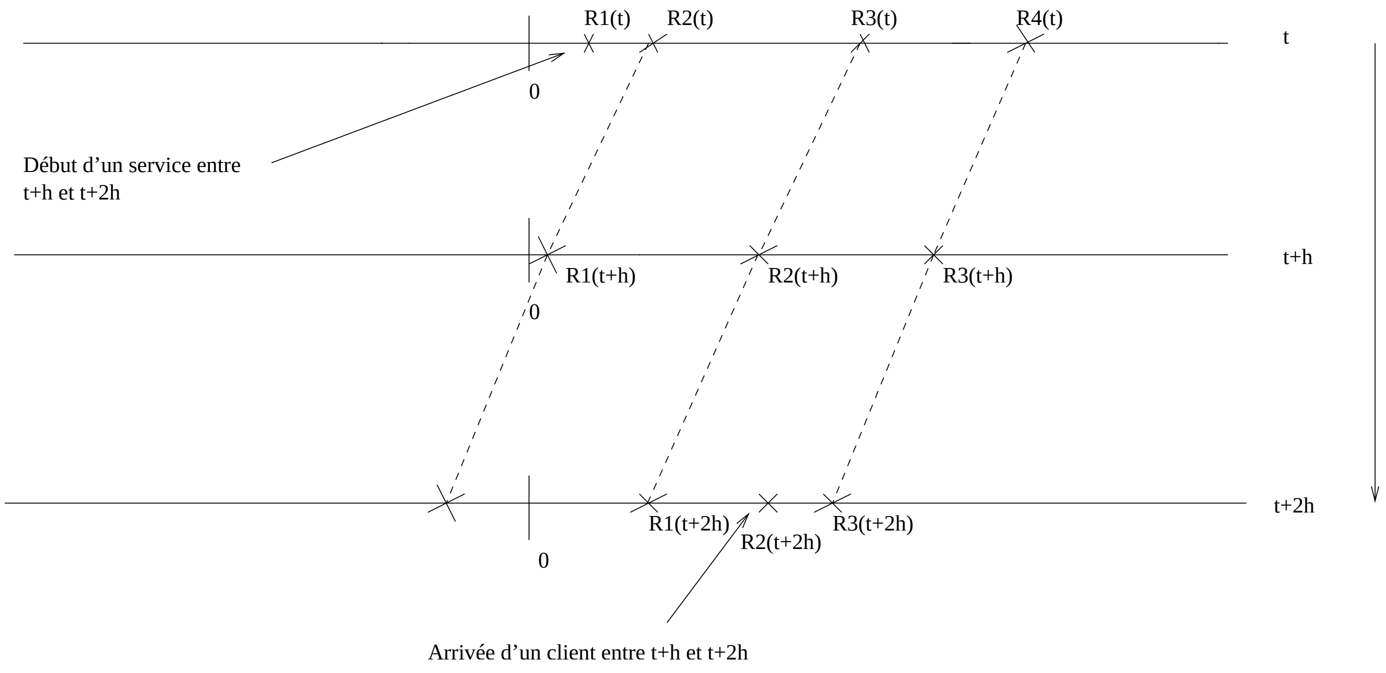
Files d'attente temps-réel

L. Decreusefond et P. Moyal

Modèle



R1(t)
R2(t)
R3(t)
R4(t)
t
0
Début d'un service entre
t+h et t+2h
t+h
R1(t+h)
R2(t+h)
R3(t+h)
0
t+2h
R1(t+2h)
R3(t+2h)
R2(t+2h)
0
Arrivée d'un client entre t+h et t+2h

Optimalité

- À scénario donné, si une discipline peut traiter les clients sans perte alors EDF le peut aussi.
- Si les temps de service sont exponentiels, [Towsley et al.] ont montré que EDF est la politique avec probabilité de perte minimale.

