TD MathOpt - Feuille 2 - Correction

L'algorithme du Simplexe

1. **Correction de l'exercice 1**
   (a) i. Oui réalisable
   ii. Non (valeur négative)
   iii. Non (contrainte 1 non vérifiée)
   (b) Non (par exemple, $(22, 20, 20)$ est meilleur)
2. **Correction de l'exercice 2**
   (a) Réalisable mais non de base
   (b) Réalisable et de base
   (c) De base mais non réalisable
   (d) De base mais non réalisable
   (e) De base mais non réalisable
   (f) Ni réalisable ni de base
   (g) Réalisable mais non de base (il y a trois équations vérifées mais elles ne sont pas indépendantes, en effet $-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6$ est la somme de $2x_1 + x_2 - x_3 = 18$ et $-4x_1 + x_2 - x_3 = -12$)
3. Correction de l'exercice 3 (1)

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{Maximize} & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\
\multicolumn{8}{l}{\text{Sous les conditions:}} \\
& x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
& 2x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 5 \\
& 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 7 \\
& & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

On introduit les variables d'écart et on écrit le dictionnaire:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr||c}
 & & & & & & & & & \text{Si } x_3 \text{ entre en base} \\
x_4 & = & 4 & - & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & 2 \\
x_5 & = & 5 & - & 2x_1 & & & - & 3x_3 & \frac{5}{3} \\
x_6 & = & 7 & - & 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & \frac{7}{3} \\
\hline
z & = & & & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 &
\end{array}$$

On choisit de faire entrer x_3 qui a le plus fort cœfficient à la place de x_5 qui correspond à l'équation avec la contrainte la plus forte sur x_3. Le dictionnaire se réécrit :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr||c}
 & & & & & & & & & \text{Si } x_2 \text{ entre en base} \\
x_3 & = & \frac{5}{3} & - & \frac{2}{3}x_1 & & & - & \frac{1}{3}x_5 & \infty \\
x_4 & = & \frac{2}{3} & + & \frac{1}{3}x_1 & - & x_2 & + & \frac{2}{3}x_5 & \boldsymbol{\frac{2}{3}} \\
x_6 & = & 2 & & & - & x_2 & + & x_5 & 2 \\
\hline
z & = & \frac{20}{3} & + & \frac{1}{3}x_1 & + & 3x_2 & - & \frac{4}{3}x_5 &
\end{array}
$$

On choisit de faire entrer x_2 qui a le plus fort cœfficient à la place de x_4 qui correspond à l'équation avec la contrainte la plus forte sur x_2. Le dictionnaire se réécrit :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr||c}
 & & & & & & & & & \text{Si } x_1 \text{ entre en base} \\
x_2 & = & \frac{2}{3} & + & \frac{1}{3}x_1 & - & x_4 & + & \frac{2}{3}x_5 & \infty \\
x_3 & = & \frac{5}{3} & - & \frac{2}{3}x_1 & & & - & \frac{1}{3}x_5 & \boldsymbol{\frac{5}{2}} \\
x_6 & = & \frac{4}{3} & - & \frac{1}{3}x_1 & + & x_4 & + & \frac{1}{3}x_5 & 4 \\
\hline
z & = & \frac{26}{3} & + & \frac{4}{3}x_1 & - & 3x_4 & + & \frac{2}{3}x_5 &
\end{array}
$$

On choisit de faire entrer x_1 qui a le plus fort cœfficient à la place de x_3 qui correspond à l'équation avec la contrainte la plus forte sur x_1. Le dictionnaire se réécrit :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{3}{2}x_3 & & & - & \frac{1}{2}x_5 \\
x_2 & = & \frac{3}{2} & - & \frac{1}{2}x_3 & - & x_4 & + & \frac{1}{2}x_5 \\
x_6 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2}x_3 & + & x_4 & + & \frac{1}{2}x_5 \\
\hline
z & = & 12 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & &
\end{array}
$$

Toutes les variables dans l'expression de z ont des cœfficients négatifs : z est optimal avec comme solution $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$ et $x_3 = 0$.

