Approximation Poissonienne dans certains problèmes de fiabilité

James Ledoux

INSA de Rennes & IRMAR de Rennes

Plan

1 Markovian Arrival Process (MAP)

Un *Processus Additif Markovien des arrivées* [PP95] est un Markov bi-dimensionnel $(N_t, X_t^*)_{t\geq 0}$ c.à.d.l.à.g

- Espace d'état $\mathbb{N} \times \mathcal{U}$ avec $\mathcal{U} := \{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ base canoni. $\mathbb{R}^n$
- $P\big(s,t;(m,e_i),(k,e_j)\big) := \mathbb{P}\{N_t = k, X_t^* = e_j \mid N_s = m, X_s^* = e_i\}$ vérifient

$$k \geq m, \quad P\big(s,t;(m,e_i),(k,e_j)\big) = P\big(s,t;(0,e_i),(k-m,e_j)\big). \tag{1}$$

Propriétés :

- X^* est Markov de probabilités de transition

$$P\big(s,t;(e_i,e_j)\big) = P\big(s,t;(0,e_i),(\mathbb{N},e_j)\big).$$

- N est à accroissement conditionnellement indépendants sachant $\sigma(X_s^*, s \geq 0)$

❒ Cadre homogène en temps

– **Taux de transition** $Q(\cdot,\cdot)$: $z_1, z_2 \in \mathbb{N} \times \mathcal{U}$

$$P(t, t+dt; z_1, z_2) = \begin{cases} Q(z_1, z_2)dt + o(dt) & \text{if } z_2 \neq z_1 \\ 1 + Q(z_1, z_1)dt + o(dt) & \text{if } z_2 = z_1. \end{cases}$$

À partir de la relation d'additivité (1), on aura : $k \geq m \geq 0$

$$Q\big((m, e_i), (k, e_j)\big) = \boldsymbol{Q\big((0, e_i), (k-m, e_j)\big) =: D_{k-m}(i,j)}$$

– Structure du générateur infinitésimal G :

$$G := \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 & \cdots \\ \mathbf{0} & D_0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

en utilisant l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N} \times \mathcal{U}$.

– Le processus Markovien X^* admet pour générateur $Q^* = \sum_{k=0}^{\infty} D_k$

❒ *Markovian Arrival Process* (MAP) de Neuts :

$$D_k \equiv \mathbf{0} \quad \text{pour } k > 1.$$

➥ Le processus environnement X^* a pour générateur

$$Q^* = D_0 + D_1.$$

Deux exemples

- MMPP : un Processus de Poisson homogène d'intensité modulée par un Markov homogène X de générateur Q

$$D_0 = Q - \operatorname{diag}\big(\lambda(i)\big), \quad D_1 = \operatorname{diag}\big(\lambda(i)\big), \qquad Q^* = Q.$$

- Renouvellement-PH : processus de renouvellement avec inter-arrivées de loi de type PHase (α, Q_0)

$$D_0 = Q_0 \quad D_1 = -Q_0 \mathbf{1}^\mathsf{T} \alpha \quad Q^* = Q_0 - Q_0 \mathbf{1}^\mathsf{T} \alpha.$$

- $\boldsymbol{N}$ **est un compteur d'un sous-ensemble de transitions de** $\boldsymbol{(N, X^*)}$

$$N_t \quad = \sum_{(x,y)\in\mathcal{T}} \sum_{0<s\leq t} \mathbf{1}_{\{(N,X^*)_{s-}=x,(N,X^*)_s=y\}} = \sum_{(x,y)\in\mathcal{T}} N_t(x,y)$$

where $\mathcal{T} = \left\{\left((k, e_i);(k+1, e_j)\right), \quad e_i, e_j \in \mathcal{U}, k \geq 0\right\}$.