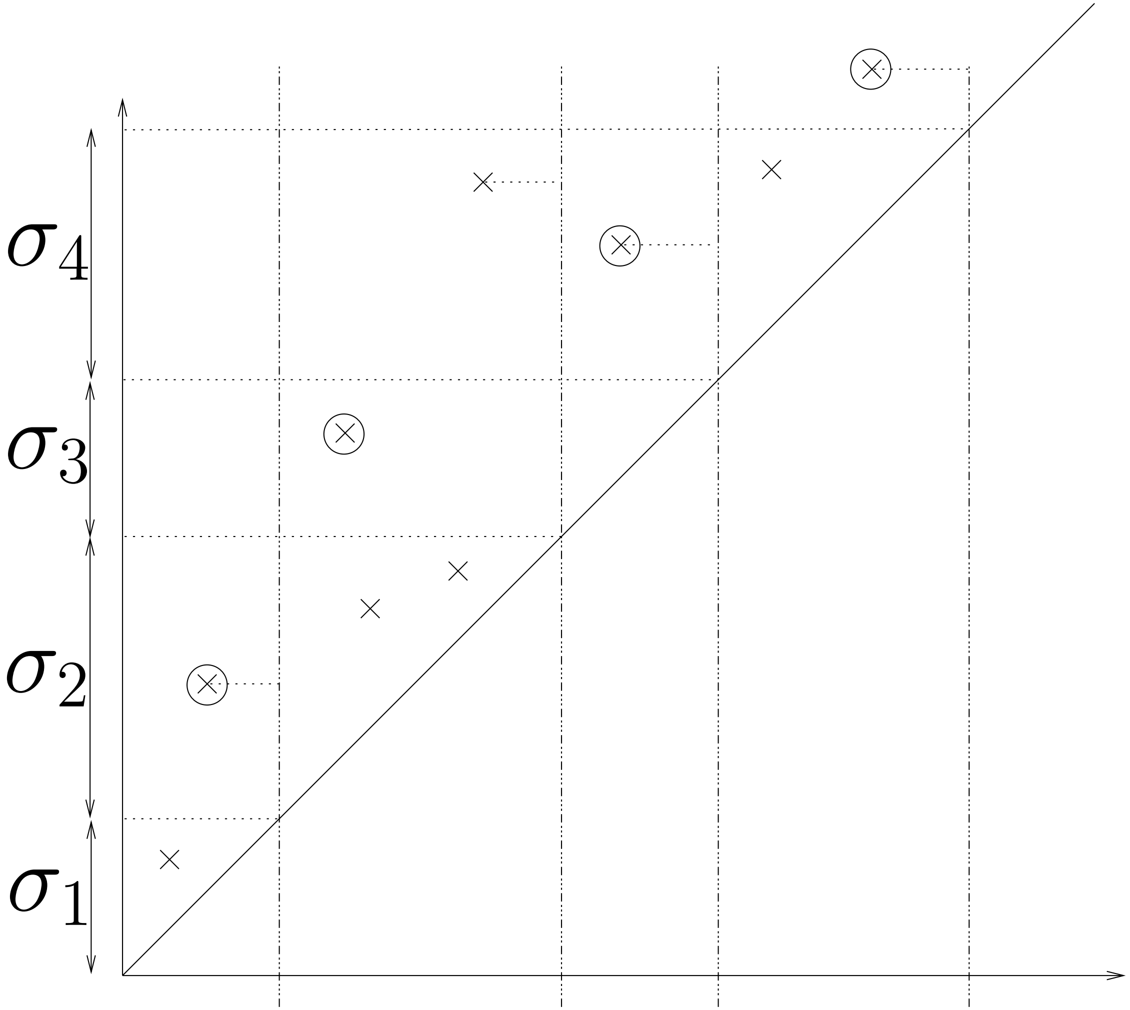
Stabilité de M/G/1+G - EDF

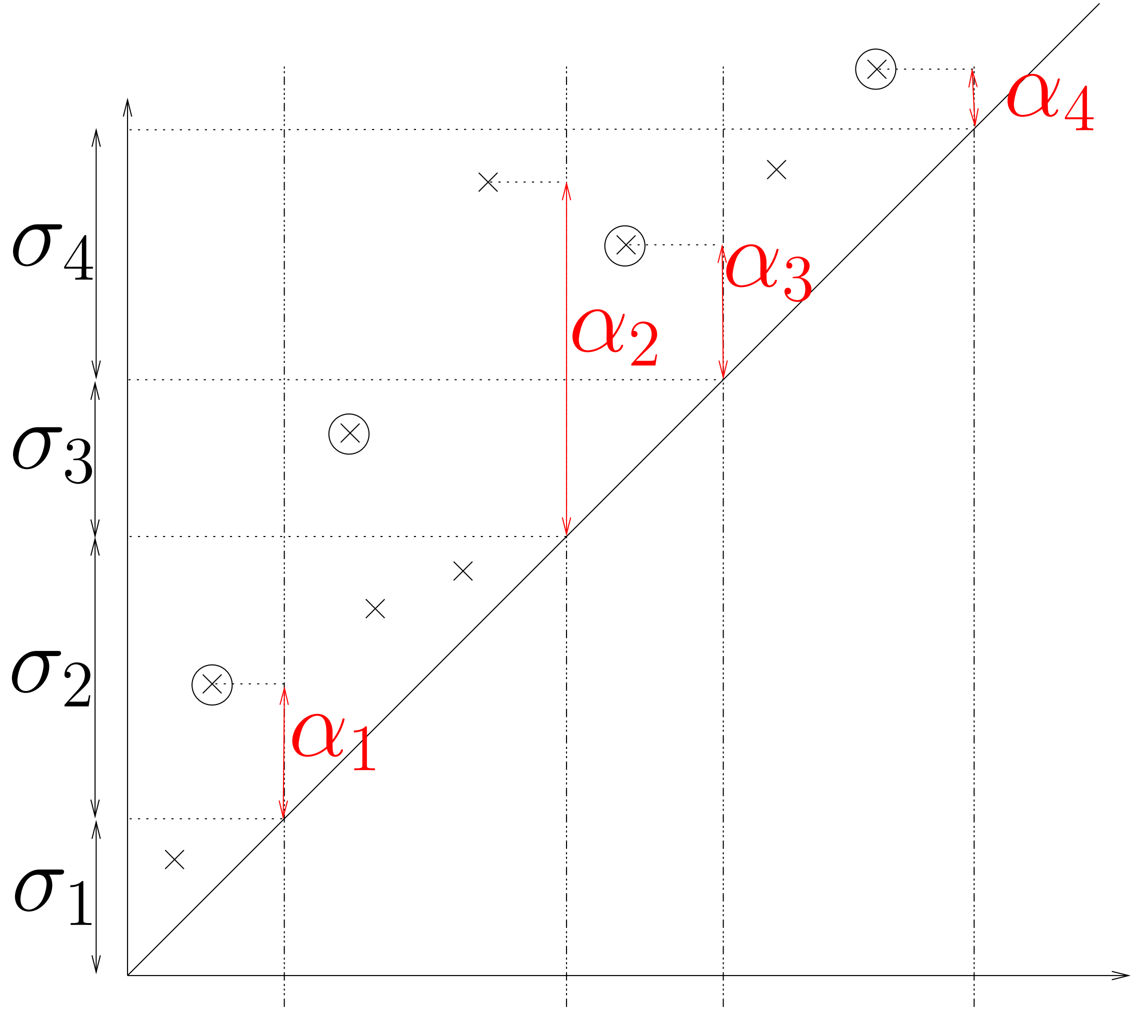
Le nombre de clients repasse une infinité de fois par 0 quelle que soit la charge :

un client passe moins de temps dans le système que dans la file M/G/∞ avec

$$\text{temps de traitement } = \sigma + D.$$

Un diagramme bien utile





σ_4
σ_3
σ_2
σ_1
α_1
α_2
α_3
α_4

Plus grand délai résiduel

α_n = plus grand délai résiduel des clients qui arrivent pendant le n-ième service et qui sont encore « en vie » à la fin de celui-ci.

$$Z_{n+1} \leq \left[\max(Z_n.\mathbf{1}_{\{X_{\tilde{T}_n} \neq 1\}}, \alpha_{n+1}) - \sigma_n \right].$$

Les deux termes sont égaux pour EDF.

Suite majorante

$$Y_0 = Z_0 \quad Y_{n+1} = [\max(Y_n, \alpha_n) - \sigma_n]^+$$

$$Y_n \geq Z_n$$

$$Y_n = \left[\max_{j=0}^{n-1} (\alpha_j - \sum_{i=j}^{n-1} \sigma_j) \right]^+$$

Stabilité

Partant de 0, Y_n converge en loi vers une v.a. finie p.s. Y et

$$\mathbf{P}_N^0(Y = 0) > 0$$

pour tout processus stationnaire tel que $-E_N^0[\sigma] < 0$.

Optimalité

$$\pi_{\textsf{EDF}} \leq \pi_\gamma \leq \pi_{\textsf{EDF}} + \frac{1}{\rho}(1 - \frac{1}{E[S_\gamma]})$$

où

S_γ = nombre de clients servis dans une BP de la politique γ.