Remarque :

On peut faire d'autres itérations (pas dans ce cours car on vous demande d'appliquer la règle du plus fort cœfficient) en choisissant de faire entrer x_1 d'abord. On trouve la solution après avoir écrit les deux dictionnaires suivants :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & \frac{5}{2} & & & - & \frac{3}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_5 \\
x_4 & = & \frac{3}{2} & - & x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_5 \\
x_6 & = & 2 & - & x_2 & & & + & x_5 \\
\hline
z & = & \frac{15}{2} & + & 3x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{3}{2}x_5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{3}{2}x_3 & & & - & \frac{1}{2}x_5 \\
x_2 & = & \frac{3}{2} & - & \frac{1}{2}x_3 & - & x_4 & + & \frac{1}{2}x_5 \\
x_6 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2}x_3 & + & x_4 & + & \frac{1}{2}x_5 \\
\hline
z & = & 12 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & &
\end{array}
$$

Enfin, si on fait entrer la variable x_2, on obtient directement le dictionnaire :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_2 & = & 4 & - & x_1 & - & x_3 & - & x_4 \\
x_5 & = & 5 & - & 2x_1 & - & 3x_3 & & \\
x_6 & = & 3 & - & x_1 & - & x_3 & + & x_4 \\
\hline
z & = & 12 & & & - & 2x_3 & - & 3x_4
\end{array}
$$

4. **Correction de l'exercice 4**

On définit les variables d'écart et on obtient le premier dictionnaire :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr||c}
x_4 & = & 10 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \mathbf{5} \\
x_5 & = & 10 & - & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \infty \\
x_6 & = & 10 & - & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \infty \\
\hline
z & = & & & x_1 & + & \mathbf{3}x_2 & - & x_3 &
\end{array}
$$

La variable x_2 a le plus grand coefficient positif, c'est donc elle qui entre en base. La contrainte $x_4 \geq 0$ est celle qui borne le plus la croissance de x_2, elle limite en effet l'augmentation de x_2 à 5 alors que les contraintes $x_5 \geq 0$ et $x_6 \geq 0$ ne bornent pas la croissance de x_2. C'est donc x_5 qui quitte la base et après avoir effectué le pivot, on obtient le dictionnaire :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr||c}
x_2 & = & 5 & - & x_1 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 & \infty \\
x_5 & = & 20 & - & 5x_1 & & & - & x_4 & \infty \\
x_6 & = & 25 & - & 4x_1 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & \infty \\
\hline
z & = & 15 & - & 2x_1 & + & \mathbf{\frac{1}{2}}x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 &
\end{array}
$$

La variable x_3 entre en base et on remarque qu'aucune variable n'est candidate pour quitter la base, puisqu'aucune des variables de base (x_2, x_5 et x_6) n'impose une borne supérieure sur la croissance de x_3. Cela signifie que le problème est **non borné**.

5. **Correction de l'exercice 5**

   a. **Première phase.**

   On définit et on résout le problème auxiliaire :

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Maximiser} & & & & & - & x_0 & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & & & \\
& x_1 & - & x_2 & - & x_0 & \leq & -1 \\
& -x_1 & - & x_2 & - & x_0 & \leq & -3 \\
& 2x_1 & + & x_2 & - & x_0 & \leq & 4 \\
& & & & & x_1, x_2, x_0 & \geq & 0
\end{array}
\tag{1}
$$

   On introduit les variables d'écart et on obtient le premier dictionnaire :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_3 & = & -1 & - & x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\
x_4 & = & -3 & + & x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\
x_5 & = & 4 & - & 2x_1 & - & x_2 & + & x_0 \\
\hline
w & = & & & & & & - & x_0
\end{array}
$$

   Ce dictionnaire n'est pas réalisable, puisque la solution de base associée ($x_0 = x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = -3$ et $x_5 = 4$) viole les contraintes de positivité des variables pour x_3 et x_4. On va donc rendre ce dictionnaire réalisable en effectuant un pivot : x_0 entre en base et la variable d'écart violant le plus la contrainte de positivité (x_4 car $-3 < -1$) quitte la base.

   Remarque : Cette manière de choisir la variable quittant la base n'est employée que dans ce cas précis où l'on désire rendre le premier dictionnaire du problème auxiliaire réalisable. Une fois que le dictionnaire est réalisable, on effectue l'algorithme du simplexe.

Après avoir pivoté x_0 et x_4, on obtient le dictionnaire réalisable :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_0 & = & 3 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_4 \\
x_3 & = & 2 & - & 2x_1 & & & + & x_4 \\
x_5 & = & 7 & - & 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_4 \\
\hline
w & = & -3 & + & x_1 & + & x_2 & - & x_4
\end{array}$$

Deux variables, x_1 et x_2, sont candidates pour entrer en base. On choisit x_1. x_3 sort de la base car elle borne le plus la croissance de x_1. En effet, $x_0 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 3$, $x_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \mathbf{1}$ et $x_5 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{7}{3}$. On obtient le dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr||c}
x_1 & = & 1 & & & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & \infty \\
x_0 & = & 2 & - & x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & \mathbf{2} \\
x_5 & = & 4 & - & 2x_2 & + & \frac{3}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 & 2 \\
\hline
w & = & -2 & + & \mathbf{1}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 &
\end{array}$$

