Рецензия на учебник *Теория вероятностей и статистика*

(Ю.Н.Тюрин, А.А.Макаров, И.Р.Высоцкий, И.В.Ященко)

Москва: МЦНМО, АО «Московские учебники», 2004
256 с. Тираж 140000 экз.

Александр Шень, `shen@mccme.ru`

Предуведомление

Сразу же скажу, что по отношению к этой книге у меня имеется предубеждение. На мой взгляд, ситуация, в которой один и тот же человек (И.В.Ященко) является автором учебника, директором издательства, где этот учебник издаётся, а также официальным лицом в системе образования Москвы (зав. кафедрой математики Московского института открытого образования) представляет собой очевидный конфликт интересов. Более того, когда абсолютно не опробованный учебник по ранее не изучавшемуся разделу программы (теория вероятностей) издаётся в издательстве «Московские учебники» тиражом 140000 (весьма значительным, если учесть, что в Москве примерно полторы тысячи школ), этот конфликт интересов превращается, мягко говоря, в злоупотребление служебным положением. Такого рода новации особенно неуместны в ситуации, когда часы на математику в школе в целом пытаются (и не без успеха) сократить, а уроки заменить тест-дрессировкой.

Но книга плоха и сама по себе, независимо от обстоятельств её появления.

Часто, чтобы обосновать подобный отрицательный отзыв, рецензенты приводят примеры разнообразных нелепостей в разбираемой книге. Таких ляпсусов более чем достаточно и в этой книге — авторы охотно «подставляются».

Мелкие, но забавные ляпы

На с. 9 авторы делят киловатты на часы, говоря об единицах измерения произведённой электроэнергии. [Надо умножать.] На с. 226 они включают Литву в СНГ в 1995 г. (видимо, в порядке головотяпства, а не реваншизма). На с. 26 под заголовком «Историческая справка» сообщается, что «на протяжении нескольких веков, до самого последнего времени, для печати книг, журналов и газет использовались типографские кассы с набором букв». [На самом деле строкоотливная машина — линотип — изобретена в 1880-х годах. Для сложных текстов ручной набор сохранялся и позже, но в ограниченных размерах: «конечно, уже в очень немногих типографиях текст набирают вручную и в ближайшем будущем таких типографий не останется совсем» (книга М.В.Шульмейстера *Ручной набор*, 1967 г.)] На с. 71 авторы пишут, что «один дюйм — это примерно 2,54 см», хотя слово *примерно* тут ни к чему, с 1958 года по международному соглашению дюйм определяется в точности как 2,54 см. В иллюстрации с автомобильным номером (с. 144) в нём фигурирует строчная буква «р» (чего на самом деле не бывает). И так далее.

Достаточно в книге и ошибок с опечатками. Например, на с. 69 (рисунок) показано отрицательное число девушек на гистограмме. С числами и падежами тоже не всё в порядке: «перегорит ровно две лампочки» (с. 115), «сколько раз следует ожидать выпадение шестёрки» (с. 87). Стилистические ошибки: «точность роста при пошиве готовой одежды составляет обычно 6 см» (с. 72), «мы можем обсуждать шансы различных команд, говорить об их вероятностях на победу» (с. 74), «игральная кость служит прекрасным средством для получения случайных событий» (с. 80).

Но это всё, в общем-то, мелочи, которые можно списать на недобросовестное отношение авторов к чтению корректур (что, конечно, не делает им чести) и которые можно исправить при (не дай Бог!) переиздании.

Ошибки по части теории вероятностей

Хуже другие места, которые ставят под сомнение грамотность авторов в области теории вероятностей.

Задача 5 на с. 229:

> В таблице представлены среднемесячные температуры за 6 последних месяцев года в Тридесятом королевстве. [Таблица из шести чисел.] Вычислите дисперсию температуры за эти полгода. Результат округлите до сотых.

Видимо, авторы не понимают, что дисперсия, вычисленная по таблице среднемесячных температур — почти столь же нелепая вещь, как упоминаемая ими «средняя температура по больнице». Округление её до сотых долей (квадратного градуса) ещё усиливает бессмыслицу.

