Orientation de simplexes selon des ordres sur les coordonnées des sommets

Kevin Sol
en collaboration avec Emeric Gioan et Gérard Subsol

LIRMM

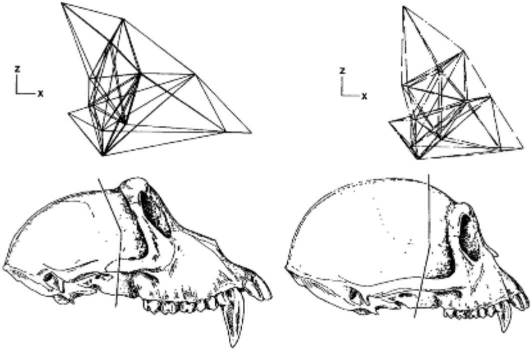
10 octobre 2010

Plan

Plan

Motivations

Étude de forme 3D de structures anatomiques.



Utilisations :

- Anthropologie, paléontololgie
- Médecine

Motivations

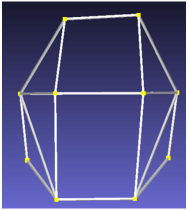
On veut réaliser une étude combinatoire des crânes en 3D

Motivations

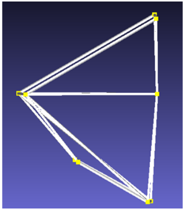
On veut réaliser une étude combinatoire des crânes en 3D
$\Rightarrow$ étudier l'orientation de tous les tétraèdres.

Motivations

On veut réaliser une étude combinatoire des crânes en 3D
$\Rightarrow$ étudier l'orientation de tous les tétraèdres.



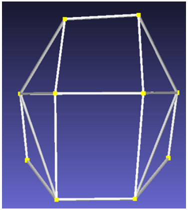
vue de face



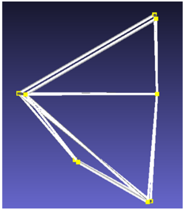
vue de profil

Motivations

On veut réaliser une étude combinatoire des crânes en 3D
$\Rightarrow$ étudier l'orientation de tous les tétraèdres.



vue de face



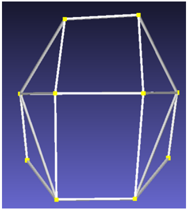
vue de profil

Résultat

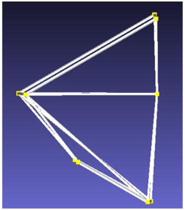
entre 2 crânes $\approx$ 70% des tétraèdres sont orientés de la même façon.

Motivations

On veut réaliser une étude combinatoire des crânes en 3D
$\Rightarrow$ étudier l'orientation de tous les tétraèdres.



vue de face



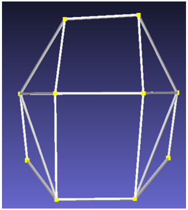
vue de profil

Résultat

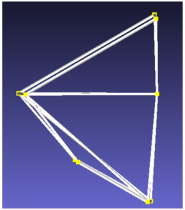
entre 2 crânes $\approx$ 70% des tétraèdres sont orientés de la même façon. Pourquoi ?

Problématique

Quel que soit le crâne, il existe des relations d'ordre entre les points



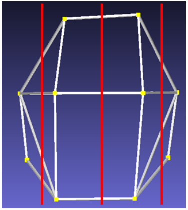
vue de face



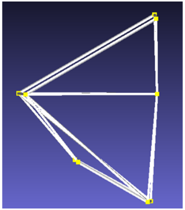
vue de profil

Problématique

Quel que soit le crâne, il existe des relations d'ordre entre les points
Il y en a plus à gauche que d'autres



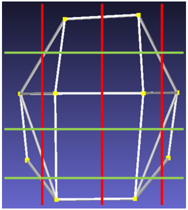
vue de face



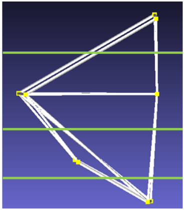
vue de profil

Problématique

Quel que soit le crâne, il existe des relations d'ordre entre les points
Il y en a plus haut que d'autres



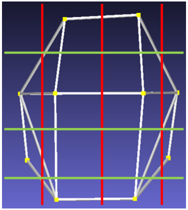
vue de face



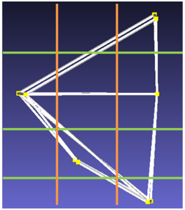
vue de profil

Problématique

Quel que soit le crâne, il existe des relations d'ordre entre les points
Il y en a plus devant que d'autres



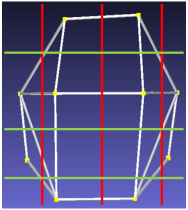
vue de face



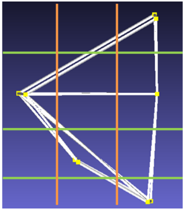
vue de profil

Problématique

Quel que soit le crâne, il existe des relations d'ordre entre les points



vue de face



vue de profil

Problématique

Pourrait-on déterminer uniquement à partir des ordres, des tétraèdres qui ne changent pas d'orientation ?

Notations

- E = espace de dimension $n-1$
- $\mathcal{P}$ = ensemble de n points dans E
- $x_{j,i}$ = $i-$ème coordonnée du point j
- $$M_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{1,1} & x_{2,1} & \dots & x_{n,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \dots & x_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n-1} & x_{2,n-1} & \dots & x_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

Notations

- E = espace de dimension $n-1$
- $\mathcal{P}$ = ensemble de n points dans E
- $x_{j,i}$ = $i-$ème coordonnée du point j
- $M_{\mathcal{P}}$

Définition

On appelle *configuration de* $n-1$ *ordres*, $n-1$ ordres sur un ensemble $\mathcal{E}$ de taille n de sorte que :

$$\forall (j,k) \in \mathcal{E}, \exists i \in \{1,\ldots,n-1\} \text{ tel que } j <_i k \text{ ou } k <_i j$$

Notations

- E = espace de dimension $n-1$
- $\mathcal{P}$ = ensemble de n points dans E
- $x_{j,i}$ = $i-$ème coordonnée du point j
- $M_{\mathcal{P}}$

Définition

On appelle *configuration de* $n-1$ *ordres*, $n-1$ ordres sur un ensemble $\mathcal{E}$ de taille n de sorte que :

$$\forall (j,k) \in \mathcal{E},\ \exists i \in \{1,\ldots,n-1\} \text{ tel que } j <_i k \text{ ou } k <_i j$$

On notera : $\mathcal{C}$ une configuration d'ordres quelconques
$\mathcal{C}_T$ une configuration d'ordres où chaque ordre est un ordre total.