On peut noter que deux variables sont candidates pour quitter la base, x_0 et x_5, puisqu'elles limitent toutes deux la croissance de x_2 à 1, mais on choisit toujours, dans ce cas, x_0, c'est une r
On a alors :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_2 & = & 2 & + & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & - & x_0 \\
x_1 & = & 1 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & & \\
x_5 & = & & & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & + & 2x_0 \\
\hline
w & = & & & & & & - & x_0
\end{array}$$

On peut noter que la solution de base associée à ce dictionnaire est dégénérée.
Ce dictionnaire est optimal. Puisque la valeur optimale du problème auxiliaire est nulle, ce dictionnaire fournit une solution réalisable du problème originel ($x_1 = 1$ et $x_2 = 2$). De plus, ce dictionnaire donne un dictionnaire réalisable pour le problème originel, il suffit en effet de recopier les trois premières lignes en oubliant tous les termes impliquant x_0 et d'exprimer la fonction objectif originelle z en fonction des variables hors base x_3, x_4.

$$\begin{array}{rcl}
z & = & 3x_1 + x_2 \\
 & = & 3(1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4) + 2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\
 & = & 5 - x_3 + 2x_4
\end{array}$$

Deuxième phase.
On résout maintenant le problème originel, en appliquant l'algorithme du simplexe sur le dictionnaire réalisable obtenu lors de la première phase.

$$\begin{array}{rcrcrcr||c}
x_2 & = & 2 & + & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & \infty \\
x_1 & = & 1 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & \infty \\
x_5 & = & & & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & \mathbf{0} \\
\hline
z & = & 5 & - & x_3 & + & 2x_4 &
\end{array}$$

x_4 entre en base, x_5 sort de la base. L'itération est dégénérée (z n'augmente pas).
On obtient :

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_2 & = & 2 & + & \frac{2}{3}x_3 & - & \frac{1}{3}x_5 \\
x_1 & = & 1 & - & \frac{1}{3}x_3 & - & \frac{1}{3}x_5 \\
x_4 & = & & & \frac{1}{3}x_3 & - & \frac{2}{3}x_5 \\
\hline
z & = & 5 & - & \frac{1}{3}x_3 & - & \frac{4}{3}x_5
\end{array}$$

Les coefficients de la fonction objectif sont tous négatifs, on a donc fini et la solution optimale est $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

b. **Première phase.**
On définit et on résout le problème auxiliaire :

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Maximiser} & & & & - & x_0 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & & & \\
& x_1 & - & x_2 & - & x_0 & \leq & -1 \\
& -x_1 & - & x_2 & - & x_0 & \leq & -3 \\
& 2x_1 & + & x_2 & - & x_0 & \leq & 2 \\
& & & & & x_1, x_2, x_0 & \geq & 0
\end{array} \tag{2}$$

On introduit les variables d'écart et on obtient le premier dictionnaire :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_3 & = & -1 & - & x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\
x_4 & = & -3 & + & x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\
x_5 & = & 2 & - & 2x_1 & - & x_2 & + & x_0 \\
\hline
w & = & & & & & & - & x_0
\end{array}$$

Ce dictionnaire n'est pas réalisable, on pivote x_0 et x_4 pour le rendre réalisable.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_0 & = & 3 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_4 \\
x_3 & = & 2 & - & 2x_1 & & & + & x_4 \\
x_5 & = & 5 & - & 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_4 \\
\hline
w & = & -3 & + & x_1 & + & x_2 & - & x_4
\end{array}$$

x_1 entre en base.
$x_0 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 3$, $x_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \mathbf{1}$ et $x_5 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{5}{3}$. C'est donc x_3 qui quitte la base. On obtient le dictionnaire :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr||c}
x_1 & = & 1 & & & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & \infty \\
x_0 & = & 2 & - & x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & 2 \\
x_5 & = & 2 & - & 2x_2 & + & \frac{3}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 & \mathbf{1} \\
\hline
w & = & -2 & + & \mathbf{1}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 &
\end{array}$$

