ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

СЕМИОТИКА И ИНФОРМАТИКА

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ВЫПУСК

МОСКВА 1982

1—7241

Выходит дважды в год.
Выпуск 18 — второй выпуск за 1981 г.

В подготовке выпуска к печати принимали участие
П. А. Кулунков, Д. П. Скворцов, Е. В. Рахилина

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

А. Шень

ЧАСТОТНЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОНЯТИЯ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ВВЕДЕНИЕ

Начнем со следующего примера. Представим себе, что симметричную монету бросают много раз подряд, записывая результаты бросаний (выпадения орла и решки) в виде последовательности нулей и единиц. (Мы будем считать этот процесс непрерывно продолжающимся и, следовательно, говорить о бесконечных последовательностях нулей и единиц.) Может ли в результате получиться последовательность из одних нулей?

«Нет, не может, — сказал бы, наверное, почти каждый, к кому мы обратимся с таким вопросом, — ведь мы же предполагаем, что монета симметричная». Более искушенный человек добавит: «Потому что это противоречит теории вероятностей; в частности, это противоречит закону больших чисел, согласно которому $\lim(z_N/N)=1/2$, где через z_N обозначено число нулей в первых N членах последовательности». Теперь нам остается обратиться лишь к математику — специалисту по теории вероятностей и узнать, в чем же в точности состоит закон больших чисел. Нам ответят примерно следующее: «Рассмотрим канторовское пространство Ω бесконечных последовательностей нулей и единиц. Для каждого конечного слова x в алфавите $\{0, 1\}$ рассмотрим множество Γ_x всех последовательностей, начинающихся на x. Определим меру μ на пространстве Ω, положив $\mu(\Gamma_x)=2^{-l(x)}$; где $l(x)$ — длина x. Так вот, мера μ множества всех тех последовательностей, для которых предел $\lim(z_N/N)$ относительной частоты не существует или отличен от 1/2, равна 0. Доказывается это так...». Но нас в первую очередь интересует не доказательство, а то, каким образом ссылка на эту математическую теорему обосновывает несимметричность монеты, которая бесконечное число раз падает вверх одной стороной. Тут «чистый» математик, видимо, разведет руками и скажет: «Ваш вопрос не математический, и Вы обратились не по адресу.» Менее «чистый» математик мог бы выдвинуть такое объяснение: «Мера множества $A \subset \Omega$ есть вероятность того, что последовательность, получающаяся в результате описанного эксперимента, попадает в A. Поэтому вероятность того, что последовательность не будет удовлетворять закону больших чисел, равна 0. А события с вероятностью 0 не происходят. Поэтому предположение о симметричности монеты надо отвергнуть». Однако это объяснение не может нас удовлетворить по следующей причине. Пусть ω — любая последовательность 0 и 1. Рассмотрим одноэлементное множество A, единственным элементом которого является ω. Мера этого множества равна 0. Поэтому (по аналогичным соображениям), если в результате описанного эксперимента возникает последовательность ω, то монета была «недостаточно случайной». Поскольку последовательность ω можно взять любой, то при любом исходе опыта мы можем сделать вывод о несимметричности монеты!

Можно объявить сам вопрос надуманным, так как бесконечных опытов не бывает и нелепо спорить о выводах, которые можно сделать из «результатов» таких опытов. Но и в случае конечных серий испытаний сходная проблема остается. Пусть к Вам приходит некто, пять раз подряд бросает игральную кость, и пять раз выпадает шестерка. (Ср. обсуждение сходного примера в книге Дж. Пойа [1, с. 327—329].) Скорее всего Вы решите (или, во всяком случае, заподозрите), что кость или способ ее бросания содержат какую-то скрытую особенность. Но в чем причина такого убеждения? Хочется объяснить его тем (так Пойа и делает), что вероятность выпадения пяти шестерок равна 6^{-5} и очень мала. Но абсолютно такова же вероятность любого другого результата последовательности из пяти бросаний и, следовательно, например, выпадение чисел 3, 1, 3, 2, 5 должно вызывать не меньшие подозрения. (А это, по-видимому, для большинства людей не так.) Сходные сомнения возникают не только в подобных игрушечных примерах*, но и в реальных применениях теории вероятностей.

Вернувшись к случаю бесконечного числа испытаний, посмотрим, какое объяснение предлагает нам теория случайных последовательностей. Она основана на следующих тезисах:

1. Последовательности нулей и единиц бывают случайные и неслучайные.

2. Последовательность, возникающая в результате описанного «эксперимента», является случайной.

3. Случайные последовательности удовлетворяют всем законам теории вероятностей.

Из третьего тезиса следует, что последовательность из одних нулей не случайна, и теперь из второго тезиса вытекает, что она не может получиться в результате описанного эксперимента.

Осталось ответить на такие вопросы:

(а) что же такое случайная последовательность?

(б) как можно уточнить и обосновать третий тезис? (Проблема, связанная со вторым тезисом, не относится к математике и поэтому останется без комментариев.)

Настоящая статья представляет собой исторический обзор попыток ответить на вопросы (а) и (б), по большей части на первый из них, — попыток, вдохновленных идеями Рихарда фон Мизеса о предмете теории вероятностей. Прежде чем приступить к обзору, отметим, что если бы мы вместо монеты бросали кубик, на пяти сторонах которого написаны нули, а на одной стороне — единица, то понятие случайной последовательности, конечно, изменилось бы (математически это означает рассмотрение другой меры в Ω). Мы будем для простоты рассматривать симметричный случай равноправных нуля и единицы (хотя большая часть наших рассуждений может быть отнесена и к другим распределениям вероятностей).

---

* Как сообщалось в газете, в качестве чуть ли не единственного аргумента при судебном разбирательстве дела о шулерстве фигурировала малая вероятность расклада, происшедшего при игре; впрочем, обвиняемые признали свою вину.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОСТИ ПО МИЗЕСУ

Еще до создания А. Н. Колмогоровым аксиоматического истолкования теории вероятностей в терминах теории меры Рихард фон Мизес пытался ввести понятие случайной последовательности, или, как говорил Мизес, «коллектива» (das Kollektiv). Он пишет: «Коллектив есть ряд единичных наблюдений, при котором... относительная частота появления каждого единичного ... признака стремится к определенному предельному значению» [2, с. 30]. Помимо этого требования, выдвигается и другое: «... это предельное значение должно оставаться неизменным, если из всей последовательности произвольно выбрать любую часть и рассматривать в дальнейшем только эту часть» [2, с. 31].

Что имеется в виду под «произвольным выбором»? На этот счет у Мизеса имеются такие указания: «Само собой разумеется, что выбранная последовательность должна быть безграничной, как и сама основная последовательность... В остальном ... фантазии предоставляется полная свобода. Нужно только иметь возможность решать вопрос о принадлежности или непринадлежности каждого отдельного бросания к выбранной частичной последовательности независимо от результата этого бросания, то есть при помощи некоторого правила, относящегося только к номеру данного бросания, и установленного прежде, чем стал известен его исход» [2, с. 31—32]. Помимо этих общих замечаний, Мизес дает также некоторые примеры допустимых с его точки зрения правил выбора, а именно:

а) правило, согласно которому выбираются члены последовательности с четными номерами;

б) правило, согласно которому выбираются члены с простыми номерами;

в) правило, согласно которому выбираются те члены, которым непосредственно предшествуют единицы.