- $(N_t(x,y) - \int_0^t \mathbf{1}_{\{(N,X^*)_{s-}=x\}} G(x,y)ds)_{t\geq 0}$ is a $\mathbb{F}^{(N,X^*)}$ martingale.

d'où $\boldsymbol{(N_t - A_t)_{t\geq 0}}$ **est une** $\mathbb{F}^{\boldsymbol{(N,X^*)}}$**-martingale**,

$$\boldsymbol{A_t = \int_0^t} {\color{blue}\boldsymbol{X_{s-} D_1 1}^{\top}} \boldsymbol{ds} = \int_0^t {\color{blue}\lambda_s} ds \qquad (2)$$

$(A_t)_{t\geq 0}$ est le $\mathbb{F}^{(N,X^*)}$-*compensateur* du processus de comptage N.
$(\lambda_t)_{t\geq 0}$ est la $\mathbb{F}^{(N,X^*)}$ *intensité stochastique* de N

- **La** $\mathbb{F}^{\boldsymbol{N}}$**-intensité de** $\boldsymbol{N}$ est donnée par

$$\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{t}} = \mathbb{E}[\lambda_t \mid \mathbb{F}^N_{t-}] \boldsymbol{= \widehat{X^*}_{t-} D_1 1}^{\top} \quad \text{avec } \boldsymbol{\widehat{X^*}_t := \mathbb{E}[X^*_t \mid \mathbb{F}^N_t]} \qquad (3)$$

2 Modèles "boîte-blanche" de fiabilité du logiciel

- un ensemble de "modules"
- un modèle d'exécution de type Markov : $X = (X_t)_t$ de générateur Q
- un modèle de défaillance : **Littlewood**
  - Arrivées Poisson durant le séjour dans un "module" i : $\lambda(i)$
  - Possibilité d'arrivée d'une défaillance durant un transfert de contrôle d'un "module" i à un autre "module" j : $\lambda(i,j)$

⇨ $N = (N_t)_t$: compteur des défaillances, X^* : contrôle avec défaillances

$$D_0(i,j) = \begin{cases} Q(i,j)(1-\lambda(i,j)) \\ -\sum_{j\neq i} Q(i,j) - \lambda(i), \end{cases} \quad D_1(i,j) = \begin{cases} Q(i,j)\lambda(i,j) & \text{if } i \neq j, \\ \lambda(i) & \text{if } i = j. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{X^* = X} \quad (Q^* = Q)$$

❒ **Feedback des défaillances sur le modèle d'exécution**

⇨ Redirection du contrôle, réparations, ...

Sous des hyps adaptées:

$\boldsymbol{X_t^*}$ **:= "module occupé à** $\boldsymbol{t}$**"** et

$\boldsymbol{N_t}$ **:= nombre de défaillances observées sur** $\boldsymbol{[0, t]}$

➥ $\boldsymbol{(N, X^*) = (X_t^*, N_t)_t}$ **est un MAP**

Q1 ? Transitoire pour $\boldsymbol{N}$

☛ Ok. Bien documenté

Q2 ? Asymptotique lorsque les défaillances deviennent rares

❒ Modèle initial + Petite perturbation ε des paramètres de défaillances

- **Littlewood (pas de feedback)**

$$\begin{cases} D_0(i,j) = Q(i,j)(1-\varepsilon\lambda(i,j)) \\ D_0(i,i) = -\sum_{j\neq i} Q(i,j) - \lambda(i)\varepsilon, \end{cases} \quad \begin{cases} D_1(i,j) = Q(i,j)\varepsilon\lambda(i,j) \\ D_1(i,i) = \lambda(i)\varepsilon. \end{cases}$$

➥ **un MAP $(\boldsymbol{N^{(\varepsilon)}}, \boldsymbol{X^{*,(\varepsilon)}})$** avec

$$D_0^{(\varepsilon)} := Q + \varepsilon B_0 \quad \boldsymbol{D_1^{(\varepsilon)} := \varepsilon B_1} \quad \text{et} \quad (B_0+B_1)\mathbf{1}^\top = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{Q^{*,(\varepsilon)} = Q}$$

- Modèle général feedback/2 classes de défaillances :

$$\begin{array}{rclcll} D_0^{(\varepsilon)} & := & Q & + & \varepsilon B_0 + \varepsilon^2 L_0 & & (B_0+B_1)\mathbf{1}^\top = \mathbf{0} \\ D_1^{(\varepsilon)} & := & & & \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 L_1 & \text{avec} & (L_0+L_1)\mathbf{1}^\top = \mathbf{0} \\ \Rightarrow Q^{*,(\varepsilon)} & = & Q & + & \varepsilon R_0 + \varepsilon^2 R_1 & & (R_0+R_1)\mathbf{1}^\top = \mathbf{0} \end{array}$$

