

Dualité

1. On considère le programme linéaire suivant:

$$\begin{array}{l}
 \text{Minimiser} \quad -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\
 \text{Sous les contraintes :} \\
 \begin{array}{rcl}
 -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 & \geq & -8 \\
 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & \leq & 7 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
 \end{array}
 \end{array} \tag{1}$$

- a) Ecrire le programme (1) sous forme standard.
- b) Ecrire le dual (D) du programme (1).
- c) Donner une solution graphique du programme dual (D).
- d) Effectuer la première itération du simplexe sur le programme (1). Après trois itérations, on trouve que la solution optimale de ce programme est $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 3$.
- e) Vérifiez que la solution de (D) obtenue à la question c) est optimale.

2. (a) On considère le programme linéaire suivant:

$$\begin{array}{l}
 \text{Maximiser} \quad x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\
 \text{Sous les contraintes :} \\
 \begin{array}{rcl}
 2x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 4 \\
 -4x_1 + 3x_2 & \leq & 2 \\
 3x_1 - 2x_2 - x_3 & \leq & 5 \\
 x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
 \end{array}
 \end{array} \tag{2}$$

La solution $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 4$ est-elle optimale?

(b) On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{l}
 \text{Maximiser} \quad 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\
 \text{Sous les contraintes :} \\
 \begin{array}{rcl}
 x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 & \leq & 4 \\
 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 & \leq & 3 \\
 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 & \leq & 5 \\
 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 & \leq & 1 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0.
 \end{array}
 \end{array} \tag{3}$$

La solution $x_1^* = 0$, $x_2^* = \frac{4}{3}$, $x_3^* = \frac{2}{3}$, $x_4^* = \frac{5}{3}$, $x_5^* = 0$, est-elle optimale?

3. Avant l'arrivée massif de nouveaux modèles, un vendeur de téléphones portables veut écouler rapidement son stock composé de huit appareils, quatre kits 'mains libres' et dix-neuf cartes avec des communications prépayées. Après une étude de marché, il sait très bien que dans cette période de soldes, il peut proposer aux clients un téléphone avec deux cartes et que cette offre va lui rapporter un profit net de sept euros. Il peut aussi préparer à l'avance un coffret composé d'un téléphone, d'un kit 'mains libres' et de trois cartes, ce qui va lui rapporter un profit net de neuf euros. Il est assuré de pouvoir vendre tranquillement n'importe quelle quantité de ces offres dans la limite du stock disponible. Quelle quantité de chaque offre notre vendeur doit-il préparer pour maximiser son profit net?
- Un représentant commercial d'une grande surface lui propose d'acheter son stock 'en vrac'. Quels sont les prix unitaires raisonnables qu'il doit négocier pour chaque produit (téléphone, kit 'mains libres', carte prépayée) ?