Упражнения на с. 9: приведя таблицу производства зерна и пшеницы в России по годам за 1996 – 2002 годы, авторы просят найти долю пшеницы в урожае за каждый год (упр. 9), а затем в упражнении 14 спрашивают: «Какой на протяжении 1996 – 2002 гг. была средняя доля пшеницы?» При этом, судя по отсутствию каких-либо комментариев, авторы предполагают, что нужно вычислить среднее арифметическое долей за каждый год, которое вряд ли имеет смысл (уж если что делить, так общее производство пшеницы за эти годы на общее производство зерна).

Объяснение про выборки при социологических исследованиях (с. 207)

> Хорошо бы опросить всех избирателей и узнать, сколько из них поддерживает кандидата К. Но, к сожалению, до выборов это невозможно. Кроме того, люди не обязаны отвечать на вопросы о своих политических симпатиях. Вместо того, чтобы опрашивать всех, опрашивают небольшую группу избирателей. Эта группа называется выборкой.

То, что люди не обязаны отвечать на вопросы о своих симпатиях, никак не зависит от того, опрашиваем ли мы всех или выборочно. При чём тут это?! Далее в том же разделе:

> Результат опроса каждого человека в [случайной] выборке назовём успехом, если он высказался в пользу кандидата К. [. . .] Вероятность успеха, как мы предположили выше, равна p [доля избирателей, готовых поддержать К]. Безусловно, в процессе опроса вероятность несколько меняется, поскольку часть людей из выборки уже опрошена.

Разумеется, вероятность успеха не зависит от порядкового номера опрашиваемого в выборке и для всех равна p. Видимо, авторы хотели сказать, что испытания зависимы и условная вероятность при известном результате опроса первого отличается от p, но не смогли сделать этого грамотно.

Кроме того, если уж взят такой пример из жизни, то нельзя не отметить (а этого авторы не делают), что ответы на вопросы и голосование на выборах, даже близких по времени, — ситуации психологически совсем разные, и потому результаты опроса могут значительно отличаться от результатов (даже и честно подсчитанных) выборов.

В общем, время от времени авторы что-нибудь такое ляпнут, что начинаешь сомневаться, кто же это писал и что же он при этом думал.

> Правильные (симметричные) кости обеспечивают одинаковые шансы выпадения каждой грани. [...] Отверстия, маркирующие очки на гранях, должны быть просверлены на одинаковую глубину. Сумма очков на противоположных гранях правильной кости равна 7.

Действительно, такова традиция изготовления игральных костей, не имеющая отношения к равновероятности граней. Авторы, однако, полагают иначе:

> Если сумма очков на противоположных гранях не равна 7, то искусный мошенник, определённым образом бросая кости, может добиться, что сумма выброшенных им очков будет больше, чем у неискушённого игрока. (с. 83)

При чём тут это? Если мошенник может сделать шансы сторон кости неравными, то как ему помешает то, что сумма цифр равна 7?!

Стремясь к «оживляжу», авторы часто формулируют вопросы в якобы практическом стиле:

> Канцелярскую кнопку бросают на стол 300 раз. Известно, что математическое ожидание случайной величины «число выпадений остриём вверх» равно 135. Найдите вероятность события «кнопка упала остриём вверх» [упр. 5 на с. 201]

Но практичность тут чисто мнимая — откуда на практике могут появиться сведения о математическом ожидании?!

Когда в учебнике арифметики встречаются задачи о землекопах и бассейнах, то всем понятно, что это условности. Но авторы учебника по теории вероятностей обязаны подавать пример разумной жизненной постановки вопросов. А не спрашивать, как в упр. 15 на с. 9, «в какие годы в России произведено одинаковое количество электроэнергии?» (безо всяких комментариев о том, что различие между годами 2001 и 2002, где в таблице указано по 891 млрд. квт-ч, может быть больше, чем между годами 1996 и 1999, где указано 847 и 846 квт-ч.).

