LPSIL **Année 2007-2008**

TD MathOpt - Feuille 3 - Correction

Dualité

Correction de l'exercice 1

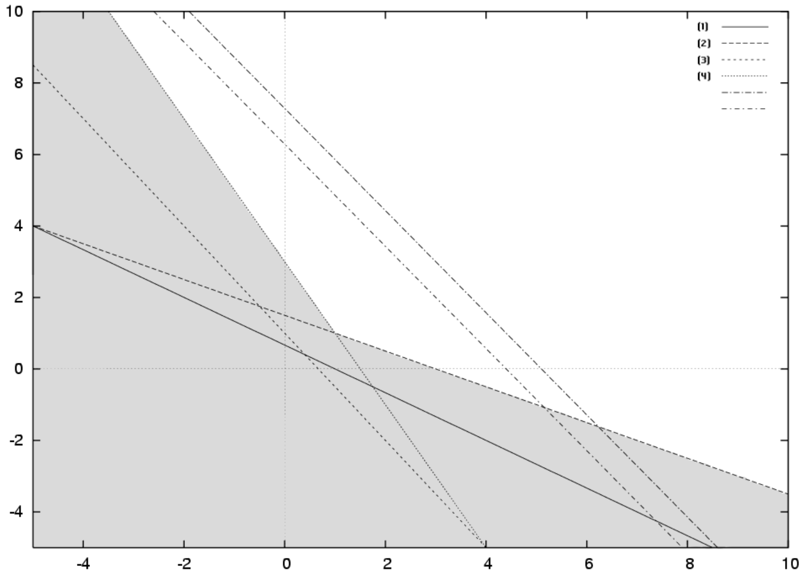
a) Le programme sous forme standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{Maximiser} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & & & & & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 8 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 7 \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) Le dual:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{Minimiser} & 8y_1 & + & 7y_2 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & \\
 & 2y_1 & + & 3y_2 & \geq & 2 \\
 & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 3 \\
 & 3y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 \\
 & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 3 \\
 & & & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

c) Représentation graphique



La solution obtenue est donc : $y_1 = 1,\ y_2 = 1$.

d) 1ère itération du simplexe:

On introduit les variables d'écart x_5, x_6 et on obtient le premier dictionnaire:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_5 & = & 8 & - & 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 \\ x_6 & = & 7 & - & 3x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 \\ z & = & & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 + & 3x_4 & \end{array}$$

La solution de base associée à ce dictionnaire est:$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 8$, $x_6 = 7$ et $z = 0$.

On choisit x_2 comme variable entrante, car son coefficient dans la fonction objectif est le plus élevé (on pouvait aussi choisir x_4 qui a le même coefficient).

On cherche la variable sortante et on écrit pour cela les contraintes de positivité sur les variables en base, avec $x_1 = x_3 = x_4 = 0$.

- La contrainte associée à x_5 donne $x_2 \leq 8$.
- La contrainte associée à x_6 donne $x_2 \leq \frac{7}{2}$.

C'est donc la variable x_6 qui borne la croissance de x_2, c'est elle qui sort de la base. On obtient après pivot:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_2 & = & \frac{7}{2} & - & \frac{3}{2}x_1 & - & x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 & - & \frac{1}{2}x_6 \\ x_5 & = & \frac{9}{2} & - & \frac{1}{2}x_1 & - & 2x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & + & \frac{1}{2}x_6 \\ z & = & \frac{21}{2} & - & \frac{5}{2}x_1 & - & x_3 & + & \frac{3}{2}x_4 & - & \frac{3}{2}x_6 \end{array}$$

e) Les solutions primale et duale sont optimales.

En effet, les solutions trouvées sont réalisables (il suffit de voir que la solution primale vérifie toutes les contraintes du problème primal et la solution duale toutes celles du problème dual). Elles donnent comme valeur pour les fonctions objectif 15 (valeur de l'objectif du primal) et 15 (valeur de l'objectif du dual). Le théorème vu en cours sur la dualité nous permet donc (puisque 15=15) d'affirmer que nos solutions sont optimales.

Correction de l'exercice 2

(a) Le problème dual est:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{Minimiser} & 4y_1 & + & 2y_2 & + & 5y_3 & & \\ \text{Sous les contraintes :} & & & & & & & \\ & 2y_1 & - & 4y_2 & + & 3y_3 & \geq & 1 \\ & -y_1 & + & 3y_2 & - & 2y_3 & \geq & -3 \\ & y_1 & & & - & y_3 & \geq & 3 \\ & & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

On vérifie que la solution proposée est réalisable.

- 1ère contrainte $4 = 4$
- 2e contrainte $0 < 2$

- 3e contrainte $-4 < 5$

Les contraintes associées à y_2 et y_3 étant lâches (inégalités strictes), d'après le théorème des écarts complémentaires, $y_2 = y_3 = 0$.