Définition

On dira que $\mathcal{P}$ *respecte* $\mathcal{C}$ si
$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}, \forall j, k \in \mathcal{E}, \qquad j <_i k \Longrightarrow x_{j,i} < x_{k,i}$

Définition

On dira que $\mathcal{P}$ *respecte* $\mathcal{C}$ si
$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}, \forall j, k \in \mathcal{E}, \qquad j <_i k \Longrightarrow x_{j,i} < x_{k,i}$

Exemple : une configuration $\mathcal{C}$ de 3 ordres où les ordres sont sur $\{A, B, C, D\}$

$$A <_x B <_x C <_x D$$
$$B <_y D <_y C$$
$$B <_y A <_y C$$
$$D <_z A$$

Définition

On dira que $\mathcal{P}$ *respecte* $\mathcal{C}$ si
$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \forall j, k \in \mathcal{E}, \qquad j <_i k \Longrightarrow x_{j,i} < x_{k,i}$

Exemple : une configuration $\mathcal{C}$ de 3 ordres où les ordres sont sur $\{A, B, C, D\}$

$$A <_x B <_x C <_x D$$
$$B <_y D <_y C$$
$$B <_y A <_y C$$
$$D <_z A$$

$\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$ respecte $\mathcal{C}$:

$$x_A = 0 < x_B = 2 < x_C = 3 < x_D = 5$$
$$y_B = 2 < y_D = 3 < y_C = 5$$
$$y_B = 2 < y_A = 4 < y_C = 5$$
$$z_D = 1 < z_A = 3$$

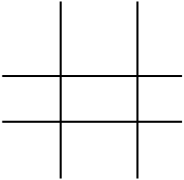
Définition

On dit que $\mathcal{C}$ est *fixe* si $\forall \mathcal{P}$ respectant $\mathcal{C}$, l'orientation du simplexe formé par $\mathcal{P}$ est la même.

Définition

On dit que $\mathcal{C}$ est *fixe* si $\forall \mathcal{P}$ respectant $\mathcal{C}$, l'orientation du simplexe formé par $\mathcal{P}$ est la même.

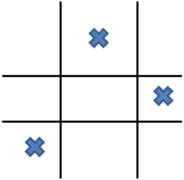
Exemple :

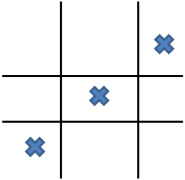


Définition

On dit que $\mathcal{C}$ est *fixe* si $\forall \mathcal{P}$ respectant $\mathcal{C}$, l'orientation du simplexe formé par $\mathcal{P}$ est la même.

Exemple :

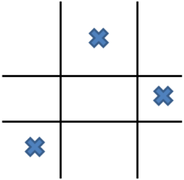




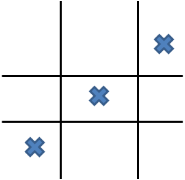
Définition

On dit que $\mathcal{C}$ est *fixe* si $\forall \mathcal{P}$ respectant $\mathcal{C}$, l'orientation du simplexe formé par $\mathcal{P}$ est la même.

Exemple :



configuration fixe



configuration non-fixe

Problématique (reformulation)

Définition

On dit que $\mathcal{C}$ est *fixe* si $\forall \mathcal{P}$ respectant $\mathcal{C}$, l'orientation du simplexe formé par $\mathcal{P}$ est la même.

Problématique (reformulation)

Définition

On dit que $\mathcal{C}$ est *fixe* si $\forall \mathcal{P}$ respectant $\mathcal{C}$, l'orientation du simplexe formé par $\mathcal{P}$ est la même.

Problématique (rappel)

Pourrait-on déterminer uniquement à partir des ordres, des tétraèdres qui ne changent pas d'orientation ?

Problématique (reformulation)

Définition

On dit que $\mathcal{C}$ est *fixe* si $\forall \mathcal{P}$ respectant $\mathcal{C}$, l'orientation du simplexe formé par $\mathcal{P}$ est la même.

Problématique (rappel)

Pourrait-on déterminer uniquement à partir des ordres, des tétraèdres qui ne changent pas d'orientation ?

Problématique (reformulation)

Déterminer la fixité des configurations

Problématique (reformulation)

Définition

On dit que $\mathcal{C}$ est *fixe* si $\forall \mathcal{P}$ respectant $\mathcal{C}$, l'orientation du simplexe formé par $\mathcal{P}$ est la même.

Problématique (rappel)

Pourrait-on déterminer uniquement à partir des ordres, des tétraèdres qui ne changent pas d'orientation ?

Problématique (reformulation)

Déterminer la fixité des configurations

Problématique (reformulation 2)

$\det(M_{\mathcal{P}})$ peut-il s'annuler ?

Plan

Extensions linéaires

Définition

Une *extension linéaire* d'une configuration de $n-1$ ordres $\mathcal{C}$ est une configuration où chaque ordre de $\mathcal{C}$ est remplacé par une de ses extensions linéaires.

Extensions linéaires

Définition

Une *extension linéaire* d'une configuration de $n-1$ ordres $\mathcal{C}$ est une configuration où chaque ordre de $\mathcal{C}$ est remplacé par une de ses extensions linéaires.

Exemple :

$$\mathcal{C}$$

$$A <_x B <_x C <_x D$$
$$B <_y D <_y C$$
$$B <_y A <_y C$$
$$D <_z A$$

une extension linéaire de $\mathcal{C}$

$$A <_x B <_x C <_x D$$
$$B <_y D <_y A <_y C$$
$$D <_z A <_z C <_z B$$

Extensions linéaires

lemme

$\mathcal{C}$ est non-fixe $\Longleftrightarrow \exists$ une extension linéaire de $\mathcal{C}$ qui soit non-fixe.

Extensions linéaires

lemme

$\mathcal{C}$ est non-fixe $\Longleftrightarrow \exists$ une extension linéaire de $\mathcal{C}$ qui soit non-fixe.

sa contraposée

$\mathcal{C}$ est fixe $\Longleftrightarrow$ toutes ses extensions linéaires sont fixes.

Extensions linéaires

lemme

$\mathcal{C}$ est non-fixe $\iff \exists$ une extension linéaire de $\mathcal{C}$ qui soit non-fixe.

sa contraposée

$\mathcal{C}$ est fixe $\iff$ toutes ses extensions linéaires sont fixes.

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c} A <_i B \\ A <_i C \end{array} & \\
A <_i B <_i C \arrow[ur] & & A <_i C <_i B \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

Extensions linéaires

lemme

$\mathcal{C}$ est non-fixe $\Longleftrightarrow$ $\exists$ une extension linéaire de $\mathcal{C}$ qui soit non-fixe.

sa contraposée

$\mathcal{C}$ est fixe $\Longleftrightarrow$ toutes ses extensions linéaires sont fixes.

$$A <_i B$$
$$A <_i C$$

$$A <_i B <_i C \qquad\qquad A <_i C <_i B$$

fixe

Extensions linéaires

lemme

$\mathcal{C}$ est non-fixe $\Longleftrightarrow$ $\exists$ une extension linéaire de $\mathcal{C}$ qui soit non-fixe.

sa contraposée

$\mathcal{C}$ est fixe $\Longleftrightarrow$ toutes ses extensions linéaires sont fixes.

$$\begin{array}{c} A <_i B \\ A <_i C \end{array}$$

$A <_i B <_i C$ — fixe

$A <_i C <_i B$ — fixe

Extensions linéaires

lemme

$\mathcal{C}$ est non-fixe $\Longleftrightarrow$ $\exists$ une extension linéaire de $\mathcal{C}$ qui soit non-fixe.

sa contraposée

$\mathcal{C}$ est fixe $\Longleftrightarrow$ toutes ses extensions linéaires sont fixes.

$$\begin{tikzcd} & \begin{array}{c} A <_i B \\ A <_i C \end{array} & \text{fixe} \\ \begin{array}{c} A <_i B <_i C \\ \text{fixe} \end{array} \arrow[ur] & & \begin{array}{c} A <_i C <_i B \\ \text{fixe} \end{array} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Extensions linéaires

lemme

$\mathcal{C}$ est non-fixe $\Longleftrightarrow$ $\exists$ une extension linéaire de $\mathcal{C}$ qui soit non-fixe.

sa contraposée

$\mathcal{C}$ est fixe $\Longleftrightarrow$ toutes ses extensions linéaires sont fixes.

