МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
КАЛИНИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИНГВИСТИКА

Межвузовский тематический
сборник

КАЛИНИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАЛИНИН 1981

4 Фейс Р. Модальная логика. М.: Наука, 1974, 520 с.

5 Dummett M.A.E., Lemmon E.J. Modal logics between S4 and S5. -Zeitschr. f. math. Logik und Grundl. d. Math., 1959, 5, S.250-264.

6 Эсакиа Л.Л. О многообразии алгебр Гржегорчика - В кн.: Исследования по неклассическим логикам и теории множеств. М.: Наука, 1979, 257-287.

7 Эсакиа Л.Л. К теории модальных и суперинтуиционистских систем. - В кн.: Логический вывод. М.: Наука, 1979, с.147-172.

8 Максимова Л.Л., Рыбаков В.В. О решётке нормальных модальных логик. - Алгебра и логика, 1974, т.13, № 2, с. 188-216.

9 Rescher N. On modal renderings of intuitionistic propositional logic. - Notre Dame J. Form. Log., 1966, 7, №3, p.277-280.

10 Новиков П.С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М.: Наука, 1977, 328 с.

11 Минц Г.Е. Системы Льюиса и система T. М., 1974.

12 Fine K. An incomplet logic, containing S4. -Theoria, 1974, 40, №1.

13 Benthen J.F.A.K. van, Blok W.J. Transitivity follows from Dummett's axiom.-Theoria, 1978, 44, №2, p.117-118.

УДК 517.11

А. ШЕНЬ
(Московский госуниверситет)

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О НУМЕРАЦИЯХ, НЕ ЯВЛЯЮЩИХСЯ НАТУРАЛЬНЫМИ

Нумерацией называется отображение ν некоторого подмножества K натурального ряда на некоторое множество A (нумеруемое множество). Если $K = \mathbb{N}$, то нумерация называется натуральной. В настоящей заметке устанавливается, что некоторые хорошо известные для натуральных нумераций факты не обобщаются на нумерации, не являющиеся натуральными.

Пусть $\nu_1 : K_1 \to A$ и $\nu_2 : K_2 \to A$ - две нумерации одного и того же множества A. Говорят, что ν_1 сводится к ν_2, если существует вычислимая функция f из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, определённая на K_1 (и, возможно, где-нибудь ещё), для которой $\nu_2(f(n)) = \nu_1(n)$ $(n \in K_1)$. Если ν_1 сводится к ν_2 и ν_2

сводится к ν_1, то нумерации ν_1 и ν_2 называются эквивалентными. Нумерация $\nu : K \to A$ называется разрешимой, если существует вычислимая функция R из $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, такая, что для любых $x, y \in K$ верно следующее: если $\nu(x) = \nu(y)$, то $R(x,y) = 0$; если $\nu(x) \neq \nu(y)$, то $R(x,y) = 1$. (В частности, R должна быть определённой на $K \times K$, но может быть определена и где-нибудь ещё). Нумерация ν называется однозначной, если $\nu(x) \neq \nu(y)$ при $x \neq y$.

Натуральные нумерации хорошо изучены (см. монографию /I/). Поэтому представляет интерес вопрос о возможности нахождения для данной (не натуральной) нумерации эквивалентной ей натуральной. Оказывается, что даже в случае конечного нумеруемого множества это возможно не всегда.

Т е о р е м а I. Существует нумерация конечного множества, не эквивалентная никакой натуральной нумерации того же множества.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это множество можно взять двуэлементным. Чтобы построить нумерацию двуэлементного множества $\{a, b\}$, не эквивалентную никакой натуральной, рассмотрим иммунное множество I (бесконечное множество, не имеющее бесконечных перечислимых подмножеств).

Л е м м а. Существуют такие множества A и B, что:

1) $A \cap B = \varnothing$,

2) $A \cup B = I$,

3) не существует вычислимой функции h, область определения которой содержит I и для которой выполнено $h(A)=0$ и $h(B)=1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Пусть $i_1, i_2, \dots$ – пересчёт элементов множества I без повторений (невычислимый, разумеется), $f_1, f_2, \dots$ – пересчёт всех вычислимых функций, принимающих значения 0 и I, область определения которых содержит I. В качестве A можно взять множество $\{ i_k \mid f_k(i_k) = 1 \}$, в качестве B – его дополнение до I. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь нумерацию ν множества $\{a, b\}$, сопоставляющую всем элементам множества A элемент a, а всем элементам множества B — элемент b. Докажем, что она не эквивалентна никакой натуральной нумерации. В самом деле, пусть $\nu_1 : \mathbb{N} \to \{a, b\}$ – эквивалентная ей натуральная нумерация, $A_1 = \nu_1^{-1}(a)$, $B_1 = \nu_1^{-1}(b)$. Рассмотрим функцию f сводящую ν_1 к ν; тогда $f(\mathbb{N}) \subset I$, и, следовательно, $f(\mathbb{N})$ конечно. Поэтому A_1 и B_1 разрешимы. Рассмотрим функцию g, сводящую ν к ν_1. Тогда функция