☛ **A l'échelle t/ε,**

- $N^{(\varepsilon)}$ **converge vers un processus de Poisson**
- Convergence vers Poisson si X est un semi-Markov
- **Vitesse de convergence en ε** (distance en variation) et **l'ordre est optimal**

On considère le processus de comptage $C^{(\varepsilon)} := (C_t^{(\varepsilon)})_{t\geq 0}$

$$\boldsymbol{C_t^{(\varepsilon)} := N_{t/\varepsilon}^{(\varepsilon)} \quad t \geq 0} \tag{4}$$

Théorème 1 ([GL04]) *Avec le modèle de perturbation d'ordre* 2*, si* Q *irreductible de distribution stationnaire* π_X *et si* $P := (P_t)_t$ *est un HPP d'intensité*

$$\lambda = \pi_X B_1 \mathbf{1}^\top$$

Alors, pour tout $T > 0$*, il existe une constante* κ_T *telle que*

$$\mathbf{d_{TV}}\big(\boldsymbol{P_{C^{(\varepsilon)},T}; P_T}\big) \leq \boldsymbol{\kappa_T\,\varepsilon}.$$

❒ **La preuve pour perturbation d'ordre** 1 (feedback/1 seule classe de défaillances)

- **Inégalité de base sur $\mathbf{d_{TV}}(\boldsymbol{P_{C^{(\varepsilon)},T}; P_T})$** [Kab82, Th 2]

  Si $\widehat{A}^{(\varepsilon)}$ est le $\mathbb{F}^{C^{(\varepsilon)}}$-compensateur de $C^{(\varepsilon)}$ et A le compensateur de P (2-3)

$$\begin{aligned}
\mathbf{d_{TV}}\big(\boldsymbol{P_{C^{(\varepsilon)},T}; P_T}\big) \;&\leq\; \mathbf{2}\,\mathbb{E}\,\mathbf{Var}(\boldsymbol{\widehat{A}^{(\varepsilon)} - A})_{\boldsymbol{T}} \\
&= 2\,\varepsilon\mathbb{E}\int_0^{T/\varepsilon} \left|(\widehat{X^{*,(\varepsilon)}}_{s-} - \pi_X)B_1\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\right| ds \\
&\leq\; \kappa\;\varepsilon\;\mathbb{E}\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T/\varepsilon}} \left\|\boldsymbol{\widehat{X^{*,(\varepsilon)}}_{s-} - \pi_X}\right\|_{\mathbf{1}} \boldsymbol{ds}
\end{aligned}$$

  où $\widehat{\lambda}^{(\varepsilon)}$ est la $\mathbb{F}^{N^{(\varepsilon)}}$-intensité, et $\widehat{X^{*,(\varepsilon)}} := \mathbb{E}[X_t^{*,(\varepsilon)} \mid \mathbb{F}_t^{N^{(\varepsilon)}}]$ ⇨ **filtrage** .

- **Essentiel :**

$$\sup_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbb{E}\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T/\varepsilon}} \|\boldsymbol{\widehat{X^{*,(\varepsilon)}}_s - \pi_X(\cdot)}\|_{\mathbf{1}}\boldsymbol{ds} < \boldsymbol{\infty}$$

☛ **Équation de filtrage**

Lemme 1 $\widehat{X^{*,(\varepsilon)}}_t := E[X_t^{*,(\varepsilon)} \mid \mathbb{F}_t^{N^{(\varepsilon)}}]$ *et* α *est la distribution de* X_0.
On a $t \geq 0$,

$$\widehat{X^{*,(\varepsilon)}}_t = \alpha + \int_0^t \widehat{X^{*,(\varepsilon)}}_{s-} Q^{*,(\varepsilon)} ds + \int_0^t v_{s-}^{(\varepsilon)} (dN_s^{(\varepsilon)} - \widehat{\lambda}_s^{(\varepsilon)} ds)$$

avec

$$v_{s-}^{(\varepsilon)} := \frac{\widehat{X^{*,(\varepsilon)}}_{s-} D_1}{\widehat{\lambda}_s^{(\varepsilon)}} - \widehat{X^{*,(\varepsilon)}}_{s-} \qquad \widehat{\lambda}_s^{(\varepsilon)} = \widehat{X^{*,(\varepsilon)}}_{s-} D_1^{(\varepsilon)} \mathbf{1}^\intercal$$

