L'algorithme du Simplexe

1. Une usine de verre peut produire de la verre de qualité basse, moyenne ou supérieure; une tonne de la basse qualité nécessite 3 tonnes de sables, 500gr d'additifs et 1 heure du travail d'un ouvrier; pour les deux autres qualités, les chiffres correspondants sont (moyenne) 3.2 tonnes, 1000gr et 1,5 heures; (supérieure) 3.5 tonnes, 2500 gr et 4 heures. Les bénéfices de la vente d'une tonne sont de 100, 200 et 300 Euros. Chaque semaine 200 tonnes de sable et 120000 gr d'additif sont disponibles et il y a 6 ouvriers chacun travaillant au maximum 35 heures/semaine. Quelles quantités doit-on produire chaque semaine pour maximiser les bénéfices?

   On écrit x_1, x_2, x_3 pour les quantités produites de chaque qualité. On veut maximiser $100x_1 + 200x_2 + 300x_3$ avec les contraintes:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 3.2x_2 & + & 3.5x_3 & \leq & 20\ (sable) \\ 500x_1 & + & 1000x_2 & + & 2500x_3 & \leq & 120000\ (additifs) \\ x_1 & + & 1.5x_2 & + & 4x_3 & \leq & 210\ (main\ d'oeuvre) \end{array}\right.$$

   (a) Lesquelles des solutions suivantes du programme de l'usine de verre sont réalisables?
      i. $x_1 = 40, x_2 = 10, x_3 = 10$
      ii. $x_1 = 50, x_2 = -20, x_3 = 20$
      iii. $x_1 = 40, x_2 = 20, x_3 = 10$

   (b) La solution ($x_1 = 20, x_2 = 20, x_3 = 20$) est-elle optimale ?

2. Rappelons la définition suivante : Solutions de base

   n équations linéaires en n variables, en général, déterminent une solution unique. (D'autres cas sont possibles quand les équations ne sont pas linéairement indépendantes; soit aucune solution, soit plusieurs.) Une solution est de base si elle est la solution unique déterminée par n des contraintes, en remplaçant le $\leq$ de la contrainte par =. Autrement dit une solution de base est l'intersection de n des plans (hyperplans) des contraintes; si les (hyper)plans n'ont pas un seul point comme intersection, ils ne donnent pas de solution de base.

   Quand le programme est donné en forme standard, les équations $x_j = 0$ des contraintes implicites $x_j \geq 0$ peuvent entrer dans les n équations déterminant une solution de base.

   Les solutions de base réalisables ne sont que les sommets de l'ensemble des solutions réalisables.

   Une propriété très importante pour la solution de programmes linéaires est que, (si le programme a une solution réalisable optimale), une des solutions réalisables de base est optimale. De la perspective géométrique cette propriété semble évidente.

   On considère maintenant le programme suivant: Maximiser $x_1 + x_2 + x_3$ avec les contraintes:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 18, \\ -4x_1 + x_2 - x_3 \leq -12, \\ -8x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 0, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ -x_2 \leq -5 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Pour chaque solution donnée, est-elle de base, est-elle réalisable?

(a) $(20, 5, 27)$
(b) $(5, 20, 12)$
(c) $(5, 5, -3)$
(d) $(35, 5, 57)$
(e) $(0, 22.5, 4.5)$
(f) $(40, 2, 64)$
(g) $(5, 10, 2)$

3. Résoudre par la méthode du simplexe les problèmes suivants :

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{Maximiser} & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{Sous les contraintes :} & & & & & & & \\ & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 5 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 7 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \text{Maximiser} & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & + & 8x_4 & & \\ \text{Sous les contraintes :} & & & & & & & & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 5 \\ & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 3 \\ & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{Maximiser} & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{Sous les contraintes :} & & & & & \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & + & 5x_2 & \leq & 1 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \tag{3}$$

4.

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{Maximiser} & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & \\ \text{Sous les contraintes :} & & & & & & & \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 10 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\ & x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \tag{4}$$

5. Résoudre les problèmes suivants par la méthode du simplexe en deux phases.

a.

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{Maximiser} & 3x_1 & + & x_2 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & \\
& x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
& -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array} \tag{5}$$

b.

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{Maximiser} & 3x_1 & + & x_2 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & \\
& x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
& -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array} \tag{6}$$

c.

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{Maximiser} & 3x_1 & + & x_2 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & \\
& x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
& -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\
& 2x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array} \tag{7}$$