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c} A <_i B \\ A <_i C \end{array} & \\
A <_i B <_i C \arrow[ur] & & A <_i C <_i B \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

Extensions linéaires

lemme

$\mathcal{C}$ est non-fixe $\iff \exists$ une extension linéaire de $\mathcal{C}$ qui soit non-fixe.

sa contraposée

$\mathcal{C}$ est fixe $\iff$ toutes ses extensions linéaires sont fixes.

$$A <_i B$$
$$A <_i C$$

$$A <_i B <_i C \qquad\qquad A <_i C <_i B$$

non-fixe

Extensions linéaires

lemme

$\mathcal{C}$ est non-fixe $\iff \exists$ une extension linéaire de $\mathcal{C}$ qui soit non-fixe.

sa contraposée

$\mathcal{C}$ est fixe $\iff$ toutes ses extensions linéaires sont fixes.

$A <_i B$
$A <_i C$

non-fixe

$A <_i B <_i C$

non-fixe

$A <_i C <_i B$

Extensions linéaires

lemme

$\mathcal{C}$ est non-fixe $\iff \exists$ une extension linéaire de $\mathcal{C}$ qui soit non-fixe.

sa contraposée

$\mathcal{C}$ est fixe $\iff$ toutes ses extensions linéaires sont fixes.

$\implies$ il nous suffit de chercher la fixité des configurations d'ordres totales

Plan

Définition

Une *matrice développable* M' est une matrice de taille $n-1 \times n-1$ dont tous les coefficients sont de la forme $(x_{i,b} - x_{i,a})$ de sorte que :

$$\det(M_{\mathcal{P}}) = (-1)^{\sigma} \det(M')$$

Définition

Une *matrice développable* M' est une matrice de taille $n-1 \times n-1$ dont tous les coefficients sont de la forme $(x_{i,b} - x_{i,a})$ de sorte que :

$$\det(M_{\mathcal{P}}) = (-1)^{\sigma} \det(M')$$

Exemple :

$$\det(M_{\mathcal{P}}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix}$$

Définition

Une *matrice développable* M' est une matrice de taille $n-1 \times n-1$ dont tous les coefficients sont de la forme $(x_{i,b} - x_{i,a})$ de sorte que :

$$\det(M_{\mathcal{P}}) = (-1)^{\sigma} \det(M')$$

Exemple :

$$\begin{aligned}
\det(M_{\mathcal{P}}) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_A & x_B - x_A & x_C - y_A \\ y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Définition

Une *matrice développable* M' est une matrice de taille $n-1 \times n-1$ dont tous les coefficients sont de la forme $(x_{i,b} - x_{i,a})$ de sorte que :

$$\det(M_{\mathcal{P}}) = (-1)^{\sigma} \det(M')$$

Exemple :

$$\begin{aligned}
\det(M_{\mathcal{P}}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_A & x_B - x_A & x_C - y_A \\ y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - y_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Définition

Un *développement algébrique* de $\det(M_{\mathcal{P}})$ est un développement de $\det(M_{\mathcal{P}})$ en un polynôme dont les variables sont du type $(x_{i,b} - x_{i,a})$

Définition

Un *développement algébrique* de $\det(M_{\mathcal{P}})$ est un développement de $\det(M_{\mathcal{P}})$ en un polynôme dont les variables sont du type $(x_{i,b} - x_{i,a})$

Exemple :

$$\det(M_{\mathcal{P}}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix}$$

Définition

Un *développement algébrique* de $\det(M_{\mathcal{P}})$ est un développement de $\det(M_{\mathcal{P}})$ en un polynôme dont les variables sont du type $(x_{i,b} - x_{i,a})$

Exemple :

$$\begin{aligned}\det(M_{\mathcal{P}}) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - y_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Définition

Un *développement algébrique* de $\det(M_{\mathcal{P}})$ est un développement de $\det(M_{\mathcal{P}})$ en un polynôme dont les variables sont du type $(x_{i,b} - x_{i,a})$

Exemple :

$$\begin{aligned} \det(M_{\mathcal{P}}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - y_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix} \\ &= (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A) \end{aligned}$$

Lemme

Si à partir des ordres de $\mathcal{C}_T$ on peut calculer le signe d'un développement algébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$, alors $\mathcal{C}_T$ est fixe.

Lemme

Si à partir des ordres de $\mathcal{C}_T$ on peut calculer le signe d'un développement algébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$, alors $\mathcal{C}_T$ est fixe.

Exemple :

$$A <_x B <_x C$$
$$B <_y A <_y C$$

Lemme

Si à partir des ordres de $\mathcal{C}_T$ on peut calculer le signe d'un développement algébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$, alors $\mathcal{C}_T$ est fixe.

Exemple :

$$A <_x B <_x C$$
$$B <_y A <_y C$$

$$\det(M_{\mathcal{P}}) = (x_{B-A})(y_{C-A}) - (y_{B-A})(x_{C-A})$$

Lemme

Si à partir des ordres de $\mathcal{C}_T$ on peut calculer le signe d'un développement algébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$, alors $\mathcal{C}_T$ est fixe.

Exemple :

$$A <_x B <_x C$$
$$B <_y A <_y C$$

$$\det(M_{\mathcal{P}}) = (x_{B-A})(y_{C-A}) - (y_{B-A})(x_{C-A})$$

$$+$$

Lemme

Si à partir des ordres de $\mathcal{C}_T$ on peut calculer le signe d'un développement algébrique de $\det(M_\mathcal{P})$, alors $\mathcal{C}_T$ est fixe.

Exemple :

$$A <_x B <_x C$$
$$B <_y A <_y C$$

$$\det(M_\mathcal{P}) = (x_{B-A})(y_{C-A}) - (y_{B-A})(x_{C-A})$$

$$+ \quad + \qquad - \quad +$$

Lemme

Si à partir des ordres de $\mathcal{C}_T$ on peut calculer le signe d'un développement algébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$, alors $\mathcal{C}_T$ est fixe.