☛ On obtient la répresentation de $\widehat{X^{*,(\varepsilon)}}_t$

$$\boldsymbol{\widehat{X^{*,(\varepsilon)}}_t = \alpha \exp\left(Q^{*,(\varepsilon)} t\right) + \int_0^t v_{s-}^{\varepsilon} \exp\left(Q^{*,(\varepsilon)}(t-s)\right)(dN_s^{(\varepsilon)} - \widehat{\lambda}_s^{(\varepsilon)} ds)}.$$

Comme $v_{s-}^{(\varepsilon)}\mathbf{1}^{\mathsf{T}} = 0$ et $\|v_{s-}^{(\varepsilon)}\|_1 \leq 2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\widehat{X^{*,(\varepsilon)}}_t - \pi_X\|_1 &\leq \|\alpha \exp(Q^{*,(\varepsilon)}t) - \pi_X\|_1 && (5)\\
&\quad +2\int_0^t \|\exp\big(Q^{*,(\varepsilon)}(t-s)\big) - \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\pi_X\|_1 (dN_s^{(\varepsilon)} + \widehat{\lambda}_s^{(\varepsilon)}) && (6)
\end{aligned}$$

Lemme 2 *[SZ94] Pour le générateur* $Q^{*,(\varepsilon)} = Q + \varepsilon R$ *avec* $R\mathbf{1}^{\mathsf{T}} = \mathbf{0}$, *on a*

$$\begin{aligned}
t \geq 0 \qquad \|\exp\big(Q^{*,(\varepsilon)}t\big) - \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\pi_X\|_1 &\leq K\big(\varepsilon + \exp(-\rho t)\big) && (7)\\
\|\alpha \exp(Q^{*,(\varepsilon)}t) - \pi_X\|_1 &\leq K\big(\varepsilon + \exp(-\rho t)\big) && (8)
\end{aligned}$$

avec $K, \rho > 0$ *dépendent seulement de* Q

Le premier terme (5) :

$$(8) \Longrightarrow \boldsymbol{\int_0^{T/\varepsilon} (5) dt = \int_0^{T/\varepsilon} \|\alpha \exp(Q^{*,(\varepsilon)}t) - \pi_X\|_1 dt \leq \kappa_{1,T}}.$$

Le second terme (6):

$\widehat{\lambda}_s^{(\varepsilon)}$ est la $\mathbb{F}^{N^{(\varepsilon)}}$-intensité de $N^{(\varepsilon)}$ et $v_{s-}^{(\varepsilon)}$ is $\mathbb{F}^{N^{(\varepsilon)}}$-prévisible

$$\begin{aligned}(6) \quad &= \quad 2\,\mathbb{E}\int_0^t \|\exp\left(Q^{*,(\varepsilon)}(t-s)\right) - \mathbf{1}^\top \pi_X\|_1 (dN_s^{(\varepsilon)} + \widehat{\lambda}_s^{(\varepsilon)} ds) \\ &= \quad 2\,\mathbb{E}\int_0^t \|\exp\left(Q^{*,(\varepsilon)}(t-s)\right) - \mathbf{1}^\top \pi_X\|_1 \; \widehat{\lambda}_s^{(\varepsilon)} ds\end{aligned}$$

– $\widehat{\lambda}_t^{(\varepsilon)} = \widehat{X^{(\varepsilon)}}_{t-} D_1^{(\varepsilon)} \mathbf{1}^\top \leq \kappa\,\varepsilon$ where κ ne dépend pas de ε et t.

