

Permutations signées et théorème des quatre couleurs

Séminaire ALGCo

LIRMM, Montpellier II, 18 mars 2010

Shalom Eliahou

Université du Littoral Côte d'Opale
Calais

Introduction

[Avec Cédric Lecouvey]

But : Donner une nouvelle reformulation algébrique du théorème des quatre couleurs. [Voir aussi R. Thomas, Notices AMS (1998), pour d'autres reformulations du T4C]

Notation.

- $[n] = \{1, \dots, n\}$
- $S_n =$ groupe des permutations de $[n]$
- $E_n =$ sous-ensemble des *transpositions élémentaires* $(i \ i + 1)$ pour $i \in [n - 1]$.

E_n engendre S_n .

On représente $\sigma \in S_n$ comme un **mot** dans l'alphabet $[n]$:

$$\sigma = a_1 a_2 \dots a_n$$

où $a_i = \sigma(i)$ pour tout $i \in [n]$. **E.g.** $S_3 = \{123, 132, \dots, 321\}$.

* * *

Considérons le **graphe de Cayley** $\text{Cay}(S_n, E_n)$:

- **sommets:** S_n
- **arêtes:** paires $\{\sigma, \tau\}$, où $\sigma \in S_n$ et $\tau \in E_n$

Ce graphe est *connexe*, puisque $S_n = \langle E_n \rangle$.

Ainsi, pour tout $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$, il y a un chemin

$$\sigma_1 \rightarrow \tau_1 \sigma_1 \rightarrow \tau_2 \tau_1 \sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tau_r \cdots \tau_2 \tau_1 \sigma_1 = \sigma_2$$

dans $\text{Cay}(S_n, E_n)$ de σ_1 à σ_2 , avec $\tau_i \in E_n$ pour tout i .

Exemple 1. $\sigma_1 = 123 \rightarrow 132 \rightarrow 312 \rightarrow 321 = \sigma_2$

* * *

Ainsi, pour tout $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$, il y a un chemin

$$\sigma_1 \rightarrow \tau_1 \sigma_1 \rightarrow \tau_2 \tau_1 \sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tau_r \cdots \tau_2 \tau_1 \sigma_1 = \sigma_2$$

dans $\text{Cay}(S_n, E_n)$ de σ_1 à σ_2 , avec $\tau_i \in E_n$ pour tout i .

Exemple 2. $\sigma_1 = 123 \rightarrow 132 \rightarrow 312 \rightarrow 321 = \sigma_2$

* * *

Certains de ces chemins sont **signables**. Voici notre nouvelle reformulation du théorème des quatre couleurs :

Théorème 3 *Pour tout $n \geq 2$ et tout $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$, il y a un chemin signable dans $\text{Cay}(S_n, E_n)$ de σ_1 à σ_2 .*

La définition de **chemin signable** se fait via la comparaison entre $\text{Cay}(S_n, E_n)$ et le graphe de Cayley $\text{Cay}(B_n, E'_n)$, où

- B_n est le **groupe des permutations signées**,
- $E'_n \subset B_n$ est l'ensemble des **transpositions élémentaires signées**.

Il y a une flèche naturelle

$$\begin{array}{c} \text{Cay}(B_n, E'_n) \\ \downarrow \text{abs} \\ \text{Cay}(S_n, E_n) \end{array}$$

et on s'intéresse aux chemins dans $\text{Cay}(S_n, E_n)$ qui se "remontent bien" dans $\text{Cay}(B_n, E'_n)$ via cette flèche.

Permutations signées

Une **permutation signée** est un mot de la forme

$$w = (\epsilon_1 a_1)(\epsilon_2 a_2) \dots (\epsilon_n a_n)$$

où

$$\sigma = a_1 a_2 \dots a_n \in S_n$$

et

$$\epsilon_i = \pm 1 \quad \forall i \in [n].$$

Exemple 4.

$$w = (-2)(-5)(+4)(+1)(-3) = \overset{-}{2}\overset{-}{5}\overset{+}{4}\overset{+}{1}\overset{-}{3}$$

On identifie une permutation signée

$w = (\epsilon_1 a_1)(\epsilon_2 a_2) \dots (\epsilon_n a_n)$ à une **permutation antisymétrique** de

$$[\pm n] = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\},$$

en définissant

$$w(-j) = -w(j) = -\epsilon_j a_j$$

pour tout $j \in [n]$.