Принцип постоянства частот Мизес называет принципом «невозможности системы игры». Мы еще вернемся к обсуждению различных уточнений замысла

Мизеса, однако заметим уже сейчас, что, видимо, слова о безграничности выбираемой последовательности не следует понимать так, что правило должно в любом случае (в применении к любой последовательности) давать бесконечную последовательность, иначе правило *в* недопустимо (число единиц в последовательности может быть конечным). Вероятно, Мизес имел в виду, что *если* получающаяся последовательность бесконечна, то в ней должен быть тот же предел частоты, что и во всей последовательности.

§ 2. ОБЩАЯ СХЕМА ЧАСТОТНОГО ПОДХОДА

Прежде чем обратиться к конкретным уточнениям подхода Мизеса к определению случайной последовательности (называемого также частотным подходом), опишем некоторую схему, которой все они следуют.

1. Выбирается некоторое *основное свойство*, которым должны обладать случайные последовательности (существование предела частот или, в нашем симметричном случае, равенство его числу 1/2).

2. Фиксируется некоторый класс *допустимых* правил выбора (*правилом выбора* называется отображение, сопоставляющее каждой бесконечной последовательности нулей и единиц некоторую другую, возможно конечную, последовательность нулей и единиц).

3. Последовательность объявляется *случайной*, если, применив к ней любое допустимое правило выбора, мы получим последовательность, обладающую основным свойством.

Во всех рассматриваемых в дальнейшем уточнениях в допустимые правила всегда включается тождественное, поэтому, как и утверждалось, случайные последовательности обладают основным свойством.

Разные уточнения различаются пониманием слов «допустимое правило выбора». Выбор Мизесом в качестве основного свойства существования предела частот понятен: он хотел строить теорию вероятностей как науку о коллективах и *определять* вероятность как предел частот!

Примеры. Пусть $n(0)<n(1)\ldots$ — некоторая монотонно возрастающая последовательность натураль-

ных чисел. Рассмотрим правило выбора, сопоставляющее последовательности $a_0, a_1, a_2 \ldots$ последовательность $a_{n(0)}, a_{n(1)}, \ldots$. При $n(i)=2i$ мы получаем правило *а* из § 1, при $n(i)$, равным i-му простому числу, — правило *б* из § 1. Если мы объявим допустимыми все такие правила (при любом выборе последовательности n), то случайных последовательностей не будет вовсе, ибо для любой конкретной последовательности можно подобрать правило выбора, преобразующее ее в последовательность из одних нулей или одних единиц.

Мы видим, что разумное определение случайности требует ограничения класса допустимых правил выбора. Теория алгоритмов дает необходимые для такого ограничения средства: например, для правил только что рассмотренного типа можно потребовать вычислимости функции $i \mapsto n(i)$. Первый способ уточнения замысла фон Мизеса с помощью теории алгоритмов принадлежит одному из создателей этой теории — А. Черчу. К рассмотрению этого способа мы и обратимся.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОСТИ ПО МИЗЕСУ—ЧЁРЧУ

В [3, с. 131] Черч пишет следующее:

«Бесконечная последовательность $a_1, a_2, \ldots$ нулей и единиц случайна, если выполнены следующие два условия:

(1) если $f(r)$ — число единиц среди первых r членов последовательности, то $f(r)/r$ стремится к некоторому p при $r \to \infty$;

(2) если $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ — бесконечная подпоследовательность, полученная путем отбрасывания некоторых членов исходной последовательности в соответствии с правилом, решающим вопрос о выбрасывании a_n в зависимости лишь от n и $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, и если $g(r)$ — число единиц среди первых r членов последовательности $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$, то, $g(r)/r$ стремится к тому же самому пределу p при $r \to \infty$».

Ограничиваясь случаем симметричной монеты, мы должны заменить p на 1/2. Под «правилом» Черч понимает разрешимый предикат Ф, определенный на конечных последовательностях нулей и единиц; «отбрасывание... в соответствии с правилом» означает, что оставляются лишь те члены a_n, для которых $\Phi(a_1 \ldots \ldots a_{n-1}) = \mathbf{И}$, и порядок их сохраняется. На с. 134 Черч дает такую формулировку условия (2), по существу совпадающую с только что приведенной:

«(2) Если Φ — любая эффективно вычислимая функция на положительных целых числах, $b_1 = 1$, $b_{n+1} = 2b_n + a_n$, $c_n = \Phi(b_n)$, те числа n, для которых $c_n = 1$, образуют (в порядке возрастания) последовательность $n_1, n_2, \ldots$, а $g(r)$ есть число единиц среди первых r членов последовательности $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$, то $g(r)/r$ стремится к тому же самому пределу p при $r \to \infty$».

Определение Черча можно переформулировать так: пусть некто (**Н**) участвует в азартной игре, состоящей в следующем:

1. В специальном окошке, обозреваемом **Н**, друг за другом появляются члены последовательности.

2. Перед появлением каждого очередного члена **Н** имеет право сделать одно из двух заявлений: «играю» или «пас».

3. В первом случае при появлении единицы в окошке он выигрывает рубль, а при появлении нуля — проигрывает. Во втором случае он остается «при своих» независимо от очередного члена последовательности (но наблюдает его и может использовать при выборе способа действий в дальнейшем).

Так вот, последовательность не случайна, если существует такая всюду определенная вычислимая стратегия для **Н**, при применении которой **Н** бесконечно много раз говорит «играю», и предел $\lim\left(\frac{A_N}{N}\right)$ при $N \to \infty$ не существует или не равен 0 (через A_N обозначен выигрыш **Н** после N ставок). Говоря о «всюду определенности» стратегии, мы имеет в виду, что алгоритм, ее реализующий, должен всегда — в применении к любой последовательности в любой момент — давать один из ответов «играю» и «пас». О не всюду определенных стратегиях мы еще будем говорить в § 5.

Случайные в описанном смысле последовательности мы будем называть *случайными по Черчу* (или, более точно, по *Мизесу — Черчу*).

Естественная модификация этого определения состоит в том, чтобы разрешить «ставить и на ноль, и на единицу», заменив пункты 2 и 3 описания игры на следующие и оставив остальную часть определения без изменений.

2′. Перед появлением каждого очередного члена **Н** имеет право сделать одно из трех заявлений «пас», «ставлю на единицу», «ставлю на ноль».

3′. В первом случае он остается «при своих»; во втором получает рубль, если в окошке появляется единица, и теряет рубль, если появляется ноль; в третьем он получает рубль, если в окошке появляется ноль, и теряет его, если появляется единица.