Грамотный человек не стал бы также приплетать теорию вероятностей там, где она к делу не относится. Не таковы авторы, которые на с. 172 пишут:

> **Пример 2**. На фабрике игрушек производят электрические гирлянды. В готовую гирлянду рабочий последовательно вставляет 50 лампочек двух цветов — красные и синие, наудачу вынимая их из ящика, где очень много разных лампочек. Сколько он может сделать различных гирлянд, в которых 20 красных лампочек?

Вообще-то следовало ещё указать, ориентированы ли гирлянды, то есть различаем ли бы последовательность цветов и её обращение. Вместо этого авторы пишут:

> Лампочек в ящике очень много. Поэтому можно считать, что вероятность выбрать синюю или красную лампочку остаётся неизменной независимо от того, сколько лампочек уже выбрано.

Ясно, что вероятности тут совершенно к делу не относятся. А вот абсурдные разговоры про повторные измерения (с. 211):

> Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — результаты нескольких измерений величины a с помощью этого прибора. [...] Можно считать, что числа $x_1, \ldots, x_n$ — различные значения одной случайной величины X, а можно рассуждать иначе и считать, что x_1 — значение случайной величины X_1, x_2 — значение случайной величины X_2 и т.д., при этом все эти величины, по сути, совпадают с величиной X, и потому имеют одно и то же неизвестное нам распределение.

Можно понять, почему авторы не решаются сказать «мы предполагаем, что результаты последовательных измерений являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами» (что используется дальше при вычислении дисперсии) — это действительно довольно сложно. Но это не значит, что вместо этого позволительно бормотать всякую ерунду о «совпадающих по сути» (хотя и независимых) величинах.

Но и это не главное

Как писал Пушкин,

> не в том беда, Авдей Флюгарин,
> что родом ты не русский барин,
> что на Парнасе ты цыган,
> что в свете ты Видок Фиглярин —
> беда, что скучен твой роман.

В конце концов, неудачные места из книги можно удалить или поправить. И даже если в хороший учебник вписать несколько нелепостей, большого вреда не будет. Основной недостаток рецензируемой книги всё-таки другой. Говоря кратко, объяснения в ней по большей части бесформенны и занудны, а задачи откровенно примитивны и скучны. Попытки «оживляжа» и иногда встречающиеся нелепости лишь дополняют эту картину.

Конечно, я не могу привести доказательств справедливости такой оценки именно в силу статистического характера утверждения: что бы я из книги ни выписал, всегда можно надеяться, что это изолированная глупость. Так что читателю рецензии придётся либо принять мои утверждения на веру, либо прочитать книгу.[1] Тем не менее попытаюсь привести некоторые примеры.

Объяснения

Трудности, стоящие перед авторами учебника по теории вероятностей для школьников, понятны. Если они начнут объяснять про аддитивную функцию на подмножествах абстрактного вероятностного пространства, их не поймут. Да и комбинаторика тоже вещь для большинства школьников трудная.

Но нельзя действовать как Чернышевский, который в одной из своих статей писал (цитирую по памяти), что наука вещь сложная и потому обязанности литературы — «размолоть твёрдое зерно науки в муку и развести его водою». Задача автора в другом — представить излагаемый материал как наливное яблочко на золотом блюдечке, а не в форме баланды. С этим авторы, по-моему, не справились.

Отсутствие понимания, что и как авторы хотят объяснить в данном разделе, нельзя заменить назидательными заклинаниями, пусть даже и набранными полужирным курсивом:

[1] Если кто-нибудь из прочитавших со мной не согласится и решит, что книга хорошая, прошу сообщить мне по адресу `shen@mccme.ru`, — до сих пор таких мнений я не слышал.