Notation 5. $B_n =$ ensemble des permutations signées de $[\pm n]$.

B_n est un sous-groupe du groupe des permutations de $\{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$, et $|B_n| = 2^n n!$

Définition 6. L'application *valeur absolue*

$$\text{abs} : B_n \rightarrow S_n$$

est définie par

$$\text{abs}((\epsilon_1 a_1)(\epsilon_2 a_2) \dots (\epsilon_n a_n)) = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Exemple 7.

$$w = \overset{+}{2} \overset{-}{5} \overset{-}{4} \overset{+}{1} \overset{-}{3} \in B_5 \quad \Longrightarrow \quad \text{abs}(w) = 25413 \in S_5.$$

Transpositions élémentaires signées

On introduit des *analogues signés* des transpositions élémentaires. Il y a deux types. Soit

$$w = (\epsilon_1 a_1)(\epsilon_2 a_2) \dots (\epsilon_i a_i)(\epsilon_{i+1} a_{i+1}) \dots (\epsilon_n a_n) \in B_n.$$

- Les transpositions élémentaires τ_i^+ **préservant les signes**:

$$\tau_i^+ w = (\epsilon_1 a_1)(\epsilon_2 a_2) \dots (\epsilon_{i+1} a_{i+1})(\epsilon_i a_i) \dots (\epsilon_n a_n).$$

- Les transpositions élémentaires τ_i^- **inversant les signes**:

$$\tau_i^- w = (\epsilon_1 a_1)(\epsilon_2 a_2) \dots (-\epsilon_{i+1} a_{i+1})(-\epsilon_i a_i) \dots (\epsilon_n a_n).$$

Cay(B_n, E'_n)

Notons E'_n l'ensemble des transpositions élémentaires signées,

$$E'_n = \{\tau_i^+, \tau_i^- \mid i \in [n-1]\}.$$

Considérons maintenant le **graphe de Cayley** $\text{Cay}(B_n, E'_n)$:

- **sommets:** B_n
- **arêtes:** paires $\{w, \tau w\}$, où $w \in B_n$ et $\tau \in E'_n$.

Remarque 8. $\text{Cay}(B_n, E'_n)$ a deux composantes connexes, car $\langle E'_n \rangle$ est un sous-groupe d'indice 2 dans B_n .

Arêtes actives et passives

On distingue deux types d'arêtes dans $\text{Cay}(S_n, E_n)$. L'arête

$$UabV \longrightarrow UbaV,$$

où U, V sont des sous-mots et a, b des lettres dans $[n]$, est

- **passive** si le facteur droit V contient une lettre $c \in [n]$ avec $\min(a, b) < c < \max(a, b)$
- **active** sinon.

On écrit $--\rightarrow$ pour les arêtes passives, et \longrightarrow pour les arêtes actives.

Exemple 9. L'arête $24531 --\rightarrow 42531$ est passive, alors que $24531 \longrightarrow 24351$ est active.

Arêtes admissibles

Considérons maintenant les arêtes dans $\text{Cay}(B_n, E'_n)$.

Une arête $e' = (w, \tau w)$ dans $\text{Cay}(B_n, E'_n)$ est *admissible* si

- $abs(e')$ est **passive** et $\tau \in E'_n$ **préserve les signes**, ou
- $abs(e')$ est **active**, $\tau \in E'_n$ **inverse les signes**, et les deux lettres transposées par τ **ont le même signe**.

Exemples d'arêtes admissibles ou pas.

• admissible: $\begin{matrix} + & - & & - & + & - \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{matrix} \dashrightarrow \begin{matrix} - & + & & - & + & - \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{matrix}$ (cas passif)

• admissible: $\begin{matrix} + & - & - & + & - \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} + & + & + & + & - \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{matrix}$ (cas actif)

• non-admissible: la transposition de $\overset{+}{1}, \overset{-}{3}$ dans $\begin{matrix} + & - & - & + & - \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{matrix}$

Chemins signables et admissibles

Définition 10.