Эта модификация оказывается равносильной первоначальному определению. Ясно, что случайные в новом смысле последовательности случайны и по Черчу (потому что измененные правила предоставляют **Н** новые возможности, сохраняя за ним старые). Но верно и обратное: пусть дана стратегия S в игре нового типа. Рассмотрим две стратегии для старой игры: одна (S_0) предписывает говорить «играю» в тех случаях, когда S велит ставить на ноль (и «пас» — в остальных случаях), другая (S_1) предписывает говорить «играю» в тех случаях, когда S велит ставить на единицу (и «пас» в остальных). Нетрудно понять, что если **Н** играет в новую игру, руководствуясь стратегией S, то его выигрыш равен разнице между выигрышами, которые он имел бы, руководствуясь стратегиями S_0 и S_1 в старой игре с той же последовательностью и к тому же моменту времени. Если последовательность случайна по Черчу, то эти выигрыши суть $o(N_0)$ и $o(N_1)$ (N_0, N_1 — числа ставок при употреблении стратегий S_0 и S_1) и, следовательно, их разность есть $o(N_0+N_1)$, чего и требует измененное определение случайности. (Случай, когда одна из двух стратегий, S_0 или S_1, предписывает говорить «играю» лишь конечное число раз, надо рассмотреть отдельно; впрочем, он очевиден).

Прежде чем перейти к другим вариантам определения понятия случайной последовательности, обсудим еще одно важное свойство определения Черча. Пусть мы взяли какую-то случайную последовательность и применили к ней допустимое правило выбора. Согласно определению, мы получим последовательность, обладающую основным свойством. Но будет ли она случайной? Мизес, видимо, считал это обстоятельство очевидным. Говоря об операциях, дающих по одним коллективам другие, он писал об «операции выбора»:

«Пусть нам дан, например, коллектив, который состоит из всех бросаний одной определенной кости... Новый коллектив пусть состоит из элементов первого, четвертого, седьмого... бросания той же кости. Спрашивается, каковы вероятности в пределах нового коллектива... После того, что прежде подробно говорилось о свойствах коллектива, в особенности о его иррегулярности, не может быть никакого сомнения в том, как ответить на этот вопрос. Вероятность остается при переходе от старого коллектива к новому, образованному операцией «выбора», — неизменной. Ведь именно это требование было нами выставлено при определении иррегулярности» [2, с. 50].

Из этих слов можно сделать вывод, что правила выбора, с помощью которых образуется новый коллектив, — те же, о которых шла речь в принципе «невозможности системы игры», и для фон Мизеса очевидно, что они должны в применении к коллективу давать новый коллектив. Уверенность Мизеса в этом, по-видимому, объясняется тем, что он считал очевидным такое свойство (K) допустимых правил выбора:

(K) композиция двух допустимых правил выбора есть снова допустимое правило выбора.

Более точно это свойство можно сформулировать так: если P_1 и P_2 — допустимые правила выбора, то существует допустимое правило выбора P_3, которое эквивалентно композиции $P_2 \circ P_1$ в том смысле, что если к любой последовательности x применить сначала P_1, получив бесконечную последовательность y, затем к y применить P_2, получив бесконечную последовательность z, то при применении к x правила P_3 должна получиться последовательность z.

Если определение допустимого правила выбора таково, что свойство (K) выполняется, то, очевидно, применение допустимого правила выбора к случайной последовательности x дает снова случайную последовательность y (в самом деле, если допустимое правило в применении к y дает z, то z обладает основным свойством, ибо может быть получена из x применением допустимого правила выбора).

Нетрудно понять, что в определении Черча свойство (K) выполняется и, следовательно, применение допустимого по Черчу правила выбора к случайной по Черчу последовательности дает снова случайную по Черчу последовательность. (Или конечную — этот тривиальный случай мы не оговариваем особо.)

Замечание 1. Отметим, что если к началу случайной по Черчу последовательности приписать любое слово из нулей и единиц (например, миллион нулей), то получится снова случайная последовательность, что может, на первый взгляд, показаться недостатком определения Черча. Однако это свойство (которым обладают и все рассматриваемые в дальнейшем определения понятия случайной последовательности), по-видимому, является неизбежным следствием того, что мы рассматриваем бесконечные последовательности.

Замечание 2. Мы еще не доказали существования случайных по Черчу последовательностей — мы откладываем это, так как впоследствии докажем более сильное утверждение. На самом деле они, конечно, существуют, и, более того, почти всякая (по мере в Ω, рассмотренной во введении) последовательность такова.

§ 4. НЕДОСТАТКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧЕРЧА

К сожалению, определние Черча, рассмотренное в предыдущем параграфе, обладает различными недостатками.

1. Пример Вилля. Как показал Вилль [4, с. 187], существует последовательность нулей и единиц, случайная в смысле Черча и такая, что любой ее начальный отрезок содержит больше единиц, чем нулей. (Построение такой последовательности приводится в [5, с. 284—285; особенно п. 5 на с. 285]). Случайность такой последовательности, пожалуй, противоречит третьему тезису Введения, потому что, как известно из теории вероятностей, мера множества последовательностей, любой начальный отрезок которых содержит больше единиц, чем нулей, равна 0 (следствие закона повторного логарифма [4, с. 188]).

2. Пример Лавлэнда. Как показал Лавлэнд [5], существует случайная по Черчу последовательность, становящаяся неслучайной (по Черчу) после вы-

числимой перестановки ее членов. Этот факт также, пожалуй, противоречит нашей интуиции.

Размышление о причине отмеченных недостатков наводит на мысль о том, что требуется рассмотреть более общий способ выбора членов последовательности; в частности, неправильно то, что они становятся известными обязательно в порядке возрастания их номеров. Этим, например, запрещается правило, выбирающее из последовательности a_n те члены a_{2n} (с четными номерами), для которых $a_{2n+1}=0$. Желание устранить это ограничение привело независимо А. Н. Колмогорова и Д. Лавлэнда к обобщению понятия допустимого правила выбора, которое мы впоследствии рассмотрим. Однако вначале мы остановимся на менее радикальном расширении понятия допустимого правила выбора, предложенном Р. Дэли в [6]. Хотя предложенная Дэли модификация определения Черча не устраняет отмеченных недостатков, она довольно естественна (может быть, даже более естественна, чем определение Черча), поэтому мы ее рассмотрим.

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОСТИ ПО МИЗЕСУ — ЧЕРЧУ — ДЭЛИ

В работе [6] Р. Дэли предложил модифицировать определение Черча, разрешив вычислимые стратегии, которые могут быть в некоторых случаях не определены (в этих случаях игра обрывается). Более точно, в определении допустимого правила выбора надо заменить разрешимый предикат Φ на частичную вычислимую функцию Φ со значениями **И** и **Л** и оставлять те члены a_n, для которых $\Phi(a_1 \ldots a_k)$ определено при всех $k<n$, а $\Phi(a_1 \ldots a_{n-1}) = \text{И}$. При этом получается определение, не эквивалентное исходному определению Черча: хотя каждая случайная в новом смысле последовательность, очевидно, случайна и по Черчу, но обратное оказывается неверным; см. об этом подробнее в § 8. Возникающее понятие мы будем называть *случайностью по Мизесу — Черчу — Дэли* (или, короче, *по Черчу — Дэли*).

Все отмеченные недостатки определения случайности по Черчу свойственны и определению Черча — Дэли. Дело в том, что пример типа Виля может быть построен для любого счетного семейства стратегий (в описанной игре), и тот факт, что мы ослабили требования алгоритмического характера на рассматриваемые стратегии, оставив их множество счетным, не может спасти положения. Подобным же образом анализ рассуждений Лавлэнда, использованных им при построении упомянутого выше примера, показывает, что они могут быть легко перенесены и на случайные по Черчу — Дэли последовательности.

