

### TD 3 – Sémantique de la logique des propositions

**Exercice 1** – Soit les fbf :  $A = p \wedge (\neg q \rightarrow (q \rightarrow p))$  et  $B = (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

- a) Soit I une interprétation. Déterminer (si c'est possible)  $v(A,I)$  et  $v(B,I)$  dans chacun des 4 cas suivants :
1. on sait que  $I(p) = 0$  et  $I(q) = 1$  ;
  2. on sait que  $I(p) = 1$  et  $I(q) = 0$  ;
  3. on sait que  $I(p) = 0$  ;
  4. on sait que  $I(q) = 1$  ;
  5. on ne sait rien sur  $I(p)$  et  $I(q)$ .
- b) Les fbf A et B sont-elles satisfiables ? Valides ?
- c) L'ensemble  $\{A,B\}$  est-il consistant ?

**Exercice 2** – La sémantique d'une formule est déterminée par celle des symboles propositionnels qui la composent. Combien d'interprétations différentes peut-on donner aux symboles propositionnels de chaque formule suivante. Pour chacune d'elles, donnez la valeur de vérité de la formule.

$p \vee \neg p$	$p \wedge p$
$p \wedge \neg p$	$p \vee q$
$p \vee (q \vee \neg q)$	$(p \rightarrow \neg \neg p) \wedge (\neg \neg p \rightarrow p)$
$(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$	$\neg(\neg p \vee q) \vee (r \rightarrow (p \leftrightarrow q))$

**Exercice 3** - Démontrez pour chaque couple de formules suivantes qu'elles sont « sémantiquement équivalentes » (c'est-à-dire que leur valeur de vérité est identique quelque soit l'interprétation des symboles propositionnels) :

$p$ et $\neg \neg p$	$p \vee \neg \perp$ et $\neg \perp$
$p \rightarrow q$ et $\neg p \vee q$	$\neg(p \wedge \neg q)$ et $\neg p \vee \neg q$
$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ et $p \leftrightarrow q$	$p \wedge (q \vee r)$ et $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \wedge \neg p$ et $\perp$	$p \wedge (q \vee \neg q)$ et $p$
$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee ((p \wedge s) \wedge \neg p)$ et $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s \vee r)) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$	

**Exercice 4** - Le connecteur  $\vee$  correspond au « ou inclusif ». Nous n'avons pas introduit de connecteur pour exprimer le « ou exclusif ». Donnez un connecteur vérifonctionnel pour ce connecteur. Quelles formules de la logique des propositions correspondent à ce connecteur c'est à dire ont la même sémantique que « p ou exclusif q » ? Même question avec le connecteur ternaire « si p alors q sinon r » dont la sémantique est celle de l'instruction correspondante des langages de programmations.

**Exercice 5** – Dites parmi les formules suivantes lesquelles sont équivalentes en vous aidant des formulaires de bases donnés en cours :  $(A \wedge B) \rightarrow C$ ,  $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ ,  $(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$ ,  $(A \vee B) \rightarrow C$ ,  $A \rightarrow (C \wedge D)$ ,  $A \rightarrow (C \vee D)$ ,  $(A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow D)$ ,  $(A \rightarrow C) \vee (A \rightarrow D)$

**Exercice 6** - Donnez des formules correspondant à la table de vérité suivante, en particulier les FNC et FND :

$p$	$q$	$r$	
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

**Exercice 7** – Dire si les formules suivantes sont valides, insatisfiables ou contingentes

$$((p \rightarrow q) \rightarrow p), (p \rightarrow (q \rightarrow p)), ((p \wedge q) \leftrightarrow (p \rightarrow \neg q)), (p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee s)$$

**Exercice 8** – Que pensez-vous des affirmations suivantes :

- si une formule est contingente, sa négation l'est également ;
- si G et H sont 2 formules contingentes, alors  $G \vee H$  et  $G \wedge H$  sont 2 formules contingentes ;
- si  $G \vee H$  est insatisfiable alors G et H sont 2 formules insatisfiables ;
- si  $G \vee H$  est valide alors G et H sont 2 formules valides.

**Exercice 9** – Montrez que pour toute formule H, il existe une formule H' équivalente à H et n'ayant comme connecteurs logiques que la négation et l'implication. Appliquer à la formule  $((p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s))$ .

**Exercice 10** – Soit le connecteur *nand* défini par  $p \text{ nand } q \equiv \neg(p \wedge q)$ . Montrez que toute formule est équivalente à une formule ayant *nand* comme seul connecteur. Appliquez à la formule  $p \rightarrow q$ .