Здесь сказано о том, что случайные события происходят не сами по себе, а только при проведении случайного опыта (с. 88)

Этот пункт рассказал нам о том, что таблицы удобно применять для записи измерений и наблюдений (с. 21)

В этом пункте приведен пример того, зачем нужны испытания Бернулли в жизни государства и общества (с. 209)

Иногда объяснения авторов выглядят уж совсем карикатурно. Раздел 42 (Сочетания) главы 8 начинается с такого примера:

> **Пример 1**. Из трёх игроков, заявленных на теннисный матч, надо выбрать двух для выступления в парном разряде (порядок игроков не существен). Сколькими способами это можно сделать?
>
> [Тоже мне, бином Ньютона — думает в этом месте школьник — любого из трёх можно исключить. Но авторы решают эту задачу иначе:]
>
> **Решение**. Если обозначить игроков различными буквами: A, B, C, то мы можем выписать все возможные комбинации из этих букв:
>
> $$\begin{matrix} AB & BA & CA \\ AC & BC & CB \end{matrix}$$
>
> Сначала мы брали игрока A и добавляли к нему в пару ещу одного из двух оставшихся игроков. Так получились первые две пары AB и AC в нашем списке. Затем в качестве первого игрока мы взяли игрока B и к нему добавляли одного из двух оставшихся. Так получились пары BA и BC. Наконец, первым поставили игрока C и добавляли одного из оставшихся игроков. Получили последние две пары CA и CB.
>
> Однако среди полученных таким образом комбинаций получились [стиль!] перестановки одной и той же пары. Например, AB и BA — это одна и та же пара. Совпадают и другие пары: AC и CA, а также BC и CB. Таким образом, получаются всего три различные пары:
>
> $$AB \quad AC \quad BC$$
>
> Заметим, что общее число всех возможных комбинаций букв A, B и C сократилось в 2 раза. Это произошло потому, что из двух разных букв можно составить ровно две перестановки.

В оправдание авторам можно было бы предположить, что они пытаются (пусть и на нелепо выбранном примере) подготовить читателя к выводу формулы для числа сочетаний. Но нет — на следующей странице говорится лишь «Можно доказать, что $C_n^k = n!/k!(n-k)!$» безо всяких обоснований (а объяснения отнесены в приложения).

Это не единственный пример, в котором авторы словно стараются создать у школьников впечатление, что все математики — полные идиоты. (Думаю, что это неверно и можно найти контрпример даже среди авторов учебника.)

Вот как авторы рассказывают про деление пирога (раздел 8, «Круговая диаграмма»):

> **Пример 1**. Младшему брату 10 лет, а старшему 14. Братья делят круглый пирог так, чтобы каждому достался кусок, пропорциональный его возрасту. Старший заявил: — Нам вместе 24 года. Разделим пирог на 24 равные части. Десять из них твои, а остальные

> мои. — Но как же это сделать? — спросил младший? — Это можно сделать разными способами, но мы используем самый простой.
>
> [Что же это за самый простой способ? Внимание, слушаем авторов:]
>
> Из центра пирога ножом будем вырезать последовательно равные куски. Чтобы их получилось ровно 24, нам нужно вычислить угол, на который мы будем поворачивать нож, отрезая каждый следующий кусок. Этот угол равен $360^\circ : 24 = 15^\circ$. [Как именно отмерялся угол в 15°, авторы не пишут, ограничиваясь кратким «Пирог разре́зали».]

Эта беспомощное многословие при объяснении простых вещей сочетается с забавными воспарениями: «Подобно математической монете, математическая кость не имеет ни цвета, ни размера, ни веса, ни иных материальных качеств» (с. 80). Философия, понимаешь! А вот научный атеизм: «очевидно, такие крайности в отношении азартных игр свидетельствуют о том, что изжить их церковь не могла, но иногда пыталась использовать страсть к игре в своих целях» (с. 82)

Самое, пожалуй, трудное и ключевое место курса — понятие независимости событий — изложено совсем провально. Про условную вероятность (или хотя бы про долю успехов среди части исходов) не говорится ничего. (При этом задачи, в которых нужно найти условную вероятность, иногда встречаются, см. задачу 14 на с. 109.) Даётся формальное определение (вероятность пересечения равна произведению вероятностей) с загадочным комментарием: «Чаще всего о независимости событий судят не по тому, выполняется ли равенство [...], а по тому, как организован опыт, в котором эти события наступают. Независимые события возникают, когда случайный опыт состоит из нескольких независимых случайных испытаний». И всё (не считая упражнений на вычисление вероятностей по формулам).