Обратимся теперь к рассмотрению предложенного Колмогоровым и Лавлэндом обобщения понятия допустимого по Черчу правила выбора.

§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОСТИ ПО МИЗЕСУ — КОЛМОГОРОВУ — ЛАВЛЭНДУ

Класс допустимых правил выбора, введенный Колмогоровым в [7] и Лавлэндом в [5, 8], является расширением класса допустимых по Черчу (и даже по Черчу — Дэли) правил выбора: каждое допустимое по Черчу — Дэли правило допустимо и по Колмогорову — Лавлэнду, но не наоборот. Основное свойство случайных последовательностей (см. § 2) остается тем же: требуется, чтобы предельные частоты нулей и единиц равнялись 1/2. Получаемое согласно общей схеме § 2 определение *случайности по Мизесу — Колмогорову — Лавлэнду* (или, короче, *по Колмогорову — Лавлэнду*) будет более ограничительным, чем определение Черча — Дэли: всякая случайная по Колмогорову — Лавлэнду последовательность будет случайной по Черчу — Дэли и тем более по Черчу. Обратное неверно (см. об этом далее).

Дадим теперь определение правила выбора, допустимого по Колмогорову — Лавлэнду, для чего рассмотрим следующую игру. Пусть на бесконечном столе выложена бесконечная последовательность карт, на нижней (невидимой) стороне которых написаны нули или единицы (на каждой карте по числу). Верхняя сторона всех карт одинакова. Некто (**Н**) имеет право сделать одно из двух заявлений «играю» или «пас» и перевернуть любую из еще не перевернутых карт, посмотрев, что на ней написано. Такие действия повторяются многократно. Выигрыш **Н** определяется так же, как и в первой из рассмотренных нами игр. Не случайными объявляются те последовательности, для которых существует такая (возможно, не всюду определенная) вычислимая стратегия для **Н**, при применении которой **Н** бесконечно много раз говорит «играю» и $\lim\left(\frac{A_N}{N}\right)$ при $N\to\infty$ не существует или не равен 0 (через A_N обозначен выигрыш **Н** после N ставок).

Иными словами, допустимым по Колмогорову — Лавлэнду правилом выбора именуется (не обязательно всюду определенная) вычислимая стратегия в указанной игре; применить это правило к последовательности $a_0a_1a_2\ldots$ означает записать a_0, a_1, $a_2, \ldots$ на первой, второй, третьей ... карточках и воспользоваться стратегией; выписав числа, оказавшиеся на карточках, перед переворачиванием которых было объявлено «играю» (в том порядке, в котором они переворачивались), мы получим последовательность — результат применения правила к исходной последовательности.

Более точно, пусть G, H — частичные вычислимые функции на словах алфавита $\{0, 1\}$, значения G — натуральные числа, значения H — нули и единицы. Любые такие функции G и H задают допустимое по Колмогорову — Лавлэнду правило выбора. Опишем применение его к последовательности $a_0a_1\ldots$ из нулей и единиц. Сначала применяем функции G и H к пустому слову Λ. Если хотя бы одна из них не определена, результатом применения правила будет пустая последовательность. Пусть $G(\Lambda)=n_1$, $H(\Lambda)=b_1$. Если $b_1=1$, первым членом результирующей последовательности будет a_{n_1}, если $b_1=0$, значит, первый член результата еще не определился. Затем вычисляем $n_2=G(a_{n_1})$ и $b_2=H(a_{n_1})$. Если одна из функций не определена или $n_2=n_1$, построение прекращается и результат будет конечным (пустым или одноэлементным в зависимости от b_1). Если это не так и $b_2=1$, то очередным членом результирующей последовательности будет a_{n_2}; если же $b_2=0$, то на втором шаге мы не добавляем новых членов в результирующую последовательность. И так далее. На k-ом шаге мы вычисляем $n_k=G(a_{n_1}\ldots a_{n_{k-1}})$ и $b_k=H(a_{n_1}\ldots a_{n_{k-1}})$. Если оба вычисления закончились и $n_k\notin\{n_1,\ldots,n_{k-1}\}$, то мы добавляем (соответственно — не добавляем) a_{n_k} в результирующую последовательность, если $b_k=1$ (соответственно $b_k=0$).

Последовательность $n_1, n_2, \ldots$ соответствует в первоначальной интерпретации номерам перевернутых карт, а $b_1, b_2, \ldots$ — сделанным заявлениям «пас» и «играю» перед их переворачиванием. Лавлэнд [5, с. 282; 8, с. 499] называет последовательность $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ предварительной, или наблюдаемой (preliminary or observed), а результирующую последовательность — окончательной, или разыгрываемой (final or betting).

Очевидно, допустимые по Черчу — Дэли (и тем более по Черчу) правила допустимы и по Колмогорову — Лавлэнду. Примером допустимого по Колмогорову — Лавлэнду правила является также правило, приведенное в § 4 после обсуждения примера Лавлэнда. Еще один пример такого правила — переход от последовательности $a_0a_1\ldots$ к последовательности $a_{n(0)}a_{n(1)}\ldots$ (где $n(0)$, $n(1), \ldots$ — вычислимая последовательность различных натуральных чисел); частным случаем правила последнего типа является вычислимая перестановка членов последовательности.

Применение допустимого по Колмогорову — Лавлэнду правила выбора можно представлять себе состоящим из двух этапов. На первом этапе с помощью функции G рекуррентно определяются числа $n_1, n_2, \ldots$ по формуле

$$n_k=G\,(a_{n_1}a_{n_2}\ldots a_{n_{k-1}}),$$

применяемой до тех пор, пока это возможно (пока значения G определены и не повторяются). Получается последовательность $p_1p_2\ldots$ нулей и единиц, $p_i=a_{n_i}$. Затем из нее выбираются те члены p_i, для которых $H(p_1\ldots p_{i-1})=1$.

Заметим, что второй этап является по существу применением допустимого по Черчу — Дэли правила выбора. Поэтому последовательность $a_1a_2\ldots$ случайна по Колмогорову — Лавлэнду тогда и только тогда, когда для любой функции G наблюдаемая последовательность, полученная описанным выше способом, случайна по Черчу — Дэли.

Именно такую двухэтапную схему приводит Д. Кнут. В [9, с. 176, определение $R5$] он дает определение случайности, эквивалентное определению Черча. Если считать, что функции f_n, рассматриваемые Кнутом, не обязаны быть всюду определенными, то мы придем к определению $R5'$, эквивалентному определению Черча—Дэли. Далее [9, с. 177, определение $R6$] Кнут называет последовательность случайной, если любая ее подпоследовательность, полученная описанным способом с помощью некоторой вычислимой функции G, случайна в смысле определения $R5$ (или конечна). Если в предыдущей фразе заменить $R5$ на $R5'$, мы придем к определению $R6'$, эквивалентному определению Колмогорова — Лавлэнда. А само определение $R6$ является несколько более слабым (хотя приводит ли это ослабление к расширению класса случайных последовательностей на самом деле, автору неизвестно).

Определение $R6$ Кнут считает, по-видимому, окончательным. Он пишет:

«Автор утверждает, что это определение, несомненно, отвечает всем разумным философским требованиям, предъявляемым к понятию случайности, и, таким образом, дает ответ на главный вопрос, поставленный здесь» [9, с. 177]. (Имеется в виду вопрос об «истинном» определении случайности.) Впрочем, в ответах к упражнениям, говоря о примере типа Виля [9, с. 586, ответ к упражнению № 31] Кнут замечает: «Возможно, что с этой точки зрения $R6$ также слишком слабо».