D'après ce même théorème, les contraintes du dual associées à une variable primale strictement positive sont vérifiées à l'égalité. On a donc, puisque $x_3 > 0$:

$$y_1 - y_3 = 3$$

Donc la solution duale associée à la solution primale donnée est:
$y_1 = 3$, $y_2 = 0$ et $y_3 = 0$.

Cette solution étant dual-réalisable, on en déduit que la solution proposée est optimale.

(b) Non, la solution proposée n'est pas optimale.
On vérifie tout d'abord qu'elle est réalisable :

- 1ère contrainte 4=4
- 2ème contrainte 3=3
- 3ème contrainte $\frac{14}{3} < 5$
- 4ème contrainte 1=1

Le problème dual est:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{Minimiser} & 4y_1 & + & 3y_2 & + & 5y_3 & + & y_4 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & & & & & \\
 & y_1 & + & 4y_2 & + & 2y_3 & + & 3y_4 & \geq & 7 \\
 & 3y_1 & + & 2y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & \geq & 6 \\
 & 5y_1 & - & 2y_2 & + & 4y_3 & + & 2y_4 & \geq & 5 \\
 & -2y_1 & + & y_2 & - & 2y_3 & - & y_4 & \geq & -2 \\
 & 2y_1 & + & y_2 & + & 5y_3 & - & 2y_4 & \geq & 3 \\
 & & & & & & & y_1, y_2, y_3, y_4 & \geq & 0
\end{array}$$

D'après le théorème 4.3, x^* est optimale si et seulement si il existe $y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*$ tels que :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
3y_1^* & + & 2y_2^* & + & 4y_3^* & + & y_4^* & = & 6 \\
5y_1^* & - & 2y_2^* & + & 4y_3^* & + & 2y_4^* & = & 5 \\
-2y_1^* & + & y_2^* & - & 2y_3^* & - & y_4^* & = & -2 \\
 & & & & y_3^* & & & = & 0
\end{array}$$

et tels que y^* soit dual réalisable.

La solution du système est $y_1^* = y_2^* = y_4^* = 1$ et $y_3^* = 0$. **Mais cette solution n'est pas duale réalisable,** x^* **n'est donc pas optimale.**

Correction de l'exercice 3

On définit tout d'abord les variables de décision suivantes :

- x_1 est le nombre d'offres 'un téléphone + deux cartes prépayées' préparées,
- x_2 est le nombre d'offres 'un téléphone + un kit mains libres + 3 cartes prépayées' préparées.

Puisque la première offre rapporte 7 euros et la deuxième 9 euros, le profit réalisé par le vendeur est : $7x_1 + 9x_2$, c'est la fonction objectif que l'on désire maximiser.

De plus, le vendeur ne peut pas vendre plus d'offres que ne le permet son stock.

$$\begin{array}{rcccrcrl} & x_1 & + & & x_2 & \leq & 8 & \text{les téléphones,} \\ 2 & x_1 & + & 3 & x_2 & \leq & 19 & \text{les cartes,} \\ & & & & x_2 & \leq & 4 & \text{les kits mains libres,} \end{array}$$

Les variables sont positives, ainsi le programme linéaire à résoudre est le suivant.

$$\begin{array}{lrcccccr} \text{Maximiser} & 7 & x_1 & + & 9 & x_2 & & \\ \text{sous :} & & x_1 & + & & x_2 & \leq & 8 \\ & 2 & x_1 & + & 3 & x_2 & \leq & 19 \\ & & & & & x_2 & \leq & 4 \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2} & & \geq & 0 \end{array}$$

La solution optimale de ce programme est $x_1 = 5$ et $x_2 = 3$, et la valeur optimale est 62.

L'objectif de la grande surface est de minimiser le prix d'achat du stock, mais il doit quand même proposer un prix intéressant pour le revendeur. On pose donc les variables suivantes :

- y_1 est le prix d'achat d'un téléphone du stock,
- y_2 est le prix d'achat d'une carte,
- y_3 est le prix d'achat d'un kit mains libres,

Le prix d'achat du stock est donc : $8y_1 + 19y_2 + 4y_3$. Pour que les prix proposés par la grande surface soient intéressants pour le revendeur, il ne faut pas qu'il perde de l'argent par rapport aux offres qu'il aurait pu écouler, c'est à dire :

$$\begin{array}{ccccccrc} y_1 & & & + & 2 & y_3 & \geq & 7 \\ y_1 & + & y_2 & + & 3 & y_3 & \geq & 9 \end{array}$$

Les prix sont évidemment positifs. Le programme que doit résoudre la grande surface pour décider des prix qu'elle doit proposer correspond en fait au programme dual.