– $\left\|\exp\left(Q^{*,(\varepsilon)}(t-s)\right) - \mathbf{1}^\top \pi_X\right\|_1 \leq K\big(\varepsilon + \exp(-(t-s)\rho)\big)$ avec (7)

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\int_0^t \left\|\exp\left(Q^{*,(\varepsilon)}(t-s)\right) - \mathbf{1}^\top \pi_X\right\|_1 \widehat{\lambda}_s^{(\varepsilon)} ds \leq \varepsilon(C_2 t\,\varepsilon + \mathcal{C}_3)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\int_0^{T/\varepsilon} (6)\; dt \leq \kappa_{2,T}}$$

3 Modèle d'exécution non-homogène

❒ **Définition d'un MAP avec des matrices $D_0(\boldsymbol{t})$ et $D_1(\boldsymbol{t})$**

Définition 1 $(N_t, X_t^*)_{t\geq 0}$ *est un NHMAP s'il existe des matrices de fonctions* $D_0(t) := (D_0(t;i,j))_{i,j=1}^n$, $D_1(t) := (D_1(t;i,j)_{i,j=1}^n$ *avec*

1. $(1-\delta_{i,j})D_0(t;i,j) \geq 0$, $D_1(t;i,j) \geq 0$ *and* $\big(D_0(t) + D_1(t)\big)\mathbf{1}^\mathsf{T} = \mathbf{0}$.
2. $\forall i,j$, *les fonctions* $t \mapsto D_0(t;i,j)$, $t \mapsto D_1(t;i,j)$ *sont localement intégrables.*
3. *Les processus suivants sont des* $\mathbb{F}^Z$*-martingales :* $k \in \mathbb{N}, e_i \in \mathcal{U}$

$$1_{\{(N,X^*)_t=(k,e_i)\}} - \int_0^t \big(1_{\{N_{s-}=k-1\}}\big(X_{s-}D_1(s)\big)(i) + 1_{\{N_{s-}=k\}}\big(X_{s-}D_0(s)\big)(i)\big)\, ds$$

3. reformulation à notre MAP des proc. suivants sont des $\mathbb{F}^{(N,X^*)}$-martingales

$$k \in \mathbb{N}, i = 1,\ldots,n : \quad 1_{\{(N,X^*)_t=(k,e_i)\}} - \int_0^t Q\big(s;(N,X^*)_{s-},(k,e_i)\big)ds$$

☛ **Les principales propriétés du cadre homogène sont ok**

⇨ Le processus environnement X^* est un NHMP de générateur

$$Q^*(t) = D_0(t) + D_1(t).$$

⇨ Le $\mathbb{F}^{(N,X^*)}$-compensateur de N est

$$A_t = \int_0^t X_{s-} D_1(s) \mathbf{1}^\top ds = \int_0^t \lambda_s ds.$$

⇨ Le $\mathbb{F}^N$-compensateur est

$$\widehat{A}_t := \int_0^t \mathbb{E}[\lambda_s \mid \mathbb{F}^N_{s-}] ds = \int_0^t \widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{s-}} \boldsymbol{D_1(s)} \mathbf{1}^\top ds = \int_0^t \widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{s}} ds.$$

avec $\widehat{X}_t := \mathbb{E}[X_t \mid \mathbb{F}^N_t]$.

❒ **Modèle de perturbation d'ordre** 1 (cf 2])

Sous l'hypothèse que $t \mapsto Q(t)$ est une fonction localement intégrable, les fonctions $D_0^{(\varepsilon)}(t)$ et $D_1^{(\varepsilon)}(t)$ associées au modèle de Littlewood satisfont Déf 1 et

$$D_0^{(\varepsilon)}(t) = Q(t) + \varepsilon B_0(t) \quad \text{and} \quad \boldsymbol{D_1^{(\varepsilon)}(t) = \varepsilon B_1(t)}$$

où $B_0(t)$ and $B_1(t)$ sont telles que

$$(B_0(t) + B_1(t))\mathbf{1}^\top = \mathbf{0}.$$

$$\looparrowright \boldsymbol{Q^{*,\varepsilon}(t)} := D_0^{(\varepsilon)}(t) + D_1^{(\varepsilon)}(t) \boldsymbol{= Q(t) + \varepsilon R(t)} \text{ avec } \boldsymbol{R(t)\mathbf{1}^\top = \mathbf{0}}.$$

Pour un Poisson modulé par un NHMP X, $(Q(t))_{t\geq 0}$ est le générateur de X.