- Un chemin φ' dans $\text{Cay}(B_n, E'_n)$ est **admissible** si toutes ses arêtes sont admissibles.
- Un chemin φ dans $\text{Cay}(S_n, E_n)$ est **signable** s'il se relève en un chemin admissible φ' dans $\text{Cay}(B_n, E'_n)$ t.q.

$$\text{abs}(\varphi') = \varphi.$$

Exemple 11. Le chemin $123 \rightarrow 132 \dashrightarrow 312 \rightarrow 321$ est signable:

$$123 \rightarrow 1 \overset{++}{32} \dashrightarrow \overset{+}{31} \overset{+}{2} \rightarrow \overset{+}{3} \overset{--}{21}$$

Exemple 12. Soit $\sigma_1 = 32415$, $\sigma_2 = 45312 \in S_5$.

Voici deux chemins de σ_1 à σ_2 dans $\text{Cay}(S_5, E_5)$.

● *Un chemin non-signable:*

$$\begin{aligned}
 32415 &\rightarrow 3 \overset{--}{42} 15 \rightarrow \overset{++}{43} \overset{-}{215} \rightarrow \overset{+-}{432} \overset{\epsilon\epsilon}{51} \rightarrow \overset{++}{43} \overset{++}{52} \overset{-}{1} \\
 &\rightarrow \overset{+}{4} \overset{--}{53} \overset{+-}{21} \rightarrow \overset{+-}{453} \overset{!!}{12}
 \end{aligned}$$

● *Un chemin signable:*

$$\begin{aligned}
 32415 &\rightarrow 324 \overset{--}{51} \rightarrow 32 \overset{++}{54} \overset{-}{1} \dashrightarrow 3 \overset{+}{52} \overset{+-}{41} \rightarrow 35 \overset{+}{42} \overset{-}{1} \\
 &\dashrightarrow \overset{+}{53} \overset{--}{421} \rightarrow \overset{+}{5} \overset{++}{43} \overset{--}{21} \rightarrow \overset{--}{45} \overset{+-}{321} \rightarrow \overset{--}{453} \overset{++}{12}
 \end{aligned}$$

Le résultat principal

Théorème 13. *Les énoncés suivants sont équivalents:*

1. *Le théorème des quatre couleurs.*
2. *Pour tout $n \geq 2$, et pour tout $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$, il y a un **chemin signable** de σ_1 à σ_2 dans $\text{Cay}(S_n, E_n)$.*

Le résultat principal

Théorème 14. *Les énoncés suivants sont équivalents:*

1. *Le théorème des quatre couleurs.*
2. *Pour tout $n \geq 2$, et pour tout $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$, il y a un **chemin signable** de σ_1 à σ_2 dans $\text{Cay}(S_n, E_n)$.*

Ingrédients de preuve.