Отметим также, что Кнут дает определения $R5$ и $R6$ не для двоичных последовательностей, а для b-ичных при $b \geqslant 2$; кроме того, он говорит также о случайности последовательности вещественных чисел $x_n \in [0, 1]$, понимая под этим случайность b-ичных последовательностей $a_n = $ (*целая часть* $b \cdot x_n$) при всех целых $b \geqslant 2$.

§ 7. ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОСТИ ПО МИЗЕСУ — КОЛМОГОРОВУ — ЛАВЛЭНДУ

Прежде всего посмотрим, устранились ли отмеченные выше (§ 4) недостатки определения Чёрча.

Оказывается, что некоторое улучшение действительно имеет место. Именно, пример, аналогичный примеру Лавлэнда, построить нельзя: случайная последовательность остается случайной при вычислимой перестановке ее членов. Это происходит потому, что композиция следующих двух преобразований: сначала вычислимой перестановки, а затем допустимого по Колмогорову — Лавлэнду правила выбора — есть снова допустимое по Колмогорову — Лавлэнду правило выбора.

Вопрос о существовании аналога примера Виля (т. е. случайной по Колмогорову — Лавлэнду последовательности, любой начальный отрезок которой содержит больше единиц, чем нулей) остается открытым, как отмечает Кнут [9, с. 192, упр. 35]. Это упражнение гласит: «Обобщите, если это возможно, алгоритм W так, чтобы получать последовательности, удовлетворяющие более строгим условиям определения $R6$». (Алгоритм W — способ построения случайных в смысле определения $R5$ последовательностей, позволяющий построить, в частности, пример Виля.) Это упражнение помечено знаком $M50$ и тем самым является «исследовательской проблемой, которая... еще не получила удовлетворительного решения».

О том, насколько определение Колмогорова — Лавлэнда удовлетворяет третьему тезису Введения, см. далее. А сейчас мы остановимся на (важном с нашей точки зрения) недостатке определения Колмогорова — Лавлэнда, или, точнее, на недостатке определения допустимого по Колмогорову — Лавлэнду правила выбора.

Теорема. *Допустимые по Колмогорову — Лавлэнду правила выбора не обладают свойством* (K) *из § 3: существуют два допустимых правила, композиция которых не является допустимым правилом.*

Это утверждение еще не означает, что результат применения допустимого (по Колмогорову — Лавлэнду) правила к случайной (по Колмогорову — Лавлэнду) последовательности может быть не случайной (по Колмогорову — Лавлэнду) последовательностью. (Так ли это на самом деле, автор не знает.) Но во всяком случае случайность результата применения допустимого правила выбора к случайной последовательности перестает быть очевидной.

Доказательство. Рассмотрим два следующих правила.

Правило P_1 предписывает выбрать второй член последовательности, если первый равен 1, затем выбрать третий, если второй равен 0 затем (в любом случае) выбрать четвертый, пятый и все последующие. Например, результатом применения P_1 к последовательности

$01x_3x_4\ldots$ будет $x_4x_5\ldots$, к $10x_3x_4x_5\ldots$ — $0x_3x_4x_5\ldots$, к $11x_3x_4\ldots$ — $1x_4x_5\ldots$

Правило P_2 предписывает переставить первые два члена последовательности; результат применения его к последовательности $x_1x_2x_3\ldots$ будет равен $x_2x_1x_3\ldots$

Докажем, что композиция $P_3=P_2 \circ P_1$ (сначала P_1, затем P_2) не эквивалентна никакому допустимому по Колмогорову — Лавлэнду правилу. Правило P_3 предписывает сначала выбрать третий член, если второй равен 0, затем второй, если первый равен 1, затем (в любом случае) четвертый, пятый и так далее. Применяя правило P_3 к последовательности $\alpha=100111\ldots$ (здесь и далее все невыписанные члены равны 1), получим последовательность $0011\ldots$ Пусть P — допустимое по Колмогорову — Лавлэнду правило, эквивалентное P_3. Рассмотрим процесс его применения к последовательности α, пользуясь схемой с числами на перевернутых карточках. Обе карточки с нулями были перевернуты с заявлением «играю», так как в исходной последовательности, так же как и в результирующей, только два нуля. Какая из них была перевернута первой? Пусть левая (ближайшая к началу последовательности). Тогда, применяя P к последовательности $\beta=$ $=101111\ldots$, мы получим последовательность, начинающуюся на 0 (ибо до переворачивания той карточки, где мы заменили 0 на 1, т. е. третьей слева, P будет применяться к β таким же образом, как и к α). Между тем P_3 дает в применении к β последовательность $101\ldots$ Итак, первой могла быть перевернута только правая карточка. Но тогда при применении правила P к последовательности $\gamma=11011\ldots$ должна получиться последовательность, начинающаяся на 0. Между тем применение правила P_3 к γ дает последовательность $1111\ldots$ Полученное противоречие показывает, что правило P_3 не эквивалентно никакому допустимому по Колмогорову — Лавлэнду правилу. Теорема доказана.

§ 8. СВЯЗЬ ЧАСТОТНОГО ПОДХОДА С ТЕОРЕТИКО-МЕРНЫМ И СЛОЖНОСТНЫМ ПОДХОДАМИ

Мы предполагаем, что читатель этого параграфа знаком с понятием энтропии конечного объекта и основанном на этом понятии определении случайности (за разъяснениями можно обратиться к статье В. В. Вьюгина [10]). Напомним основные результаты, связанные с этим кругом идей.

Рассмотрим пространство Ω всех бесконечных двоичных последовательностей. В классической теории вероятностей важную роль играет понятие нулевого множества (= множества меры 0). Законами теории вероятностей считаются те утверждения о последовательностях, которые верны почти для всех последовательностей, т. е. те, для которых множество не удовлетворяющих им последовательностей — нулевое. В соответствии с третьим тезисом Введения хотелось бы назвать случайной последовательность, удовлетворяющую всем законам теории вероятностей, т е. не лежащую ни в каком нулевом множестве. К сожалению, таких последовательностей нет: каждая последовательность лежит в нулевом множестве, единственным элементом которого является она сама. Теоретико-мерный подход к случайности предлагает такой выход: рассматривать не все нулевые множества, а только конструктивно нулевые (определение см. [10, с. 22]), считать конструктивными законами теории вероятностей те утверждения, для которых множество не удовлетворяющих им последовательностей конструктивно нулевое, а случайными считать последовательности, удовлетворяющие всем конструктивным законам, т. е. не лежащие ни в каком конструктивно нулевом множестве. Теперь уже случайные последовательности существуют; более того, как доказал П. Мартин-Лёф, множество неслучайных последовательностей — объединение всех конструктивно нулевых множеств — само является конструктивно нулевым (см. [10], с. 22, теорема 1.3). Последнее утверждение можно сформулировать в виде конструктивного закона теории вероятностей, гласящего: «Случайно выбранная последовательность случайна». (При этом слова «случайно выбранная последовательность обладает свойством P» понимаются так: множество последовательностей, не обладающих свойством P, является конструктивно нулевым.) Описанное понятие случайности мы будем называть случайностью по Мартин-Лёфу.

Замечательным образом оказывается, что эквивалентное определение случайности можно дать в совсем иных терминах — с помощью понятия энтропии (или, как иногда говорят, сложности) конечного объекта.

Каждому слову x в алфавите $\{0, 1\}$ можно сопоставить некоторое натуральное число, называемое его монотонной энтропией и обозначаемое $km(x)$ (определение см. в § 3 цитированной статьи Вьюгина [10, с. 34]). Поскольку здесь мы не рассматриваем других видов энтропии, слово «монотонная» мы будем опускать. Пусть α — бесконечная последовательность 0 и 1; для каждого ее конечного начала x рассмотрим разницу $l(x) - km(x)$ между его длиной и энтропией. Если эти числа ограничены в совокупности (при фиксированной α и при всех x), то α называется случайной. Оказывается, что это определение эквивалентно определению случайности по Мартин-Лёфу (теорема Л. А. Левина, доказательство см. в [10, теорема 3.2, с. 36]). Таким образом, случайными по Мартин-Лёфу оказываются те последовательности 0 и 1, для которых энтропия начального отрезка длины n примерно равна n (отличается от n на ограниченную функцию).

Сказанное позволяет, по мнению автора, считать определение Мартин-Лёфа «истинным» определением случайности (если вопрос о таковом вообще осмыслен). Как мы увидим в следующем параграфе, случайные по Мартин-Лёфу последовательности случайны и по Мизесу — Колмогорову — Лавлэнду (и тем более по Мизесу — Чёрчу — Дэли и Мизесу — Чёрчу).

Колмогоров в своей статье [11] пишет, что существуют случайные в смысле Мизеса — Колмогорова — Лавлэнда последовательности, энтропия начальных отрезков длины n которых равна $O(\log_2 n)$*.

Доказательство этого утверждения не опубликовано, однако частный случай случайных по Мизесу — Чёрчу и Мизесу — Чёрчу — Дэли последовательностей рассмотрен в статье Дэли [6]. Из доказанных в этой статье теорем легко следуют такие утверждения:

1. Существует случайная по Мизесу — Чёрчу последовательность, энтропия начальных отрезков длины n которой не превосходит $C_1 \log_2 n + C_2$ (при подходящих C_1 и C_2).

2. Существует случайная по Мизесу — Чёрчу — Дэли последовательность, энтропия начальных отрезков дли-

* Колмогоров использует другой вид энтропии, но с точностью $O(\log n)$ он совпадает с нашим.

ны n которой не превосходит $C_1(\log_2\log_2 n)\cdot\log_2 n+C_2$ (при подходящих C_1 и C_2).

Мы не приводим оригинальных формулировок Дэли, так как они используют другой вид энтропии; их можно прочесть в [6, с. 87, теорема 2.1 и с. 89, теорема 2.3]. В этой статье доказано также, что существуют последовательности, случайные по Мизесу — Чёрчу и не случайные по Мизесу — Чёрчу — Дэли.

Таким образом, в последовательности включений (случайные по Мартин-Лёфу последовательности) $\subset$ (случайные по Мизесу — Колмогорову — Лавлэнду последовательности) $\subset$ (случайные по Мизесу — Чёрчу — Дэли последовательности) $\subset$ (случайные по Мизесу — Чёрчу последовательности) все включения строгие: для первого это следует из упомянутого результата Колмогорова, для второго — из существования примера Лавлэнда, точнее, его аналога для случайных по Мизесу — Чёрчу — Дэли последовательностей (см. § 5); строгость третьего включения только что отмечалась.

Теперь мы покажем, как можно модифицировать определение случайности по схеме Мизеса, получив определение, равносильное определению Мартин-Лефа. После этого станет очевидным также, что всякая случайная по Мартин-Лефу последовательность случайна и по Мизесу — Колмогорову — Лавлэнду и, следовательно, случайные по Мизесу — Колмогорову — Лавлэнду последовательности существуют и, более того, образуют множество полной меры (что оставалось недоказанным).

§ 9. КАК ПОЛУЧИТЬ В РАМКАХ ЧАСТОТНОГО ПОДХОДА «ИСТИННОЕ» ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОСТИ

Мы хотим показать, что имеется естественное (на наш взгляд) определение понятия допустимого правила выбора, которое приводит к определению случайности [13], эквивалентному определению Мартин-Лефа.

Наша основная идея состоит в том, что в рассмотренных выше определениях понятие допустимого правила чересчур конкретизировалось, связываясь с какой-то фиксированной схемой выбора (чуть менее общей у

Черча и чуть более общей у Колмогорова и Лавлэнда). Мы же хотим посмотреть на вопрос более абстрактно. Что есть правило выбора? Очевидно, отображение, сопоставляющее каждой последовательности нулей и единиц некоторую другую последовательность нулей и единиц. Каким требованиям должно удовлетворять это отображение? Оно должно быть непрерывно: если, например, в применении к последовательности α оно дает последовательность, седьмой член которой равен 1, то это должно определяться **к о н е ч н ы м** числом членов последовательности α, т. е. должно существовать такое конечное начало x последовательности α, что в применении к любой последовательности, начинающейся на x, наше правило дает последовательность, седьмой член которой равен 1. (Точное определение непрерывности см. ниже.) Кроме того, правило выбора должно быть в каком-то смысле вычислимым.

Примеры. 1. Отображение

$$F:\alpha \mapsto \begin{cases} \alpha, \text{ если в } \alpha \text{ бесконечное число нулей,} \\ 111\ldots, \text{ если в } \alpha \text{ конечное число нулей} \end{cases}$$

не является непрерывным.

2. Отображение F, сопоставляющее каждой последовательности последовательность из одних нулей, непрерывно.

Можно ли при определении правила выбора ограничиться лишь указанными требованиями? Нет, ведь ясно, что отображение из примера 2 нас не устраивает. Еще одно, последнее, требование, которое мы наложим на допустимое правило выбора F, состоит в следующем:

в е р о я т н о с т ь т о г о, ч т о $F(\alpha)$ н а ч и н а е т с я н а д а н н о е к о н е ч н о е с л о в о и з n н у л е й и е д и н и ц, н е п р е в о с х о д и т 2^{-n}. (Под упомянутой вероятностью мы подразумеваем меру в Ω множества, элементами которого являются все те последовательности α, для которых $F(\alpha)$ начинается на данное конечное слово.)

Отображение из примера 2 не удовлетворяет, разумеется, этому требованию: вероятность того, что $F(\alpha)$ начинается на 0, равна 1.

Перейдем теперь к точным определениям. Через Ω^* мы обозначим множество всех конечных и бесконечных последовательностей нулей и единиц. Через $x \leqslant y$ мы будем обозначать утверждение «x является началом y» (x, $y \in \Omega^*$). Введем в Ω^* топологию, объявив базовыми открытыми множествами все множества $\Gamma_x = \{y \mid x \leqslant y\}$ при всех **конечных** x. Нетрудно описать все непрерывные в этой топологии отображения из Ω^* в Ω^*.

Лемма. Отображение $F : \Omega^* \to \Omega^*$ непрерывно тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

(1) $x \leqslant y \Rightarrow F(x) \leqslant F(y)$;

(2) если y_0 — конечное начало $F(x)$, то существует такое конечное начало x_0 последовательности x, что $y_0 \leqslant F(x_0)$.

Условие (2) можно прочесть так: если $F(x)$ начинается на y_0, то уже некоторое конечное начало x_0 последовательности x это гарантирует.

Доказательство этой леммы просто и предоставляется читателю. ■

Непрерывное отображение $F : \Omega^* \to \Omega^*$ называется **вычислимым**, если множество тех пар $\langle x_0, y_0 \rangle$ конечных последовательностей, для которых $y_0 \leqslant F(x_0)$, перечислимо.

Назовем непрерывное отображение $F : \Omega^* \to \Omega^*$ **регулярным**, если для каждой конечной последовательности y_0 нулей и единиц мера множества $\{\omega \in \Omega \mid y_0 \leqslant F(\omega)\}$ не превосходит $2^{-l(y_0)}$ ($l(y_0)$ — длина y_0). (Заметим, что это множество является борелевским и, следовательно, измеримым подмножеством Ω, так как F непрерывно.)

Допустимым правилом выбора назовем ограничение на Ω некоторого вычислимого непрерывного регулярного отображения.

Заметим, что, в отличие от определений Черча и Колмогорова — Лавлэнда, мы можем, применяя допустимое правило выбора, получить последовательность, не являющуюся подпоследовательностью исходной. Например, допустимо правило «изменить все члены с четными номерами на противоположные» (ср. модификацию определения Черча, в которой разрешается ставить и на ноль, и на единицу).

Дав определение допустимого правила выбора, мы — согласно общей схеме § 2 — получаем определение случайности. При этом мы достигаем следующего:

Теорема. 1. Правила выбора, допустимые по Колмогорову — Лавлэнду, допустимы и в нашем смысле.

2. Определенный нами класс правил выбора замкнут относительно композиции (выполнено свойство (K) из § 3).

3. Последовательности, случайные в смысле введенного определения, — в точности случайные по Мартин-Лефу последовательности.

Из утверждений 1 и 3 сразу вытекает, что всякая случайная по Мартин-Лефу последовательность случайна и по Колмогорову — Лавлэнду, и, следовательно, почти все последовательности случайны по Колмогорову — Лавлэнду (это мы обещали доказать).

Доказательство теоремы.

Лемма 1. Если F — непрерывное регулярное отображение, A — борелевское подмножество Ω, то

$$\mu(\{x\in\Omega\,|\,F(x)\in A\})\,\mu(A).$$

Доказательство леммы. Так как A измеримо, то его мера совпадает с внешней мерой, и, следовательно, для всякого $\varepsilon>0$ существует такое счетное множество S конечных последовательностей, что $A\subset\cup\{\Gamma_s\,|\,s\in S\}$ (напомним, что через Γ_s обозначается множество всех продолжений s) и $\Sigma\{2^{-l(s)}\,|\,s\in S\}<\mu(A)+\varepsilon$. Любой элемент $\omega\in\Omega$, для которого $F(\omega)\in A$, попадает в прообраз одного из множеств Γ_s при $s\in S$, а мера прообраза Γ_s не превосходит $2^{-l(s)}$, ибо F регулярно. Пользуясь счетной аддитивностью меры и произвольностью ε, получаем требуемое. ■

Следствие леммы 1. Если F — правило выбора, A — нулевое множество, то и $\{\omega\in\Omega\,|\,F(\omega)\in A\}$ — нулевое множество.

Естественная конструктивизация приведенных рассуждений показывает, что если в следствии в качестве A взять конструктивно нулевое множество, то и $\{\omega\in\Omega\,|\,F(\omega)\in A\}$ будет конструктивно нулевым (напомним: F — вычислимо!).

Лемма 2. Множество последовательностей $\omega\in\Omega$, не удовлетворяющих закону больших чисел (т. е. тех, для которых предела частот нет или он не равен 1/2), является конструктивно нулевым.

Эта лемма относится к теории вероятностей, и ее вполне элементарное доказательство, использующее, например, оценку биномиальных коэффициентов по формуле Стирлинга, мы опускаем. Ср. книгу Кнута [9, с. 183].

Из леммы 2 и следствия леммы 1 (точнее, его конструктивизации) вытекает, что для всякого правила выбора множество тех последовательностей, которые после применения этого правила не удовлетворяют закону больших чисел, является конструктивно нулевым. Значит, случайные по Мартин-Лефу последовательности (не лежащие ни в каком конструктивно нулевом множестве) случайны и в нашем смысле. Утверждение 3 теоремы наполовину доказано.

Докажем теперь утверждение 2. Пусть F, $G:\Omega^*\to\Omega^*$ — два допустимых правила выбора. (Мы поступаем не вполне корректно, отождествляя правило выбора с тем вычислимым непрерывным регулярным отображением, ограничением которого оно является, но эту вольность речи легко оправдать.) Рассмотрим композицию $G\circ F$. Непрерывность ее очевидна. Вычислимость ее следует из того, что для конечных x_0 и z_0 имеет место эквивалентность

$$(z_0\leqslant G(F(x_0)))\Leftrightarrow(\exists y_0\in\Omega^*\setminus\Omega)((z_0\leqslant G(y_0))\ \&(y_0\leqslant F(x_0))).$$

Осталось проверить, что $G\circ F$ регулярно. Пусть x — конечная последовательность. Прообраз $G^{-1}(\Gamma_x)$ есть открытое подмножество Ω^* и, следовательно, представим в виде $\cup\{\Gamma_s|s\in S\}$, где S — некоторое множество конечных последовательностей. Множества Γ_s можно считать непересекающимися (выкинем те $s\in S$, которые являются собственными продолжениями других элементов S). Так как G регулярно, то $\Sigma\{2^{-l(s)}|s\in S\}\leqslant 2^{-l(x)}$. Прообраз x при $G\circ F$ есть объединение множеств вида $F^{-1}(\Gamma_s)$ при $s\in S$. Остается воспользоваться тем, что F регулярно. Утверждение 2 доказано.

Перейдем к доказательству утверждения 1. Непрерывность и вычислимость допустимого по Колмогорову — Лавлэнду правила обосновать легко. То, что оно регулярно, следует из такой леммы.

Лемма 3. Пусть F — допустимое по Колмогорову — Лавлэнду правило. Обозначим через $p(x)$ меру множества

$\{\omega \in \Omega \mid x < F(\omega)\}$. Тогда

(А) $p(\Lambda)=1$;

(Б) $p(x0)+p(x1) \leqslant p(x)$;

(В) $p(x0)=p(x1)$.

Из утверждений (А) — (В) индукцией по длине x легко вывести, что $p(x) \leqslant 2^{-l(x)}$. Осталось доказать лемму 3.

Доказательство леммы 3. Утверждения (А) и (Б) очевидны для любого отображения F (отметим, что равенство в (Б) достигается, если мера множества тех ω, образ которых в точности равен x, равна 0). Докажем утверждение (В). Пусть длина x равна n. Рассмотрим, как описанная в § 6 при определении допустимого по Колмогорову — Лавлэнду правила игра протекает до того момента, когда игрок в $(n+1)$-ый раз скажет «играю» и приготовится перевернуть карточку (на которой написано число, которое станет $(n+1)$-ым членом результирующей последовательности). Тут возможны разные варианты, различающиеся тем, какие карточки переворачивались перед этим и что на них оказалось написано. Всего вариантов конечное или счетное число; мы рассмотрим те, в которых результирующая последовательность начинается на x. Каждому из них соответствует множество тех последовательностей, на которых этот вариант осуществляется. Каждое из этих непересекающихся множеств делится на две равные по мере части: в одну из них входят последовательности, в которых на очередной переворачиваемой карточке нуль, в другую — те, в которых единица. Части первого типа дают в сумме множество тех последовательностей, образы которых начинаются на $x0$; части второго типа — множество тех последовательностей, образы которых начинаются на $x1$. Поэтому $p(x0)=p(x1)$. Лемма 3, а с ней и утверждение 1, доказаны. ■

Осталось доказать половину утверждения 3; именно, мы должны, предположив, что последовательность ω лежит в конструктивно нулевом множестве A, построить допустимое правило выбора, переводящее ω в бесконечную последовательность ω', для которой не выполнен закон больших чисел. На самом деле в качестве ω' будет фигурировать последовательность из одних нулей.

Итак, пусть множество A — конструктивно нулевое. Тогда для любого n существует перечислимое множество P_n конечных последовательностей нулей и единиц, для которого $A \subset \cup\{\Gamma_x | x \in P_n\}$ и $\Sigma\,\{2^{-l(x)} | x \in P_n\} \leqslant 2^{-n}$. Можно считать, что всякая последовательность из P_{n+1} является продолжением некоторой последовательности из P_n (остальную часть P_{n+1} можно отбросить). Теперь определим правило выбора, положив $F(\omega) = 000\ldots000$ (k раз), где k — наибольшее число, для которого существует $x \in P_k$, являющийся началом ω. Возможно, $k = \infty$, если ω принадлежит $\cup\{\Gamma_x | x \in P_n\}$ при любом n. Для таких ω — в частности, для всех ω из A — результатом применения правила будет бесконечная последовательность из одних нулей. Нетрудно проверить, что описанное правило действительно является ограничением на Ω вычислимого непрерывного отображения из Ω^* в Ω^*. Регулярность его также ясна: ведь на $000\ldots000$ (n раз) начинаются образы тех последовательностей, которые лежат в $\cup\{\Gamma_x | x \in P_n\}$, а мера этого множества, по условию, не превосходит 2^{-n}.

Доказательство теоремы 3 окончено. ■

Заметим, что, как ясно из доказательства, в качестве основного можно взять любое свойство, которому не удовлетворяет последовательность из одних нулей (или любая другая конкретная вычислимая последовательность) и которое является конструктивным законом теории вероятностей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы увидели, как можно с помощью теории алгоритмов по-новому подойти к вопросу о связи математической теории вероятностей — раздела теории меры — с ее практическими применениями.

Желая сформулировать этот новый взгляд в одной фразе, можно сказать так: вместо тезиса «события с нулевой вероятностью не происходят» выдвигается тезис «события, которым соответствуют конструктивно нулевые множества, не происходят».

Для конечного числа испытаний аналогичная замена выглядит так: вместо тезиса «события, вероятность которых ничтожно мала, не происходят» выдвигается тезис «события, просто описываемые и имеющие ничтожно малую вероятность, не происходят». Более подробно можно сказать так: статистическую гипотезу нужно отбрасывать не во всех случаях, в которых вычисленная на ее основе вероятность происшедшего события ничтожно мала, а лишь тогда, когда вычисленная на ее основе вероятность просто описываемого происшедшего события мала. В рассмотренном во Введении примере из Пойа событие «появление пяти шестерок» имеет такую же вероятность, что и событие появление 3, 1, 3, 2, 5, но описывается гораздо проще, чем, возможно, и объясняется различное отношение к этим событиям.

Проиллюстрируем сказанное еще одним примером из книги Пойа, который пишет:

«... Из 315672 попыток выбросить игральными костями пять или шесть очков было 106 602 случая успеха... Если бы все бросавшиеся кости были честными, то вероятность успеха была бы равна 1/3. Поэтому мы должны были ожидать приблизительно 105 224 успеха.... Число, полученное из наблюдений, отличается от ожидаемого числа на 1378 единиц... Говорит ли это отклонение за или против гипотезы честных костей?... Вероятность такого отклонения высока или низка? Последний вопрос, по-видимому, имеет смысл. Однако мы нуждаемся еще в разумном истолковании короткого, но важного слова «такое». Мы отвергнем статистическую гипотезу, если вероятность, вычислением которой мы интересуемся, окажется низкой. Однако вероятность того, что отклонение будет равно 1378 единиц во всяком случае очень мала — была бы очень мала даже вероятность того, чтобы отклонение точно равнялось 0. Поэтому мы должны принять в расчет все отклонения, по абсолютной величине не меньшие, чем наблюдаемое отклонение 1378» [1, с. 329].

Как мы видим, Пойа ясно указывает как на общий принцип «отвергай статистическую гипотезу, если вычисленная на ее основе вероятность происшедшего события мала», так и на то, что этот принцип можно применять не ко всяким событиям*. Но вопрос о том, чем отличаются те события, к которым его можно применять, от тех, к которым его применять нельзя, так и остается неясным. Приведенный выше вариант ответа, предлагаемый алгоритмической теорией вероятностей, кажется нам если и не вполне удовлетворительным, то по крайней мере заслуживающим внимания.

Этим замечанием мы закончим нашу статью, в которой мы пытались рассказать о математических понятиях и утверждениях, относящихся к вопросу о «причинах применимости математической теории вероятностей» (см. статью А. Н. Колмогорова в настоящем сборнике, с. 3). Впрочем вопрос этот принадлежит скорее не математике, а философии науки — и, следовательно, им следует заниматься специалистам в этой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пойа Дж. Математика и правдоподобные рассуждения. Пер. с англ. — М.: Иностр. лит-ра, 1957.
2. Мизес Р. Вероятность и статистика. — М. — Л.: Гос. изд-во, 1930. Пер. с нем.: Mises R. von Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Wahrheit. — Wien: J. Springer, 1928.
3. Church A. On the concept of a random sequence. — Bulletin of Amer. Math. Society, 1940, **46**, № 2, p. 130—135.
4. Якобс К. Машины Тьюринга и случайные последовательности. Пер. с нем. — В кн.: Машины Тьюринга и рекурсивные функции. М.: Мир, 1972, с. 183—215.
5. Loveland D. A new interpretation of the von Mises' concept of random sequence. — Zeitschrift für Math. Logik und Grundlagen der Math., 1966, Bd. 12, H. 4, S. 279—294.
6. Daley R. P. Minimal-Program Complexity of Psendo-Recursive and Psendo-Random Sequences. — Mathematical Systems Theory, 1975, **9**, № 1, p. 83—94.
7. Колмогоров А. Н. О таблицах случайных чисел. — Семиотика и информатика, 1981, вып. 18. Пер. с англ.: Kolmogorov A. N. On Tables of Random numbers. — Sankhya. The Indian Journal of Statistics. Ser. A, 1963, **25**, part. 4, p. 369—376.
8. Loveland D. The Kleene hierarchy classification of recursively random sequences. — Transactions of Amer. Math. