

Profil des graphes et des relations, un survol.

Maurice Pouzet

Université Claude-Bernard,
43, Bd. du 11 Novembre 1918,
69622 Villeurbanne, France
e-mail: pouzet@univ-lyon1.fr

Abstract

Le *profil* d'une structure relationnelle R est la fonction φ_R qui compte pour chaque entier n le nombre de ses sous-structures à n éléments, les sous-structures isomorphes étant identifiées. Plusieurs fonctions de dénombrement sont des profils; c'est particulièrement le cas des fonctions de la forme θ_G où G un groupe de permutations sur un ensemble E et $\theta_G(n)$ est le nombre d'orbites des parties à n éléments de E . Les groupes pour lesquels $\theta_G(n)$ ne prend que des valeurs finies sont dits *oligomorphes*; l'étude de leur profil, initiée par P.J.Cameron, est un sujet de recherche en soi. Dans cet exposé, je présenterai quelques faits frappants concernant le comportement des profils. Par exemple: le profil d'une structure relationnelle infinie R est non-décroissant et, si R consiste seulement d'un nombre fini de relations, sa croissance asymptotique est soit polynomiale, soit plus grande que tout polynôme. Des exemples importants de croissance polynomiale viennent des groupes. Par exemple, comme noté par P.J.Cameron, si G est un groupe de permutation agissant sur $\{1, \dots, k\}$ et si $G' := G \wr \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, produit en couronne de G et du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, est vu comme groupe de permutations agissant sur $\{1, \dots, k\} \times \mathbb{N}$, alors, pour chaque n , $\theta_{G'}(n) = \dim \text{Inv}_n(G)$, où $\text{Inv}(G)$ est la sous-algèbre de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_k]$ constituée des polynômes en les k indéterminées X_1, \dots, X_k qui sont invariants par l'action de G et $\text{Inv}_n(G)$ est la composante de degré n . Il est bien connu que la série de Hilbert de $\text{Inv}_n(G)$ est une fraction rationnelle, d'une forme telle que $\theta_{G'}(n)$ est un quasi-polynôme de degré $k - 1$, qui donc croît comme un polynôme de degré $k - 1$. Les recherches en cours suggèrent de voir le profil d'une structure relationnelle R comme la fonction de Hilbert d'une algèbre graduée associée à R ; un exemple est l'algèbre d'un âge, inventée par P.J. Cameron. Des notions issues de la théorie de l'ordre et de la combinatoire (eg belordre, algèbre ordonnée, théorème de Ramsey) jouent un rôle clef dans l'étude du profil. Une indication sur la solution d'une conjecture de Cameron sur l'intégrité de l'algèbre d'un âge sera donnée. Il est conjecturé que la série génératrice associée à un profil est une fraction rationnelle lorsque ce profil est polynomial (et la structure a un noyau fini). Des progrès ont été obtenus avec Y.Boudabbous and N.Thiéry, le cas des tournois est élucidé. Le cas des graphes sera discuté.