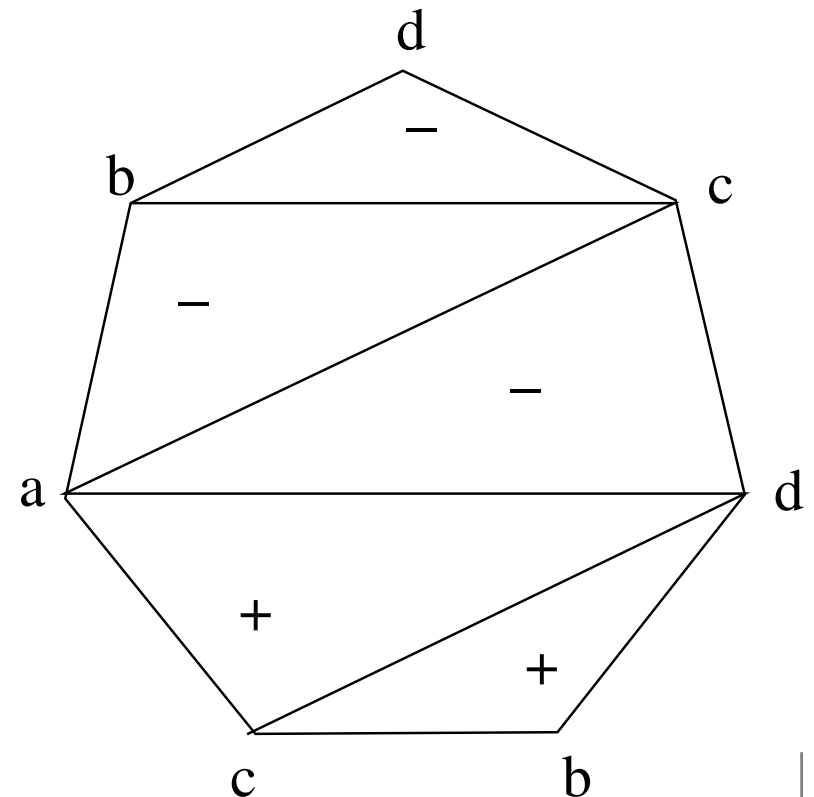
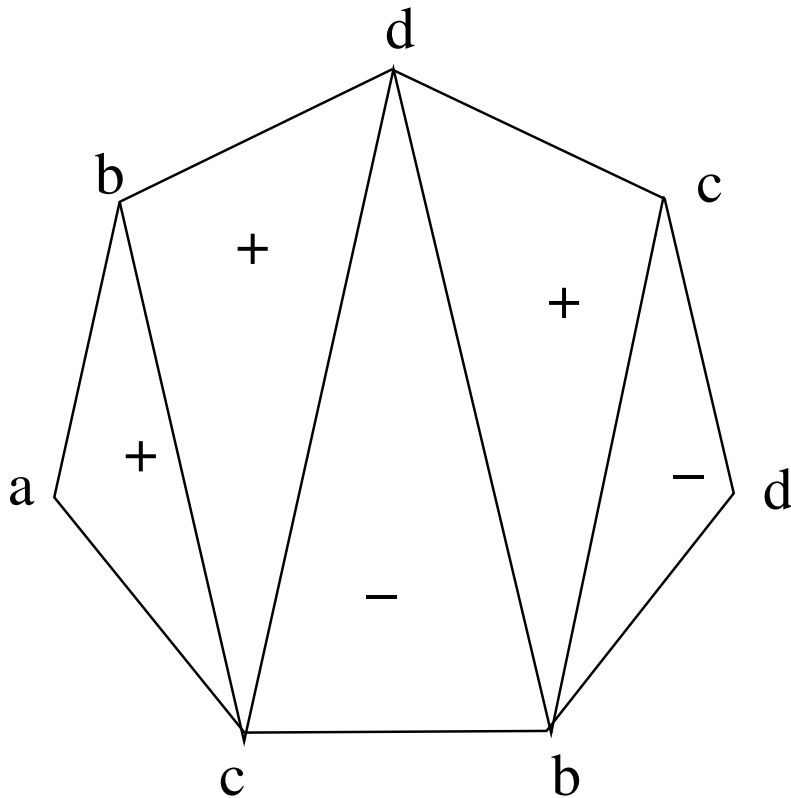
- Restriction aux triangulations hamiltoniennes de la sphère (Whitney).
- Signatures de Heawood.
- Une reformulation antérieure du T4C en termes du graphe des flips \mathcal{F}_n .
- Une application $g : \text{Cay}(S_n, E_n) \rightarrow \mathcal{F}_n$.

1. Triangulations hamiltoniennes

Théorème 15 (Whitney). *Pour démontrer le T4C, il suffit de montrer que les **triangulations hamiltoniennes planes** sont 4-coloriables.*

1. Triangulations hamiltoniennes

Théorème 16 (Whitney). *Pour démontrer le T4C, il suffit de montrer que les **triangulations hamiltoniennes planes** sont 4-coloriables.*



2. Signatures de Heawood

Notons $\mathbf{F}(G)$ l'ensemble des faces de G . Pour tout sommet v , notons \mathbf{F}_v l'ensemble des faces de G *incidentes* à v .