x_2 entre en base, x_5 sort de la base.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr||c}
x_0 & = & 1 & - & \frac{1}{4}x_3 & + & \frac{3}{4}x_4 & + & \frac{1}{2}x_5 & 4 \\
x_1 & = & 1 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & & & \mathbf{2} \\
x_2 & = & 1 & + & \frac{3}{4}x_3 & - & \frac{1}{4}x_4 & - & \frac{1}{2}x_5 & \infty \\
\hline
w & = & -1 & + & \mathbf{\frac{1}{4}}x_3 & - & \frac{3}{4}x_4 & - & \frac{1}{2}x_5 &
\end{array}$$

x_3 entre en base, x_1 sort de la base :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_0 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{2}x_4 & + & \frac{1}{2}x_5 \\
x_2 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{3}{2}x_1 & + & \frac{1}{2}x_4 & - & \frac{1}{2}x_5 \\
x_3 & = & 2 & - & 2x_1 & + & x_4 & & \\
\hline
w & = & -\frac{1}{2} & - & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{1}{2}x_4 & - & \frac{1}{2}x_5
\end{array}$$

Les coefficients de w étant tous négatifs, l'algorithme est fini et la solution optimale du problème auxiliaire est $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ et $w = -\frac{1}{2}$. Le problème originel est donc **non réalisable** (se reporter au cours).

c. **Première phase.**
On définit et on résout le problème auxiliaire :

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Maximiser} & & & & - & x_0 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & & & \\
& x_1 & - & x_2 & - & x_0 & \leq & -1 \\
& -x_1 & - & x_2 & - & x_0 & \leq & -3 \\
& 2x_1 & - & x_2 & - & x_0 & \leq & 2 \\
& & & & & x_1, x_2, x_0 & \geq & 0
\end{array}
\tag{3}
$$

On introduit les variables d'écart et on obtient le premier dictionnaire :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_3 & = & -1 & - & x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\
x_4 & = & -3 & + & x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\
x_5 & = & 2 & - & 2x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\
\hline
w & = & & & & & & - & x_0
\end{array}
$$

On pivote x_0 et x_4 pour rendre ce dictionnaire réalisable. On obtient ainsi :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_0 & = & 3 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_4 \\
x_3 & = & 2 & - & 2x_1 & & & + & x_4 \\
x_5 & = & 5 & - & 3x_1 & & & + & x_4 \\
\hline
w & = & -3 & + & x_1 & + & x_2 & - & x_4
\end{array}
$$

On choisit d'entrer x_1 en base. $x_0 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 3$, $x_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \mathbf{1}$ et $x_5 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{5}{3}$. C'est donc x_3 qui quitte la base. On obtient le dictionnaire :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr||c}
x_1 & = & 1 & & & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & \infty \\
x_0 & = & 2 & - & x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & \mathbf{2} \\
x_5 & = & 2 & & & + & \frac{3}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 & \infty \\
\hline
w & = & -2 & + & x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 &
\end{array}
$$

x_2 entre en base, x_0 sort de la base.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_2 & = & 2 & + & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & - & x_0 \\
x_1 & = & 1 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & & \\
x_5 & = & 2 & + & \frac{3}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 & & \\
\hline
w & = & & & & & & - & x_0
\end{array}
$$

On a résolu le problème auxiliaire et en supprimant tous les termes relatifs à x_0, on a un dictionnaire réalisable pour le problème d'origine. Il suffit maintenant d'écrire la fonction objectif z du problème originel dans ce dictionnaire :

$$
\begin{array}{rcl}
z & = & 3x_1 + x_2 \\
& = & 3(1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4) + 2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\
& = & 5 - x_3 + 2x_4
\end{array}
$$

Deuxième phase.
On résout maintenant le problème originel, en appliquant l'algorithme du simplexe sur le dictionnaire réalisable obtenu lors de la première phase.

$$
\begin{array}{rcrcrcr||c}
x_2 & = & 2 & + & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & \infty \\
x_1 & = & 1 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & \infty \\
x_5 & = & 2 & + & \frac{3}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 & \mathbf{4} \\
\hline
z & = & 5 & - & x_3 & + & 2x_4 &
\end{array}
$$

x_4 entre en base, x_5 sort de la base. On obtient :

$$\begin{array}{rcrcrcr||c}
x_2 & = & 4 & + & 2x_3 & - & x_5 & \infty \\
x_1 & = & 3 & + & x_3 & - & x_5 & \infty \\
x_4 & = & 4 & + & 3x_3 & - & 2x_5 & \infty \\
\hline
z & = & 13 & + & 5x_3 & - & 4x_5 &
\end{array}$$

On choisit d'entrer x_3 en base et on constate qu'aucune variable n'est candidate pour quitter la base, car aucune contrainte ne limite la croissance de la variable x_3. Cela signifie donc que le problème est **non borné**.