❒ Stationarité asymptotique du processus d'environnement

(AS1) X est un NHMP de générateurs $(Q(t))_t$ tel que

$$\sup_t \|Q(t)\|_1 < \infty.$$

(AS2) $\exists$ générateur irreductible Q de loi stationnaire π_X, un réel $\boldsymbol{\alpha > 1}$ tel que

$$\boldsymbol{\lim_{t \to +\infty} (2t)^{\alpha} \|Q(t) - Q\|_1 = 0} \tag{9}$$

Sous (AS1) les matrices $D_0^{(\varepsilon)}(t), D_1(t)$ satisfont la Déf 1 et

$$k = 0, 1 : \ \sup_t \|B_k(t)\|_1 < \infty \qquad \sup_t \|R(t)\|_1 < \infty$$

Sous (AS2)

- ➥ $B_k := lim_{t \to +\infty} B_k(t)$ et $\int_0^{+\infty} \|B_1(t) - B_1\|_1 dt < \infty$
- ➥ $Q^{*,(\varepsilon)}(t)$ converge vers une limite lorsque $t \to +\infty$

Sous **(AS1-2)**

➥ **Forte ergodicité uniforme de $\boldsymbol{X}$** [JI88]

$$(9) \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} t^{\alpha} \sup_{s\geq 0} \|P(s,s+t) - \pi \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\|_1 = 0$$

Si $\alpha > 1$ alors

$$\boldsymbol{\int_0^{+\infty} \sup_{s\geq 0} \|P(s,s+t) - \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\pi_X\|_1 dt \leq C < \infty}$$

⇨ Permet le contrôle d'expressions (cf Lemme 2)

$$\begin{aligned} \|P^{(\varepsilon)}(t,s) - \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\pi\|_1 &\leq \kappa\varepsilon \int_s^t \|P(t,r) - \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\pi\|_1 dr + \|P(t,s) - \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\pi\|_1 \\ \|P^{(\varepsilon)}(t,0)\alpha - \pi\|_1 &\leq \kappa\varepsilon \int_s^t \|P(t,r) - \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\pi\|_1 dr + \|P(t,s) - \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\pi\|_1 \end{aligned}$$

où $P^{(\varepsilon)}(s,t)$ est le noyau de transition associé à $Q^{*,(\varepsilon)}$,
et κ est indépendant de ε et t, s.

❒ Le résultat

Considérons $C^{(\varepsilon)} := (C_t^{(\varepsilon)})_{t\geq 0}$ défini par

$$\boldsymbol{C_t^{(\varepsilon)} := N_{t/\varepsilon}^{(\varepsilon)}} \quad t \geq 0$$

où $N^{(\varepsilon)}$ le p.p. associé au MAP défini par $D_0^{(\varepsilon)}(\cdot), D_1^{(\varepsilon)}(\cdot)$ sous **(AS1)**.

Théorème 2 *Supposons* **(AS1-2)**.
Soit $P := (P_t)_t$ *un HPP* $\Pi(\pi_X B_1 \mathbf{1}^\mathsf{T})$.
Pour tout $T > 0$, *il existe une constante* κ_T *such that*

$$\mathrm{d}_{\mathrm{TV}}\big(P_{C^{(\varepsilon)},T}; P_T\big) \leq \kappa_T\, \varepsilon.$$

Résultat encore valide pour un modèle avec feedback

4 G-marquage réel

Cas d'un *G-marquage réel* du p.p. $(T_k)_k$ associé au (NH)MAP

Définition 2 ([LB95]) *Soit $G(s,dx)$ un noyau stochastique de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$. Le p.p.m. $(T_k, Z_k)_{k\geq 1}$ ou la m.a. μ définie par*

$$\mu(\omega; dt, dx) = \sum_{k\geq 1} 1_{\{T_k(\omega)<\infty\}} \delta_{T_k(\omega), Z_k(\omega)}(dt, dx).$$

est un G-marquage de $(T_k)_k$ si $Z_1, Z_2, \ldots$ sont conditionnellement indépendantes sachant $(T_k)_k$ et

$$\mathbb{P}\{Z_k \in dx \mid \sigma(T_m, m \geq 0)\} = G(T_k, dx) \quad \mathbb{P} - ps \ sur \ \{T_k < +\infty\}.$$

Si $G(t,dx) = G(dx)$, G est dit un marquage indépendant de $(T_k)_k$.