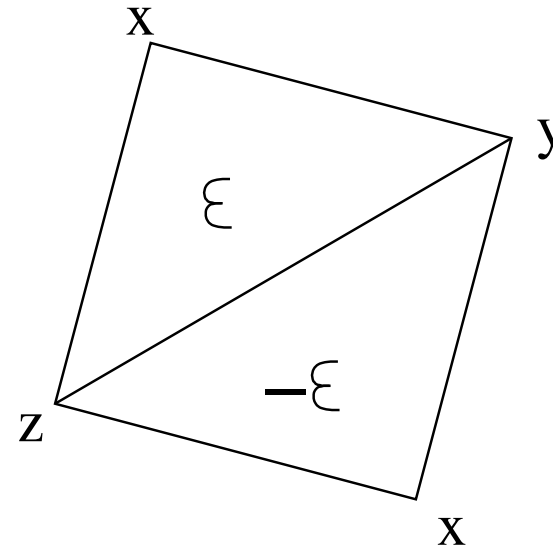
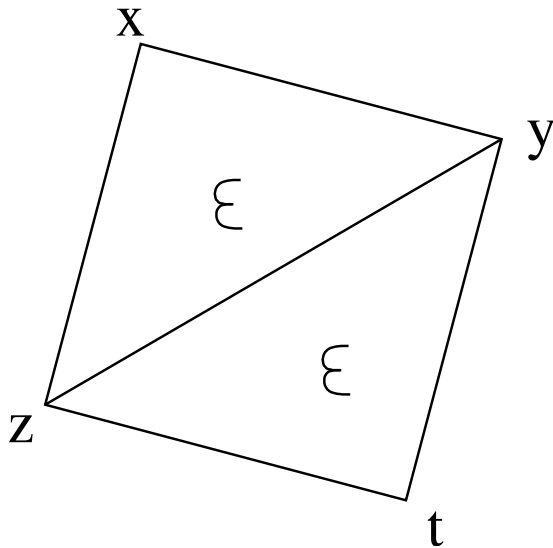
Définition 17. Une signature $\epsilon : \mathbf{F}(G) \rightarrow \{\pm 1\}$ est dite *de Heawood* si pour tout sommet v de G , on a