Exemple :

$$A <_x B <_x C$$
$$B <_y A <_y C$$

$$\det(M_{\mathcal{P}}) = (x_{B-A})(y_{C-A}) - (y_{B-A})(x_{C-A})$$

$$\underset{+}{+\;+} \quad - \quad \underset{-}{-\;+} \quad = \quad +$$

Lemme

Si à partir des ordres de $\mathcal{C}_T$ on peut calculer le signe d'un développement algébrique de $\det(M_\mathcal{P})$, alors $\mathcal{C}_T$ est fixe.

Exemple :

$$A <_x B <_x C$$
$$B <_y A <_y C$$

$$\det(M_\mathcal{P}) = (x_{B-A})(y_{C-A}) - (y_{B-A})(x_{C-A})$$

$$\begin{array}{ccc} + & & + \\ & + & \end{array} - \begin{array}{ccc} - & & + \\ & - & \end{array} = +$$

$$\Longrightarrow \mathcal{C} \text{ est fixe}$$

Lemme

Si à partir des ordres de $\mathcal{C}_T$ on peut calculer le signe d'un développement algébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$, alors $\mathcal{C}_T$ est fixe.

Exemple (2):

$$A <_x B <_x C$$
$$C <_y B <_y A$$

$$\det(M_{\mathcal{P}}) = (x_{B-A})(y_{C-A}) - (y_{B-A})(x_{C-A})$$

Lemme

Si à partir des ordres de $\mathcal{C}_T$ on peut calculer le signe d'un développement algébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$, alors $\mathcal{C}_T$ est fixe.

Exemple (2):

$$A <_x B <_x C$$
$$C <_y B <_y A$$

$$\det(M_{\mathcal{P}}) = (x_{B-A})(y_{C-A}) - (y_{B-A})(x_{C-A})$$

$$+ + \quad - -$$

Lemme

Si à partir des ordres de $\mathcal{C}_T$ on peut calculer le signe d'un développement algébrique de $\det(M_\mathcal{P})$, alors $\mathcal{C}_T$ est fixe.

Exemple (2):

$$A <_x B <_x C$$
$$C <_y B <_y A$$

$$\det(M_\mathcal{P}) = (x_{B-A})(y_{C-A}) - (y_{B-A})(x_{C-A})$$

$$\underset{+}{+\,+} \quad - \quad \underset{+}{-\,-} \quad = \quad ?$$

Lemme

Si à partir des ordres de $\mathcal{C}_T$ on peut calculer le signe d'un développement algébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$, alors $\mathcal{C}_T$ est fixe.

Exemple (2):

$$A <_x B <_x C$$
$$C <_y B <_y A$$

$$\det(M_{\mathcal{P}}) = (x_{B-A})(y_{C-A}) - (y_{B-A})(x_{C-A})$$

$$\underbrace{+\;+}_{+} \quad - \quad \underbrace{-\;-}_{+} \quad = \; ?$$

on ne peut pas conclure

Lemme

Si à partir des ordres de $\mathcal{C}_T$ on peut calculer le signe d'un développement algébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$, alors $\mathcal{C}_T$ est fixe.

Exemple (2):

$$A <_x B <_x C$$
$$C <_y B <_y A$$

$$\det(M_{\mathcal{P}}) = (x_{B-A})(y_{C-A}) - (y_{B-A})(x_{C-A})$$

$$\underset{+}{+\,+} \quad - \quad \underset{+}{-\,-} \quad = \quad \mathbf{?}$$

on ne peut pas conclure *pour l'instant...*

Théorème / Conjecture

$\mathcal{C}_T$ est fixe $\Longleftrightarrow \exists$ un développement albébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$ dont le signe $\in \{+, -\}$

Théorème / Conjecture

$\mathcal{C}_T$ est fixe $\Longleftrightarrow$ $\exists$ un développement albébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$ dont le signe $\in \{+, -\}$

prouvé en dimension 2 et 3

conjecture en dimension supérieure

Théorème / Conjecture

$\mathcal{C}_T$ est fixe $\Longleftrightarrow$ $\exists$ un développement albébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$ dont le signe $\in \{+, -\}$

$\Longrightarrow$ s'il n'y a que des **?**, $\mathcal{C}_T$ est non-fixe

Théorème / Conjecture

$\mathcal{C}_T$ est fixe $\Longleftrightarrow \exists$ un développement albébrique de $\det(M_\mathcal{P})$ dont le signe $\in \{+, -\}$

$\Longrightarrow$ s'il n'y a que des **?**, $\mathcal{C}_T$ est non-fixe

$$A <_x B <_x C$$
$$C <_y B <_y A$$

Théorème / Conjecture

$\mathcal{C}_T$ est fixe $\Longleftrightarrow \exists$ un développement albébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$ dont le signe $\in \{+, -\}$

$\Longrightarrow$ s'il n'y a que des **?**, $\mathcal{C}_T$ est non-fixe

$$A <_x B <_x C$$
$$C <_y B <_y A$$

$$\begin{pmatrix} x_{A-C} & x_{B-C} \\ y_{A-C} & y_{B-C} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix} \qquad \mathbf{?}$$

Théorème / Conjecture

$\mathcal{C}_T$ est fixe $\iff \exists$ un développement albébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$ dont le signe $\in \{+, -\}$

$\implies$ s'il n'y a que des ?, $\mathcal{C}_T$ est non-fixe

$$A <_x B <_x C$$
$$C <_y B <_y A$$

$$\begin{pmatrix} x_{A-C} & x_{B-C} \\ y_{A-C} & y_{B-C} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix} \quad ?$$

$$\begin{pmatrix} x_{B-A} & x_{C-A} \\ y_{B-A} & y_{C-A} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \quad ?$$

Théorème / Conjecture

$\mathcal{C}_T$ est fixe $\Longleftrightarrow \exists$ un développement albébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$ dont le signe $\in \{+, -\}$

$\Longrightarrow$ s'il n'y a que des **?**, $\mathcal{C}_T$ est non-fixe

$$A <_x B <_x C$$
$$C <_y B <_y A$$

$$\begin{pmatrix} x_{A-C} & x_{B-C} \\ y_{A-C} & y_{B-C} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix} \qquad \textbf{?}$$

$$\begin{pmatrix} x_{B-A} & x_{C-A} \\ y_{B-A} & y_{C-A} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \qquad \textbf{?}$$

$$\begin{pmatrix} x_{B-A} & x_{B-C} \\ y_{B-A} & y_{B-C} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \qquad \textbf{?}$$

Théorème / Conjecture

$\mathcal{C}_T$ est fixe $\iff \exists$ un développement albébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$ dont le signe $\in \{+, -\}$