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } g(x) \in A_1 \\ 1, & \text{если } g(x) \in B_1 \end{cases}$$

вычислимая в силу разрешимости A_1 и B_1, определена на всём I ; при этом $h(A) = 0$, $h(B) = 1$. Это противоречит указанным в лемме свойствам множеств A и B. Теорема I доказана.

Для натуральных нумераций имеет место следующее хорошо известное утверждение: всякая разрешимая (натуральная) нумерация бесконечного множества эквивалентна однозначной (см. /I/, гл.I, § 3). Для произвольных нумераций аналогичное утверждение неверно, как показывает следующая

Теорема 2. Существует разрешимая нумерация бесконечного множества, не эквивалентная никакой однозначной нумерации.

Доказательство. Мы будем строить нумерацию ν натурального ряда, для которой будет верно такое свойство: если значения $\nu(2n)$ или $\nu(2n+1)$ определены, то они равны n. Это обеспечит разрешимость получаемой нумерации; искомая функция R такова:

$$R(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } [x/2] = [y/2], \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажем, что эта нумерация не может быть эквивалентной никакой однозначной нумерации ν_1. В самом деле, если функция f сводит ν к ν_1, а функция g сводит ν_1 к ν, то функция $h(n) = g(f(n))$ обладает такими свойствами:

(1) если $\nu(n)$ определено, то $h(n)$ определено и входит в область определения нумерации ν ;

(2) если $\nu(2n)$ и $\nu(2n+1)$ определены, то $h(2n) = h(2n+1)$.

Покажем теперь, что область определения K нумерации ν можно выбрать так, что вычислимой функции с такими свойствами не окажется. Пусть $f_1, f_2, \ldots$ – пересчёт всех вычислимых функций. Если f_i не определена хотя бы на одном из чисел $2i$ и $2i+1$, то включаем $2i$ и $2i+1$ в K. Если f_i определена на $2i$ и на $2i+1$ и $f_i(2i) \neq f_i(2i+1)$, то включаем $2i$ и $2i+1$ в K. Если f_i определена на $2i$ и на $2i+1$ и $f_i(2i) = f_i(2i+1) = m$, то включаем в K одно из чисел $2i$ и $2i+1$, отличное от m.

Легко видеть, что для построенной нумерации ν не существвует вычислимой функции h , обладающей свойствами (I) и (2). Теорема 2 доказана.

Аналогичный пример для случая конечных множеств построен быть не может, как показывает

Теорема 3. Всякая разрешимая нумерация конечного множества эквивалентна однозначной.

Доказательство. Пусть ν — разрешимая нумерация конечного множества $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Выберем по одному номеру каждого элемента: пусть $\nu(a_i) = x_i$. Рассмотрим перечислимые множества $A_1, \ldots, A_m$, определяемые соотношениями $A_i = \{y \mid R(a_i, y) = 1\}$ (R — функция из определения разрешимой нумерации). Все номера элемента x_i (т.е. все n, для которых $\nu(n) = x_i$) лежат в A_i и не лежат в A_j при $i \neq j$. Пусть сначала A_i не пересекаются. Тогда рассмотрим вычислимую функцию, переводящую все элементы A_i в соответствующее a_i. Она сводит нумерацию ν к однозначной нумерации, являющейся сужением ν на $\{a_1, \ldots, a_m\}$. Обратное сведение очевидно. Если же A_i пересекаются, то следует рассмотреть непересекающиеся перечислимые множества A'_i, для которых $A'_i < A_i$ и $A'_1 \cup \ldots \cup A'_m = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ и применить к ним ту же процедуру. (Существование таких множеств следует из теоремы об однозначности, см. /2/, с. 99-100). Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I Ершов Ю.Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977, 416 с.

2 Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972, 624 с.

УДК 517.11

А.А. ШУМ
(Калининский политехнический институт)

КОНЕЧНАЯ АКСИОМАТИКА ЛОГИКИ БЕСКОНЕЧНЫХ ЗАДАЧ В РАСШИРЕННОМ ЯЗЫКЕ

А.Н. Колмогоров высказал в /1/ идею об интерпретации интуиционистского исчисления Гейтинга H как исчисления задач. Воз-