Задачи

составляют, наверно, самую главную часть курса. Важно, что говорит учитель у доски, но важнее, о чём он спрашивает школьников. Увы, эта самая главная часть являтся и самой убогой.

Желание авторов давать доступные школьникам задачи понятно и оправдано. Но при этом в задаче должно оставаться какое-то содержание. Если школьников (на с. 12) просят по таблице определить, является ли поезд № 38 фирменным (перед этим дано расписание, где у номера поезда стоит или не стоит пометка «фирм.»), то задача ли это?

Или такая «задача» (упр. 1, с. 59):

> Запишите с помощью букв набор чисел $17, 3, 6, 21, 15$. Чему равно значение x_2 в этом наборе? Чему равно значение x_3 в этом наборе?

Большинство задач представляет собой упражнения на применение готовых формул; их можно решать не задумываясь. (Что, конечно, может создать иллюзию учебного процесса, но не более.)

Иногда ставится вопрос по прочитанному:

> Какие требования предъявляются при построении столбиковой диаграммы? [с. 28, вопрос 3; судя по тексту, подразумевается ответ «Важно, чтобы столбики были одинаковы по ширине. Расстояния между столбиками тоже должны быть одинаковыми».]

Стремясь разбавить эту скуку, авторы время от время спрашивают чего-нибудь «по жизни». Беда в том, однако, что эти вопросы зачастую нелепы и/или представляют собой приглашение к болтовне.

К примеру, в тексте приводится таблица с результатами опроса, у кого какие домашние животные, а затем в упр. 2 на с. 20 спрашивают

Каких животных, согласно таблице 11, редко держат в домашних условиях? [Что должны отвечать школьники — «тех, которых там нет»?!]

Иногда получается совсем как у Швейка с бабушкой швейцара:

Нужно ли знать общую численность всех жителей России, чтобы с помощью выборочного метода установить, кто из них предпочитает по утрам чай, а кто кофе?» [вопрос 2, с. 209]

Ещё пример:

Какие из перечисленных ниже причин могут повлиять на результаты прыжка [до этого приводится таблица результатов прыжков в длину с места двух школьников, по пять попыток каждый]:

а) удача; б) техника прыжка; в) рост; г) вес; д) хорошая тренированность; е) плохое настроение; ж) плотный обед; з) усталость; и) попутный ветер; к) неподходящая обувь; л) координация движений?»

Что тут можно осмысленно обсуждать?! Или такой вопрос:

Одна или несколько причин, на ваш взгляд, могут влиять на урожайность? [вопрос 7, с. 63]

Видимо, стремясь добавить задачи посложнее, авторы прибегают к искусственным «наворотам» типа таких:

Могут ли быть противоположными события C и D, если

$$P(C) = (a^2 + b^2)/(a + b)^2; \quad P(D) = 2ab/(a^2 + b^2),$$

где $a > 0$, $b > 0$? [упр. 2, с. 114]

Найдите корень уравнения $y^5 + 5y^4 + 10y^3 + 10y^2 + 5y = 31$ [упр. 7 на с. 218, непосредственно перед этим разбирается пример на бином в левой части уравнения].

Среднее арифметическое набора чисел $5, 11, 2$ равно 6, а дисперсия этого набора чисел равна 14. Не вычисляя, укажите, чему равно среднее арифметическое и дисперсия набора чисел: а) $50, 110, 20$; б) $15, 33, 6$; в) $-55, -121, -22$. [упр. 3 на с. 61]

События K, L и M независимы. Найдите вероятность события K, если

$$P(M) = \alpha^2\beta, P(L) = \alpha\beta^2, P(K \cap L \cap M) = \alpha^4\beta^4.$$

Когда речь заходит о «реальных» ситуациях, вероятностные предположения часто опускаются или подразумечается нечто странное. Вот примеры такого неграмотного оживляжа:

Предположим, что вероятность встретить по дороге из школы чёрную кошку равна 0,1, а вероятность встретить злую собаку равна 0,3. Считая, что собака и кошка гуляют независимо друг от друга, найдите вероятность того, что по дороге из школы повстречаются и чёрная кошка, и злая собака. [упр. 10 на с. 138]

Собака с кошкой могут гулять и независимо, но если школьник, скажем, в половине случаев едет домой на автобусе, то встречи с ними будет зависимыми событиями.