$\implies$ s'il n'y a que des **?**, $\mathcal{C}_T$ est non-fixe

$$A <_x B <_x C$$
$$C <_y B <_y A$$

$$\begin{pmatrix} x_{A-C} & x_{B-C} \\ y_{A-C} & y_{B-C} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix} \quad \textbf{?}$$

$$\begin{pmatrix} x_{B-A} & x_{C-A} \\ y_{B-A} & y_{C-A} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \quad \textbf{?}$$

$$\begin{pmatrix} x_{B-A} & x_{B-C} \\ y_{B-A} & y_{B-C} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \quad \textbf{?} \quad \ldots$$

en 2 dimensions

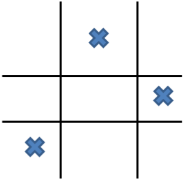
Il n'existe que 2 configurations d'ordres totaux distinctes :

$$A <_x B <_x C \qquad A <_x B <_x C$$
$$B <_y A <_y C \qquad A <_y B <_y C$$

en 2 dimensions

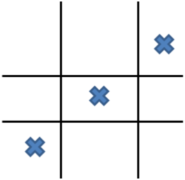
Il n'existe que 2 configurations d'ordres totaux distinctes :

$A <_x B <_x C$
$B <_y A <_y C$



configuration fixe

$A <_x B <_x C$
$A <_y B <_y C$



configuration non-fixe

Plan

passage du 2D au 3D

Obstacle pour le calcul du signe de $\det(M_{\mathcal{P}})$ **quand** $\mathcal{C}_T$ **est fixe :**

en 2D

$$A <_x B <_x C$$
$$B <_y A <_y C$$

passage du 2D au 3D

Obstacle pour le calcul du signe de $\det(M_{\mathcal{P}})$ **quand** $\mathcal{C}_T$ **est fixe :**

en 2D

$$A <_x B <_x C$$
$$B <_y A <_y C$$

$$\begin{pmatrix} x_{A-C} & x_{B-C} \\ y_{A-C} & y_{B-C} \end{pmatrix}$$

passage du 2D au 3D

Obstacle pour le calcul du signe de $\det(M_{\mathcal{P}})$ **quand** $\mathcal{C}_T$ **est fixe :**

en 2D

$$A <_x B <_x C$$
$$B <_y A <_y C$$

$$\begin{pmatrix} x_{A-C} & x_{B-C} \\ y_{A-C} & y_{B-C} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}$$

passage du 2D au 3D

Obstacle pour le calcul du signe de $\det(M_{\mathcal{P}})$ **quand** $\mathcal{C}_T$ **est fixe :**

en 2D

$$A <_x B <_x C$$
$$B <_y A <_y C$$

$$\begin{pmatrix} x_{A-C} & x_{B-C} \\ y_{A-C} & y_{B-C} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}$$

passage du 2D au 3D

Obstacle pour le calcul du signe de $\det(M_{\mathcal{P}})$ **quand** $\mathcal{C}_T$ **est fixe :**

en 2D

$$A <_x B <_x C$$
$$B <_y A <_y C$$

$$\begin{pmatrix} x_{A-C} & x_{B-C} \\ y_{A-C} & y_{B-C} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_{B-A} & x_{C-A} \\ y_{B-A} & y_{C-A} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}$$

passage du 2D au 3D

Obstacle pour le calcul du signe de $\det(M_{\mathcal{P}})$ **quand** $\mathcal{C}_T$ **est fixe :**

en 2D

$$A <_x B <_x C$$
$$B <_y A <_y C$$

$$\begin{pmatrix} x_{A-C} & x_{B-C} \\ y_{A-C} & y_{B-C} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_{B-A} & x_{C-A} \\ y_{B-A} & y_{C-A} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & + \\ - & + \end{pmatrix}$$

passage du 2D au 3D

Obstacle pour le calcul du signe de $\det(M_{\mathcal{P}})$ **quand** $\mathcal{C}_T$ **est fixe :**

en 2D

$$A <_x B <_x C$$
$$B <_y A <_y C$$

$$\begin{pmatrix} x_{A-C} & x_{B-C} \\ y_{A-C} & y_{B-C} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_{B-A} & x_{C-A} \\ y_{B-A} & y_{C-A} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & + \\ - & + \end{pmatrix}$$

passage du 2D au 3D

Obstacle pour le calcul du signe de $\det(M_{\mathcal{P}})$ **quand** $\mathcal{C}_T$ **est fixe :**

en 3D

$$B <_x D <_x C <_x A$$
$$C <_y A <_y B <_y D$$
$$A <_z B <_z D <_z C$$

passage du 2D au 3D

Obstacle pour le calcul du signe de $\det(M_{\mathcal{P}})$ **quand** $\mathcal{C}_T$ **est fixe :**

en 3D

$$B <_x D <_x C <_x A$$
$$C <_y A <_y B <_y D$$
$$A <_z B <_z D <_z C$$

$$\begin{pmatrix} x_{A-C} & x_{B-C} & x_{C-D} \\ y_{A-C} & y_{B-C} & y_{C-D} \\ z_{A-C} & z_{B-C} & z_{C-D} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_{A-D} & x_{C-A} & x_{D-B} \\ y_{A-D} & y_{C-A} & y_{D-B} \\ z_{A-D} & z_{C-A} & z_{D-B} \end{pmatrix}$$

passage du 2D au 3D

Obstacle pour le calcul du signe de $\det(M_{\mathcal{P}})$ **quand** $\mathcal{C}_T$ **est fixe :**

en 3D

$$B <_x D <_x C <_x A$$
$$C <_y A <_y B <_y D$$
$$A <_z B <_z D <_z C$$

$$\begin{pmatrix} x_{A-C} & x_{B-C} & x_{C-D} \\ y_{A-C} & y_{B-C} & y_{C-D} \\ z_{A-C} & z_{B-C} & z_{C-D} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_{A-D} & x_{C-A} & x_{D-B} \\ y_{A-D} & y_{C-A} & y_{D-B} \\ z_{A-D} & z_{C-A} & z_{D-B} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ + & + & - \\ - & - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & - & + \\ - & + & + \end{pmatrix}$$

passage du 2D au 3D

Obstacle pour le calcul du signe de $\det(M_{\mathcal{P}})$ **quand** $\mathcal{C}_T$ **est fixe :**

en 3D

$$B <_x D <_x C <_x A$$
$$C <_y A <_y B <_y D$$
$$A <_z B <_z D <_z C$$

$$\begin{pmatrix} x_{A-C} & x_{B-C} & x_{C-D} \\ y_{A-C} & y_{B-C} & y_{C-D} \\ z_{A-C} & z_{B-C} & z_{C-D} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_{A-D} & x_{C-A} & x_{D-B} \\ y_{A-D} & y_{C-A} & y_{D-B} \\ z_{A-D} & z_{C-A} & z_{D-B} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ + & + & - \\ - & - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & - & + \\ - & + & + \end{pmatrix}$$

Recherche d'un développement algébrique en 3D

1. Trouver une matrice développable M' telle que si l'on ne considère que les signes des coefficients, il n'y ait pas 2 colonnes égales ou opposées.

$$\begin{pmatrix} x_{A-D} & x_{C-A} & x_{D-B} \\ y_{A-D} & y_{C-A} & y_{D-B} \\ z_{A-D} & z_{C-A} & z_{D-B} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & - & + \\ - & + & + \end{pmatrix}$$

Recherche d'un développement algébrique en 3D

1. Trouver une matrice développable
2. Choisir 2 colonnes ayant un point en commun et développer le déterminant selon la 3ème colonne.

$$\begin{pmatrix} x_{A-D} & x_{C-A} & x_{D-B} \\ y_{A-D} & y_{C-A} & y_{D-B} \\ z_{A-D} & z_{C-A} & z_{D-B} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & - & + \\ - & + & + \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(M_{\mathcal{P}}) = \;& x_{D-B} \begin{pmatrix} y_{A-D} & y_{C-A} \\ z_{A-D} & z_{C-A} \end{pmatrix} & & + \begin{pmatrix} - & - \\ - & + \end{pmatrix} \\ & -y_{D-B} \begin{pmatrix} x_{A-D} & x_{C-A} \\ z_{A-D} & z_{C-A} \end{pmatrix} & & - \; + \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \\ & +z_{D-B} \begin{pmatrix} x_{A-D} & x_{C-A} \\ y_{A-D} & y_{C-A} \end{pmatrix} & & + \; + \begin{pmatrix} + & - \\ - & - \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Recherche d'un développement algébrique en 3D

1. Trouver une matrice développable
2. Développer le déterminant selon la 3ème colonne
3. Faire une combinaison linéaire entre les lignes de la matrice 2×2 posant problème.

$$\begin{pmatrix} x_{A-D} & x_{C-A} & x_{D-B} \\ y_{A-D} & y_{C-A} & y_{D-B} \\ z_{A-D} & z_{C-A} & z_{D-B} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & - & + \\ - & + & + \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(M_{\mathcal{P}}) = \; & x_{D-B} \begin{pmatrix} y_{A-D} & y_{C-A} \\ z_{A-D} & z_{C-A} \end{pmatrix} & & + \begin{pmatrix} - & - \\ - & + \end{pmatrix} \\ & -y_{D-B} \begin{pmatrix} x_{A-D} & \color{red}{x_{C-D}} \\ z_{A-D} & \color{red}{z_{C-D}} \end{pmatrix} & - & + \begin{pmatrix} + & \color{red}{+} \\ - & \color{red}{+} \end{pmatrix} \\ & +z_{D-B} \begin{pmatrix} x_{A-D} & x_{C-A} \\ y_{A-D} & y_{C-A} \end{pmatrix} & + & + \begin{pmatrix} + & - \\ - & - \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Prouver que $\mathcal{C}_T$ est non-fixe

Définition

Soient $\mathcal{C}$ une configuration de $n-1$ ordres sur un ensemble $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}'$ une configuration de $n-2$ ordres sur un ensemble $\mathcal{E}'$. On dira que $\mathcal{C}'$ est une *projection de* $\mathcal{C}$ *selon l'ordre* τ si

- $\mathcal{E}'$ s'obtient à partir de $\mathcal{E}$ en supprimant un élément de $\mathcal{E}$ (i.e $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$) et
- $\mathcal{C}'$ s'obtient en supprimant l'ordre $<_\tau$ de $\mathcal{C}$ et en restreignant tous les autres ordres à $\mathcal{E}'$

Prouver que $\mathcal{C}_T$ est non-fixe

Définition

Soient $\mathcal{C}$ une configuration de $n-1$ ordres sur un ensemble $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}'$ une configuration de $n-2$ ordres sur un ensemble $\mathcal{E}'$. On dira que $\mathcal{C}'$ est une *projection de $\mathcal{C}$ selon l'ordre τ* si

- $\mathcal{E}'$ s'obtient à partir de $\mathcal{E}$ en supprimant un élément de $\mathcal{E}$ (i.e $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$) et
- $\mathcal{C}'$ s'obtient en supprimant l'ordre $<_\tau$ de $\mathcal{C}$ et en restreignant tous les autres ordres à $\mathcal{E}'$

Exemple :

$\mathcal{C}$	une projection de $\mathcal{C}$ selon l'ordre $<_y$
$2 <_x 4 <_x 3 <_x 1$	$4 <_x 3 <_x 1$
$3 <_y 1 <_y 2 <_y 4$	$1 <_z 4 <_z 3$
$1 <_z 2 <_z 4 <_z 3$	

Prouver que $\mathcal{C}_T$ est non-fixe

Lemme Clé

Soit $\mathcal{C}'_T$ une projection de $\mathcal{C}_T$ selon l'ordre τ et $\mathcal{P}'$ un ensemble de points respectant $\mathcal{C}'_T$. Notons P le point de $\mathcal{P}$ qui n'est pas dans $\mathcal{P}'$. Si

- $\mathcal{C}'_T$ est non-fixe et
- τ_P est extrémal dans l'ordre τ de $\mathcal{C}_T$,

alors $\mathcal{C}_T$ est non-fixe.

Prouver que $\mathcal{C}_T$ est non-fixe

Lemme Clé

Soit $\mathcal{C}'_T$ une projection de $\mathcal{C}_T$ selon l'ordre τ et $\mathcal{P}'$ un ensemble de points respectant $\mathcal{C}'_T$. Notons P le point de $\mathcal{P}$ qui n'est pas dans $\mathcal{P}'$. Si

- $\mathcal{C}'_T$ est non-fixe et
- τ_P est extrémal dans l'ordre τ de $\mathcal{C}_T$,

alors $\mathcal{C}_T$ est non-fixe.

Exemple :

$$C <_x D <_x A <_x B$$
$$D <_y C <_y B <_y A \qquad \text{projection non-fixe}$$
$$A <_z B <_z C <_z D \qquad \text{point extrémal}$$

Plan

Théorème (caractérisation des configurations fixes)

On note $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$.

$\mathcal{C}_T$ est fixe $\iff$

1. $\exists$ triplet de $\mathcal{P}$ (noté $\{A, B, C\}$) ayant toutes ses projections fixes
2. $\exists\ X \ \in \ \{A, B, C\}$ t.q.
   - $X < D$ dans tous les ordres

     ou
   - $X > D$ dans tous les ordres

Théorème (caractérisation des configurations fixes)

On note $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$.

$\mathcal{C}_T$ est fixe $\Longleftrightarrow$

1. $\exists$ triplet de $\mathcal{P}$ (noté $\{A, B, C\}$) ayant toutes ses projections fixes
2. $\exists\ X \in \{A, B, C\}$ t.q.
   - $X < D$ dans tous les ordres

     ou
   - $X > D$ dans tous les ordres

Exemple :

$$B <_x C <_x D <_x A$$
$$C <_y A <_y B <_y D$$
$$A <_z B <_z D <_z C$$

triplet ayant toutes ses projections fixes

Théorème (caractérisation des configurations fixes)

On note $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$.

$\mathcal{C}_T$ est fixe $\iff$

1. $\exists$ triplet de $\mathcal{P}$ (noté $\{A, B, C\}$) ayant toutes ses projections fixes
2. $\exists\ X \in \{A, B, C\}$ t.q.
   - $X < D$ dans tous les ordres

     ou
   - $X > D$ dans tous les ordres

Exemple :

$$\boxed{B} <_x C <_x D <_x A$$
$$C <_y A <_y \boxed{B} <_y D$$
$$A <_z \boxed{B} <_z D <_z C$$

triplet ayant toutes ses projections fixes

$\boxed{} \longleftrightarrow X$

Théorème (en termes de développement albébrique)

On note $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$.

$\exists$ un développement albébrique de $\det(M_{\mathcal{P}})$ dont le signe $\in \{+, -\} \Longleftrightarrow$

1. $\exists$ triplet de $\mathcal{P}$ (noté $\{A, B, C\}$) ayant toutes ses projections fixes
2. $\exists\ X \in \{A, B, C\}$ t.q.
   - $X < D$ dans tous les ordres
     ou
   - $X > D$ dans tous les ordres

Preuve

1. **un triplet (noté $\{A, B, C\}$) a toutes ses projections fixes**

- si $X < D$ dans tous les ordres ou $X > D$ dans tous les ordres

Preuve

1. **un triplet (noté $\{A, B, C\}$) a toutes ses projections fixes**

- si $X < D$ dans tous les ordres ou $X > D$ dans tous les ordres

$$\begin{pmatrix} x_{B-A} & x_{C-A} & x_{D-X} \\ y_{B-A} & y_{C-A} & y_{D-X} \\ z_{B-A} & z_{C-A} & z_{D-X} \end{pmatrix}$$

Preuve

1. **un triplet (noté $\{A, B, C\}$) a toutes ses projections fixes**
   - si $X < D$ dans tous les ordres ou $X > D$ dans tous les ordres

$$\begin{pmatrix} x_{B-A} & x_{C-A} & x_{D-X} \\ y_{B-A} & y_{C-A} & y_{D-X} \\ z_{B-A} & z_{C-A} & z_{D-X} \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{\mathcal{P}}) = x_{D-X} \begin{pmatrix} y_{B-A} & y_{C-A} \\ z_{B-A} & z_{C-A} \end{pmatrix} - y_{D-X} \begin{pmatrix} x_{B-A} & x_{C-B} \\ z_{B-A} & z_{C-B} \end{pmatrix} + z_{D-X} \begin{pmatrix} x_{B-A} & x_{C-A} \\ y_{B-A} & y_{C-A} \end{pmatrix}$$

Preuve

1. **un triplet (noté $\{A, B, C\}$) a toutes ses projections fixes**

- si $X < D$ dans tous les ordres ou $X > D$ dans tous les ordres
- sinon

Preuve

1. **un triplet (noté $\{A, B, C\}$) a toutes ses projections fixes**

- si $X < D$ dans tous les ordres ou $X > D$ dans tous les ordres
- sinon

5 cas différents :

- 2 ordres suffisent pour que $\forall X$ on ait $X < D$ dans un ordre et $X > D$ dans un autre ordre

Preuve

1. **un triplet (noté $\{A, B, C\}$) a toutes ses projections fixes**

- si $X < D$ dans tous les ordres ou $X > D$ dans tous les ordres
- sinon

5 cas différents :

- 2 ordres suffisent pour que $\forall X$ on ait $X < D$ dans un ordre et $X > D$ dans un autre ordre

$$\begin{gathered} B <_x D <_x C <_x A \\ C <_y A <_y D <_y B \\ A <_z B <_z C \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} D <_x B <_x C <_x A \\ C <_y A <_y B <_y D \\ A <_z B <_z C \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} D <_x B <_x C <_x A \\ C <_y A <_y B \\ A <_z B <_z C <_z D \end{gathered}$$

Preuve

1. **un triplet (noté $\{A, B, C\}$) a toutes ses projections fixes**
   - si $X < D$ dans tous les ordres ou $X > D$ dans tous les ordres
   - sinon

5 cas différents :

- 2 ordres suffisent pour que $\forall X$ on ait $X < D$ dans un ordre et $X > D$ dans un autre ordre
- les 3 ordres sont nécessaires

$$\begin{array}{ll} D <_x B <_x C <_x A & \quad B <_x D <_x C <_x A \\ C <_y A <_y D <_y B & \quad C <_y D <_y A <_y B \\ A <_z B <_z D <_z C & \quad A <_z D <_z B <_z C \end{array}$$

Preuve

1. **un triplet (noté $\{A, B, C\}$) a toutes ses projections fixes**
   - si $X < D$ dans tous les ordres ou $X > D$ dans tous les ordres
   - sinon

5 cas différents :

- 2 ordres suffisent pour que $\forall X$ on ait $X < D$ dans un ordre et $X > D$ dans un autre ordre
- les 3 ordres sont nécessaires

Les 5 cas se prouvent à l'aide du Lemme Clé

Preuve

1. **un triplet (noté $\{A, B, C\}$) a toutes ses projections fixes**
2. **aucun triplet n'a toutes ses projections fixes**

lemme

Soit $<_i$ et $<_j$ 2 ordres de $\mathcal{C}_T$. On suppose $A <_i B <_i C <_i D$ et $A <_j B$.
$<_i = <_j \iff \exists\gamma \in \{(ABC, BCD), (ABC, ACD), (ABD, BCD)\}$ tq les 2 triplets de points de γ sont ordonnés de la même manière dans les ordres $<_i$ et $<_j$.

Preuve

1. **un triplet (noté $\{A, B, C\}$) a toutes ses projections fixes**
2. **aucun triplet n'a toutes ses projections fixes**

lemme

Soit $<_i$ et $<_j$ 2 ordres de $\mathcal{C}_T$. On suppose $A <_i B <_i C <_i D$ et $A <_j B$.
$<_i = <_j \iff \exists\gamma \in \{(ABC, BCD), (ABC, ACD), (ABD, BCD)\}$ tq les 2 triplets de points de γ sont ordonnés de la même manière dans les ordres $<_i$ et $<_j$.

Pour chaque paire d'ordres : comptons le nombre de triplets de points ordonnés de manière égale ou opposée dans les 2 ordres.

Preuve

1. **un triplet (noté $\{A, B, C\}$) a toutes ses projections fixes**
2. **aucun triplet n'a toutes ses projections fixes**

Pour chaque paire d'ordres : comptons le nombre de triplets de points ordonnés de manière égale ou opposée dans les 2 ordres.

Soit $(<_i, <_j)$ la paire pour laquelle le nombre est le plus grand

4 triplets : par le lemme précédent, $<_i = <_j \implies \mathcal{C}_T$ est non-fixe par le Lemme Clé

Preuve

1. **un triplet (noté $\{A, B, C\}$) a toutes ses projections fixes**
2. **aucun triplet n'a toutes ses projections fixes**

Pour chaque paire d'ordres : comptons le nombre de triplets de points ordonnés de manière égale ou opposée dans les 2 ordres.

Soit $(<_i,<_j)$ la paire pour laquelle le nombre est le plus grand

4 triplets : par le lemme précédent, $<_i = <_j \implies \mathcal{C}_T$ est non-fixe par le Lemme Clé

3 triplets : impossible car par le lemme précédent, 3 triplets $\implies$ $<_i = <_j$ (i.e. 4 triplets)

Preuve

1. **un triplet (noté $\{A, B, C\}$) a toutes ses projections fixes**
2. **aucun triplet n'a toutes ses projections fixes**

4 triplets, 3 triplets

2 triplets (différents de ceux du lemme)

aucun triplet n'a toutes ses projections fixes $\Longrightarrow$ tout triplet est ordonné de manière égale ou opposé dans au moins 2 ordres.

Preuve

1. **un triplet (noté $\{A, B, C\}$) a toutes ses projections fixes**
2. **aucun triplet n'a toutes ses projections fixes**

4 triplets, 3 triplets

2 triplets (différents de ceux du lemme)

aucun triplet n'a toutes ses projections fixes $\Longrightarrow$ tout triplet est ordonné de manière égale ou opposé dans au moins 2 ordres.

graphe biparti entre les triplets et les ordres

Preuve

1. **un triplet (noté $\{A, B, C\}$) a toutes ses projections fixes**
2. **aucun triplet n'a toutes ses projections fixes**

4 triplets, 3 triplets

2 triplets (différents de ceux du lemme)

aucun triplet n'a toutes ses projections fixes $\Longrightarrow$ tout triplet est ordonné de manière égale ou opposé dans au moins 2 ordres.

graphe biparti entre les triplets et les ordres

(T_1, i) et (T_1, j) indique que le triplet T_1 est ordonné de manière égale ou opposé dans $<_i$ et $<_j$

Preuve

1. **un triplet (noté $\{A, B, C\}$) a toutes ses projections fixes**
2. **aucun triplet n'a toutes ses projections fixes**

4 triplets, 3 triplets

2 triplets (différents de ceux du lemme)

aucun triplet n'a toutes ses projections fixes $\Longrightarrow$ tout triplet est ordonné de manière égale ou opposé dans au moins 2 ordres.

graphe biparti entre les triplets et les ordres

(T_1, i) et (T_1, j) indique que le triplet T_1 est ordonné de manière égale ou opposé dans $<_i$ et $<_j$

pour tout triplet, au moins 2 arêtes $\Longrightarrow$ au moins 8 arêtes

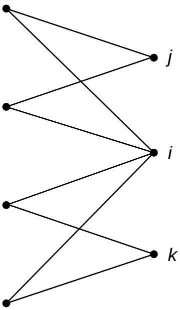
Preuve

graphe biparti entre les triplets et les ordres

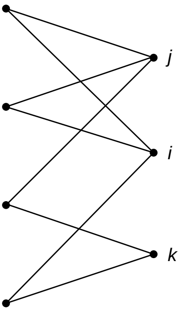
(T_1, i) et (T_1, j) indique que le triplet T_1 est ordonné de manière égale ou opposé dans $<_i$ et $<_j$

pour tout triplet, au moins 2 arêtes $\Longrightarrow$ au moins 8 arêtes

un sommet de degré 4



2 sommets de degré 3

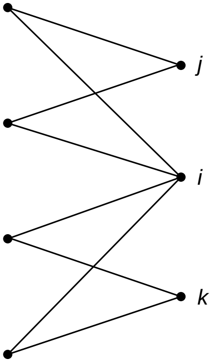


Preuve

Un sommet de degré 4

(ABC, ABD)
ou
(ACD, BCD)

(ACD, BCD)
ou
(ABC, ABD)



$A <_i B <_i C <_i D$

Preuve

Un sommet de degré 4

(ABC, ABD)

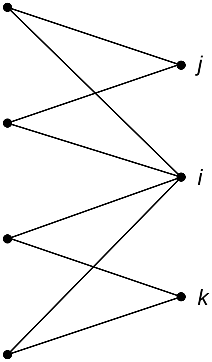
ou

(ACD, BCD)

(ACD, BCD)

ou

(ABC, ABD)



$A <_i B <_i C <_i D$

non-fixe par le Lemme Clé

Preuve

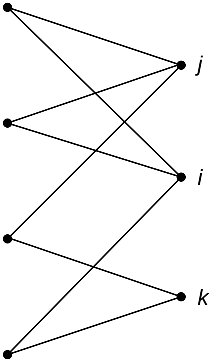
2 sommet de degré 3 (1er cas)

(ACD, BCD)

ABC

ou

ABC

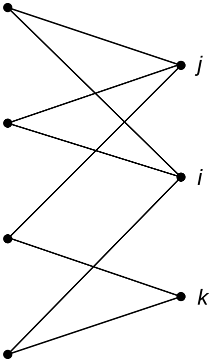


$A <_i B <_i C <_i D$

Preuve

2 sommet de degré 3 (1er cas)

(ACD, BCD)



ABC

ou

ABC

$A <_i B <_i C <_i D$

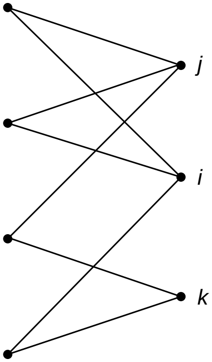
non-fixe par le Lemme Clé

Preuve

2 sommet de degré 3 (2eme cas)

(ABC, ABD)
ou
(ABD, ACD)

BCD
ou
BCD



$A <_i B <_i C <_i D$

Preuve

2 sommet de degré 3 (2eme cas)

(ABC, ABD)

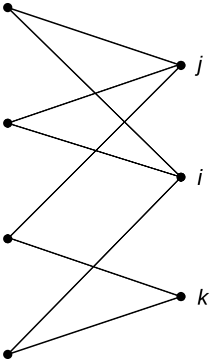
ou

(ABD, ACD)

BCD

ou

BCD

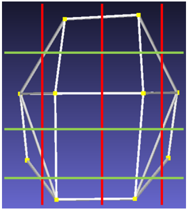


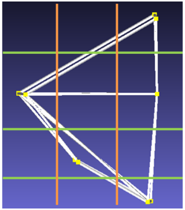
$A <_i B <_i C <_i D$

non-fixe par le Lemme Clé

Plan

Conclusion





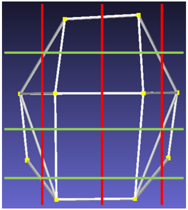
Problématique

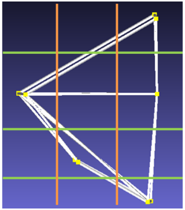
Pourrait-on déterminer uniquement à partir des ordres, des tétraèdres qui ne changent pas d'orientation ?

Résultat

Entre 2 crânes $\approx 70\%$ des tétraèdres sont orientés de la même façon.

Conclusion





Problématique

Pourrait-on déterminer uniquement à partir des ordres, des tétraèdres qui ne changent pas d'orientation ?

Résultat

Entre 2 crânes $\approx$ 70% des tétraèdres sont orientés de la même façon. A partir de ces ordres, $\approx$ 10% des tétraèdres ne changent pas d'orientation.