$$\sum_{F \in \mathbf{F}_v} \epsilon(F) \equiv 0 \pmod{3}.$$

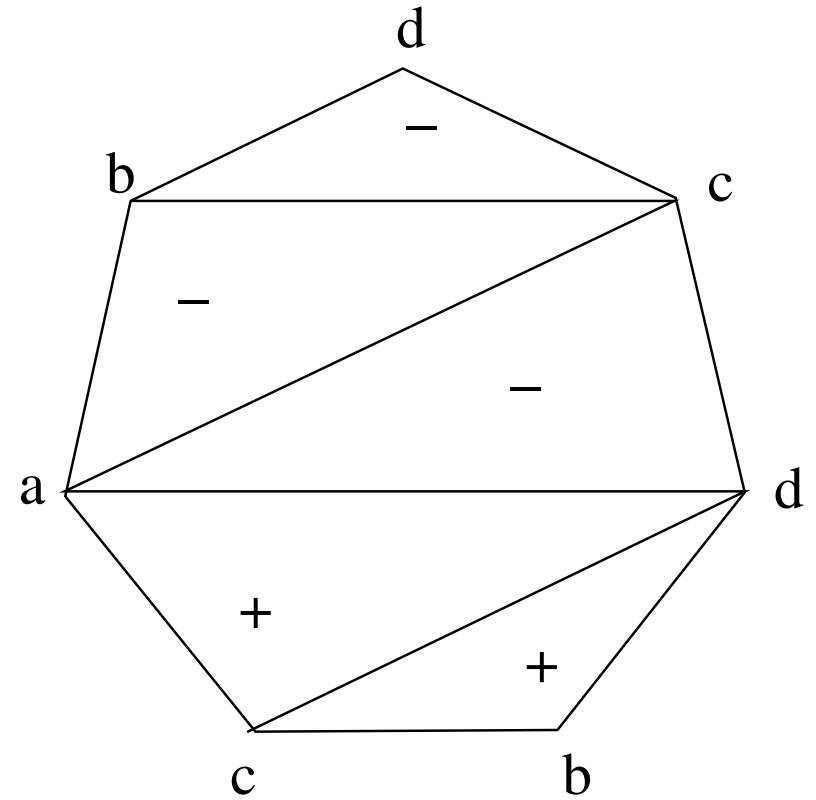
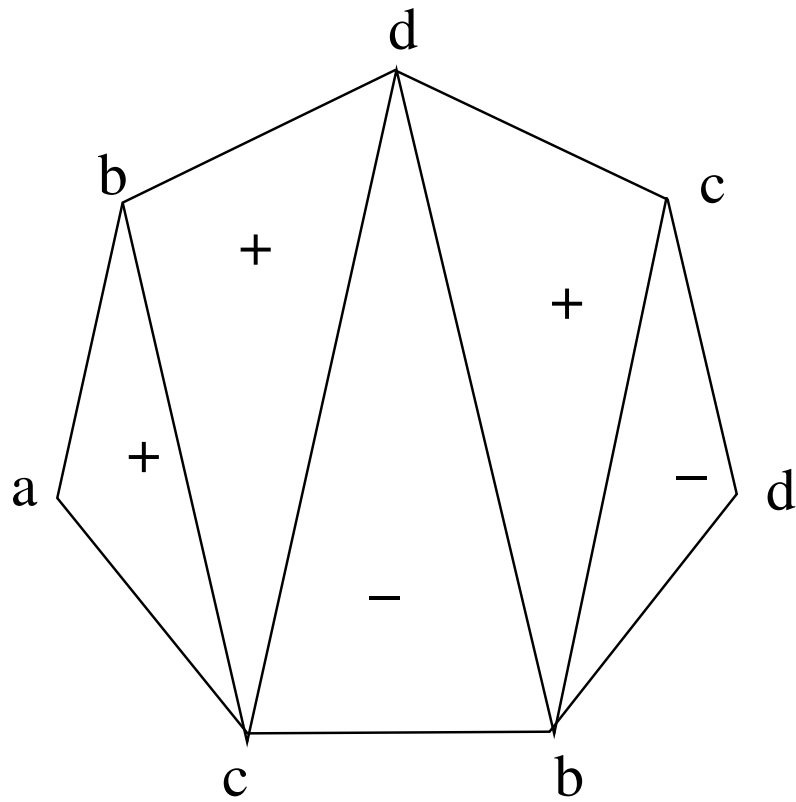
Théorème 18 (Heawood, 1897). Soit G une triangulation plane. Les énoncés suivants sont équivalents:

1. G est 4-coloriable.
2. Il y a une signature de Heawood $\epsilon : \mathbf{F}(G) \rightarrow \{\pm 1\}$.

Le dictionnaire 4-coloriages \leftrightarrow signatures de Heawood peut être décrit par la règle suivante [Gravier-Payan, 2002]:



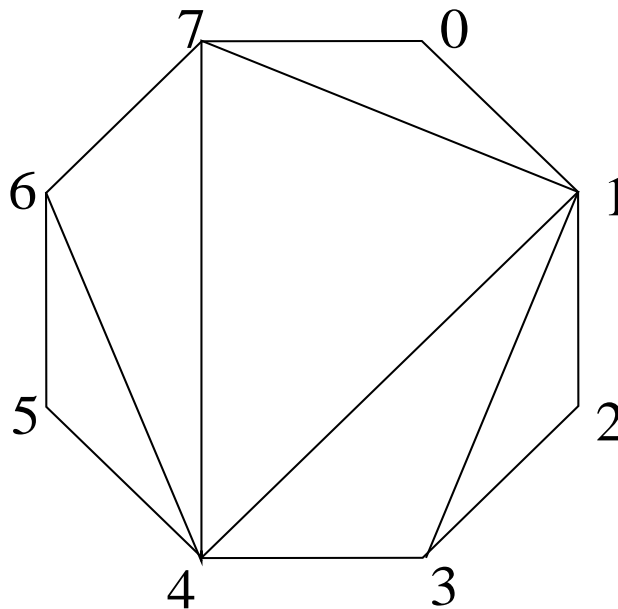
L'exemple ci-dessus



3. Flips signés et le T4C

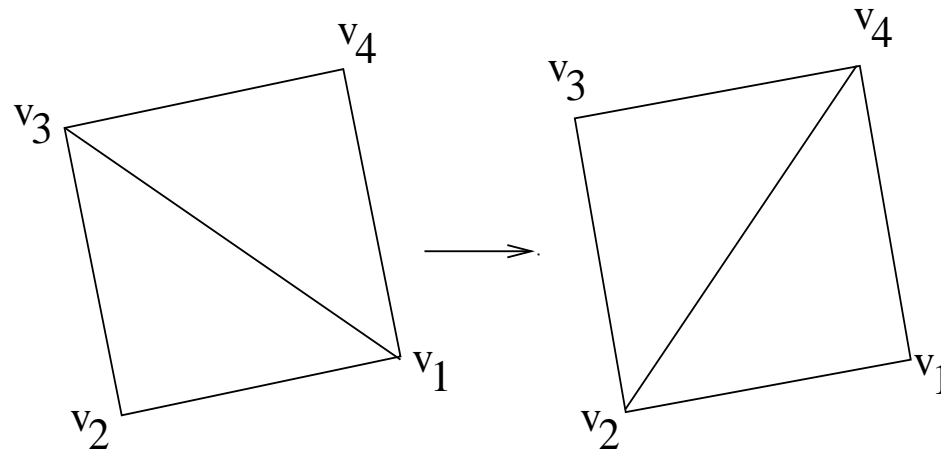
Soit $P = P_n$ un $(n + 2)$ -gone plan convexe donné, avec sommets notés cycliquement $\{0, 1, \dots, n + 1\}$. Soit $\mathcal{T}_n = \{\text{triangulations de } P_n\}$.

Exemple 19. *Une triangulation dans \mathcal{T}_6 :*



Le graphe des flips \mathcal{F}_n

Définition 20. Un *flip diagonal*:

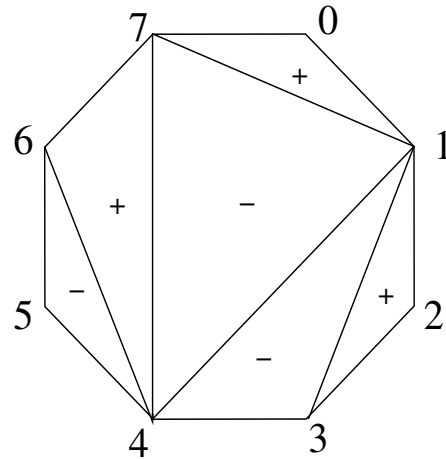


Définition 21. Le *graphe des flips* \mathcal{F}_n est le graphe suivant :

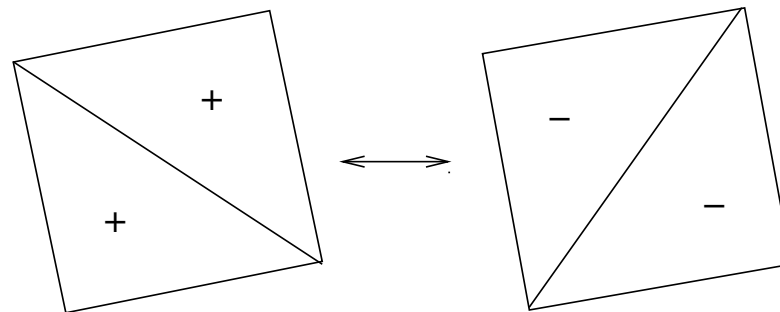
- **sommets:** \mathcal{T}_n
- **arêtes:** paires de triangulations T_1, T_2 différant d'exactly un flip diagonal.

Le graphe des flips signés \mathcal{F}'_n

Une triangulation signée dans \mathcal{F}'_6 :



Un flip diagonal signé :