Limite fluide

$$\nu_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_{R_i(t)}$$

- Inter-arrivées : Poisson (λ)
- Temps de service : Exponentielles (μ)
- Crédit-temps : GI, v.a. générique D

Dynamique

$$\begin{aligned}\langle \nu_t, \phi \rangle - \langle \nu_0, \phi \rangle &= \int_0^t \langle \nu_s, \phi' \rangle ds \\ &\quad + \mu \int_0^t \phi(R_{\nu_s}) \mathbf{1}_{\{\nu_s(^+) \neq 0\}}\, ds - \lambda t \mathbb{E}\left[\phi(D)\right] \\ &\qquad + \text{ Martingale.}\end{aligned}$$

Renormalisation

$$\bar{\nu}_t(B) := \frac{1}{\beta}\nu_{\alpha t}(\gamma B),$$

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nu}_t, \phi \rangle - \langle \bar{\nu}_0, \phi \rangle &= \frac{\alpha}{\gamma}\int_0^t \langle \bar{\nu}_s, \phi' \rangle ds \\ &+ \frac{\mu\alpha}{\beta}\int_0^t \phi(R_{\bar{\nu}_s})\mathbf{1}_{\{\bar{\nu}_s(^+)\neq 0\}}\, ds - \frac{\lambda\alpha}{\beta} t\mathbb{E}\left[\phi(\frac{D}{\gamma})\right] \\ &+ \text{ Martingale}\end{aligned}$$

Cas sur-critique

- $\lambda_n \to \lambda$, $\mu_n \to \mu$, $\rho = \lambda/\mu > 1.$
- $D_n/n \overset{\text{loi}}{\to} \bar{D}$
- $n\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\langle \bar{\nu}_0 - \xi, f\rangle^2\right] \to 0$
- où $\xi(]1/\mu, \infty[> 0.$

$$\langle \bar{\nu}_t, f\rangle = \langle \xi, f\rangle - \mu \int_0^t f(-s)\, ds + \lambda \int_0^t \mathbb{E}\left[\tau_s f(\bar{D})\right]\, ds$$

où $\tau_s f(x) = f(x-s)$.

Cas critique

- $\lambda_n/\mu_n \to 1$, $\sqrt{n}(\lambda_n - \mu_n) \to K$
- $D_n/n^{3/2} \to 0$
- Condition initiale comme précédemment

$$\langle \bar{\nu}_t, f \rangle = \langle \xi, \tau_t \phi \rangle + K \int_0^t f(-s)\, ds$$

Difficulté

- Pas de Lemme de Gronwall
- MAIS
- Equation de transport

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -b\partial_x u + f \text{ dans } \mathbf{R}\times]0,\infty[\\ u &= h \text{ sur } \mathbf{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

a une solution explicite

$$u(x,t) = h(x - tb) + \int_0^t f(x + (s-t)b, s)\, ds.$$

TLC - Cas surcritique

$$\sqrt{n}\langle \bar{\nu}_t^n - \bar{\nu}_t, f\rangle \to Y_t(f)$$

avec

$$Y_t(f) = 2\sqrt{\lambda+\mu}\, f(0) W_t - \sqrt{\lambda+\mu}\int_0^t f(s-t)\, dW_s.$$

TLC - Cas critique

$$n^{1/4}\langle \bar{\nu}_t^n - \bar{\nu}_t, f\rangle \to Y_t(f)$$

avec

$$Y_t(f) = 2\sqrt{\lambda+\mu}\, f(0)W_t - \sqrt{\lambda+\mu}\int_0^t f(s-t)\, dW_s.$$

Applications

Cas surcritique

$$\sqrt{n}(P_n(t) - (\lambda - \mu)t) \Longrightarrow \sqrt{\lambda + \mu}\, W_t$$

Cas critique

$$n^{1/4}(P_n(t) - Kt) \Longrightarrow \sqrt{\lambda + \mu}\, W_t$$

Crochet

$$[\bar{M}_\phi(.)]_t = \frac{\mu\alpha}{\beta^2}\int_0^t \phi^2(R_{\bar{\nu}_s})\mathbf{1}_{\{\bar{\nu}_s(^{+*})\neq 0\}}\, ds + \frac{\lambda\alpha}{\beta^2} t\mathbb{E}\left[\phi^2(\frac{D}{\gamma})\right].$$