donné que z est exprimé en tonnes, le nombre maximal de paquets que l'entreprise pourra produire (pendant le mois à venir) sera $10000z^*$.

Correction de l'exercice 14

Le plan de production maximisant le chiffre d'affaires est solution du programme linéaire :

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{Maximiser} & 8x_1 & + & 6x_2 & + & 15x_3 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & & & \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 12x_3 & \leq & 3000 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 1200 \\
 & \frac{1}{10}x_1 & + & \frac{3}{20}x_2 & + & \frac{1}{10}x_3 & \leq & 100 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array} \tag{7}$$

Correction de l'exercice 15

On numérote les différents horaires de 1 à 7 selon leur ordre d'apparition dans le tableau des données et on définit les variables de décision :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'horaire } i \text{ est retenu,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad i = 1...7.$$

Au moins un chauffeur sera présent pendant chaque heure de la journée si pour chaque $j \in \{9, 10, ..., 16\}$ on a :

$$\sum_{\substack{i \text{ tq} \\ [j, j+1] \in \text{ horaire}_i}} x_i \geq 1$$

Le problème à résoudre est donc :

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
\text{Min} & 18x_1 & + & 30x_2 & + & 38x_3 & + & 14x_4 & + & 22x_5 & + & 16x_6 & + & 9x_7 & & \\
\text{S.c :} & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & & & \geq & 1 \\
 & & & x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & \geq & 1 \\
 & & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & & & \geq & 1 \\
 & & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & & & \geq & 1 \\
 & & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & & \geq & 1 \\
 & & & & & x_3 & & & + & x_5 & + & x_6 & & & \geq & 1 \\
 & & & & & & & & & & & x_6 & + & x_7 & \geq & 1 \\
 & & & & & & & & & \multicolumn{5}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7} & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

Remarques :

- Les contraintes pour les périodes $[9, 10]$ et $[10, 11]$ étant identiques, une seule a été conservée dans la formulation ci-dessus.
- Si l'on remplace les contraintes $x_i \in \{0, 1\}$ par $0 \leq x_i \leq 1$, on obtient ce que l'on appelle une relaxation linéaire du problème en nombres entiers initial. De plus, il est facile de se convaincre que les variables de décision ne prendront jamais de valeur supérieure à 1 dans une solution optimale, on peut donc remplacer les contraintes $x_i \in \{0, 1\}$ par $x_i \geq 0$.La solution optimale obtenue est alors : $x_2^* = x_4^* = x_6^* = 1, x_1^* = x_3^* = x_5^* = x_7^* = 0$ pour un coût minimal de $z^* = 60$. Cette solution étant entière, elle est également admissible et optimale pour le problème de départ. Le plan d'engagement optimal consiste donc à retenir les horaires 9h à 13h, 12h à 15h et 14h à 17h, le coût de cette solution étant égal à 60 euros.