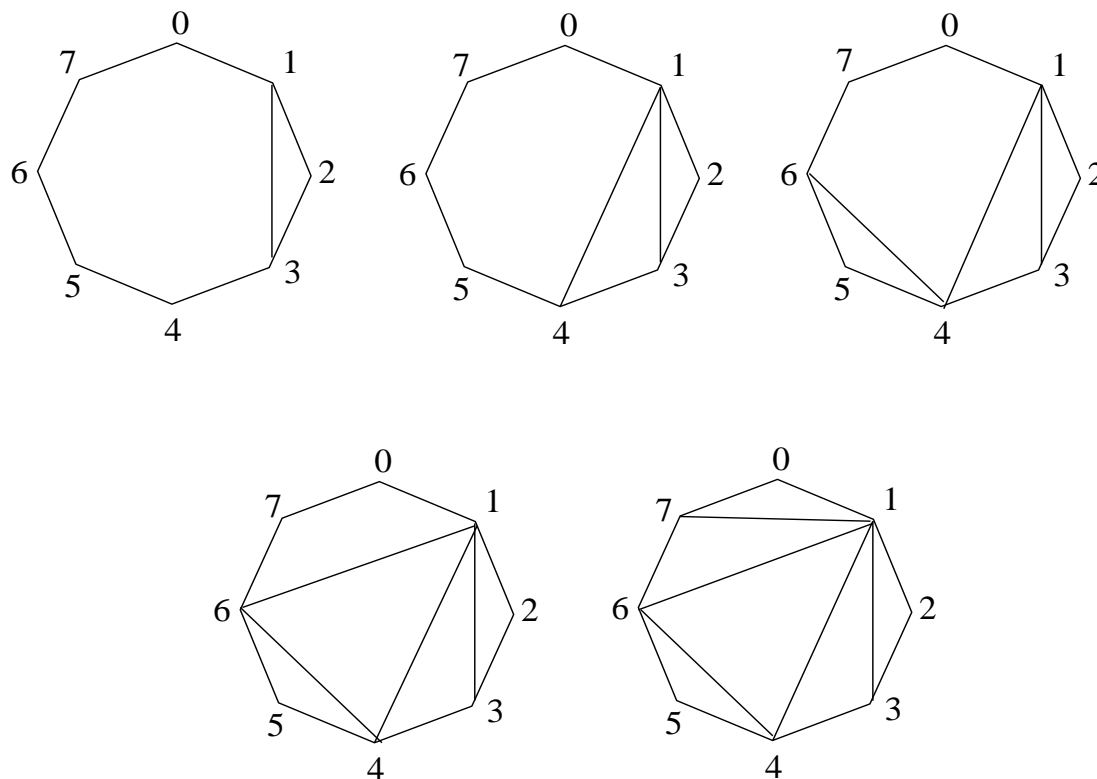


Théorème 22 (E. 1999, Gravier-Payan 2002) *Les énoncés suivants sont équivalents:*

- *Le théorème des 4 couleurs.*
- *Pour tout $n \geq 2$ et toute paire de triangulations T_1, T_2 de P_n , il existe des **signatures** ϵ_1, ϵ_2 des faces intérieures de T_1, T_2 et un chemin de **flips diagonaux signés** de (T_1, ϵ_1) à (T_2, ϵ_2) dans \mathcal{F}'_n .*

4. De S_n vers \mathcal{T}_n

Il y a une flèche $g : S_n \rightarrow \mathcal{T}_n$. Par exemple, soit $\sigma = 235461 \in S_6$. On construit ainsi la triangulation $g(\sigma) \in \mathcal{T}_6$:



Cette flèche $g : S_n \rightarrow \mathcal{T}_n$ induit une **contraction**

$$g : \text{Cay}(S_n, E_n) \rightarrow \mathcal{F}_n.$$

Proposition 23. Soit $e = (\sigma, \tau\sigma)$ une arête dans $\text{Cay}(S_n, E_n)$.

- Si e est **passive**, alors $g(\sigma) = g(\tau\sigma)$.
- Si e est **active**, alors $g(\sigma), g(\tau\sigma)$ diffèrent d'un flip diagonal.

Cela s'étend facilement à la version signée, et fournit donc

$$g : \text{Cay}(B_n, E'_n) \rightarrow \mathcal{F}'_n.$$

Conclusion

Un **chemin signable** de σ_1 à σ_2 dans $\text{Cay}(S_n, E_n)$ donne

- une suite signable de flips diagonaux de $g(\sigma_1)$ à $g(\sigma_2)$ dans \mathcal{F}'_n , et donc
- un 4-coloriage du graphe plan hamiltonien

$$G = g(\sigma_1) \cup_P g(\sigma_2).$$