❒ μ (ou $(T_k, Z_k)_{k\geq 1}$) $\to$ $\mathbb{F}^\mu$-*compensateur* ν (m.a. sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$)

Comme $N_t(\omega) = \mu(\omega; [0,t] \times \mathbb{R}) < +\infty$, on a $\nu(\omega; [0,t] \times \mathbb{R}) < +\infty$ et

⇨ $\mathrm{Var}(\nu - \widetilde{\nu})_T$ est la *variation totale* de la mesure $\nu - \widetilde{\nu}$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}$

❒ **G-marquage μ** caractérisé par la forme spécifique de ν [LB95] :

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nu(dt, dx) = G(t, dx) A(dt)}$$

où **A est le $\mathbb{F}^N$-compensateur du p.p. $(T_k)_k$**

☛ Si $G(s, dx)$ est a.c. wrt la mesure de Lebesgue et si $\widetilde{\mu}$ est le G-marquage d'un HPP $\Pi(\lambda)$, alors on a

$$\mathbb{E}\,\mathbf{Var}(\boldsymbol{\nu} - \widetilde{\boldsymbol{\nu}})_{\boldsymbol{T}} \leq \mathbb{E}\,\mathbf{Var}(\boldsymbol{A} - \widetilde{\boldsymbol{A}})_{\boldsymbol{T}}, \quad \boldsymbol{T} > \mathbf{0} \tag{10}$$

où A est le $\mathbb{F}^N$-compensateur du MAP (voir (2)) et $\widetilde{A} := (\lambda t)_t$

Alors, [KL83, Th 2] + (10), donne

Lemme 3 *Si* $P_{\mu,T}$ *est la loi du* G*-marquage* μ *d'un MAP*

$P_{\widetilde{\mu},T}$ *est la loi du* G*-marquage* $\widetilde{\mu}$ *d'un HPP*

dans l'espace de toutes les mesures de comptage sur $[0,T] \times \mathbb{R}$*, alors*

$$\mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(P_{\mu,T}; P_{\widetilde{\mu},T}) \leq 2\ \mathbb{E}\ \mathrm{Var}(A - \widetilde{A})_T.$$

☛ $\mu^{(\varepsilon)}$: un G-marquage of $C^{(\varepsilon)}$ (see (4)) avec $G(s, dx)$ indépendant de ε.

$\widetilde{\mu}$: le G-marquage du Poisson homogène $\Pi(\mathbf{1}^\top B_1 \pi)$

Théorème 2 + Lemme 3

➥ $\forall T > 0$, il existe une constante κ_T telle que

$$\mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_{\mu^{(\varepsilon)},T}; \mathbb{P}_{\widetilde{\mu},T}) \leq \kappa_T \varepsilon.$$

➥ Approximation par un Poisson Composé dans le cas de G-marquage indépendant

References

[GL04] Gravereaux, J.-B. and Ledoux, J. Poisson approximation for some point processes in reliability. *Adv. in Applied Probab.*, 36:455–470, 2004.

[JI88] Johnson, J. and Isaacson, D. Conditions for strong ergodicity using intensity matrices. *J. Appl. Probab.*, 25:34–42, 1988.

[Kab82] Kabanov, Y.M. On the rate of convergence of distributions of counting processes to the distribution of a counting process with independent increments. *Soviet Math. Dokl.*, 25:794–795, 1982.

[KL83] Kabanov, Yu.M. and Liptser, R.Sh. On convergence in variation of the distributions of multivariate point processes. *Z. Whars. verw. Gebite*, 63:475–485, 1983.

[LB95] Last, G. and Brandt, A. *Marked Point Processes on the Real Line.* Springer, 1995.

[PP95] Pacheco, A. and Prabhu, N.U. Markov-additive processes of arrivals. In J.H. Dshalalow, editor, *Advances in Queueing Theory, Methods, and Open Problems*, pages 167–194. CRC Press, 1995.

[SZ94] Sethi S.P. and Zhang Q. *Hierarchical Decision Making in Stochastic Manufacturing Systems*. Birkhäuser, Boston, 1994.