Про колесо из «Мёртвых душ»:

считая, что колесо может сломаться в любой момент на пути от гостиницы до Казани, найдите вероятность того, что а) колесо доедет до Москвы... [задача 10 на с.167; при этом равномерность распределения не упомянута (и вряд ли реалистична)]

Упражнение 7 на с.176:

Олегу задали 10 одинаковых по трудности задача. Вероятность того, что Олег решает задачу, равна 0,75. Найдите вероятность того, что Олег решит а) все задачи; б) не менее 8 задач; в) не менее 6 задач.

[Ясно, что (невысказанная, но подразумеваемая) гипотеза независимости тут не мотивируется никакой разумной моделью.]

В заключение

Хочу добавить, что в книге время от времени встречаются удачные места и задачи. (Например, упр. 18 на с. 110 или упр. 6 на с. 146.) Но прежде чем использовать эти «жемчужные зёрна», их надо как следует отмыть. Смею предположить, что если бы авторы книги (по крайней мере некоторые) реально попробовали бы несколько лет преподавать элементы теории вероятностей в школе или хотя бы в математическом кружке, готовя по ходу дела учебные материалы, и потом на основе этого опыта написали бы учебник, он мог бы получиться неплохим. Это, конечно, требует времени и сил, куда проще и выгоднее второпях изготовить «первый блин комом». Но скармливать 140000 этих комьев подопытным кроликам? «Greenpeace этого не одобрит», как говорят в народе.

* * *

Послесловие

Этот текст был написан (и послан авторам книги, а также другим знакомым) несколько месяцев назад. Многие из читателей нашли, что поношения в адрес авторов выходят за рамки приличия. В чём я вынужден с ними согласиться. Пользуясь словами Лотмана: «В предшествующих работах ⟨...⟩ мне приходилось полемически высказываться о книге ⟨...⟩ Сохраняя сущность своих критических замечаний о замысле этой книге, я считаю своей обязанностью признать их односторонность. ⟨...⟩ Резкость моих высказываний, о которой в настоящее время я сожалею, была продиктована логикой полемики».

После обсуждений с некоторыми из авторов книги (разговор с Ященко, письмо Макарова) во многих случаях мне стало ясно, что авторы пытались сказать в соответствующих местах книги. К сожалению, авторы не сочли необходимым публично отвечать на критику, так что я не могу привести их ответы и обсуждать вопрос по существу. Могу лишь сказать, что в некоторых случаях мои обвинения в безграмотности несправедливы: скорее авторов можно упрекнуть в неумении — по крайней мере, в обстановке беспрестанного аврала — писать вразумительно и критически относиться к написанному, а также в отсутствии другой обстановки.

Должен добавить также, что за это время я просмотрел и другую книжку для школьников по теории вероятностей: «Вероятность и статистика. 5 – 9 классы. Пособие» (авторы Е. А. Бунимович, В. А. Булычев). Должен честно сказать, что хотя эта книга и не выглядит так убого в целом, ляпсусов и безграмотных мест в ней никак не меньше, а даже больше. Не буду их выписывать, но одна задача произвела на меня неизгладимое впечатление. Вот она. Известно, что в булочке должно быть в среднем 30 изюминок, а в купленной булочке их не оказалось вовсе. Следует ли заподозрить неладное (если принять, как советуют авторы, что невозможными следует считать события с вероятностью менее 1% — трогательный сам по себе совет)? [Если кто-нибудь может реконструировать ход мысли авторов (верный или неверный) и получить ответ, совпадающий с авторским, пожалуйста, сообщите мне по адресу shen@mccme.ru — мне этого не удалось.]

Прогноз: попытка внедрить в школы теорию вероятностей ничего хорошего не сулит и обречена на провал — гармонично вписывающийся, вероятно, в общий процесс деградации образования в России в ходе его реформирования. Но зачем a priori уважаемым людям (в том числе и авторам указанных книг) прикладывать к этому руку, мне непонятно.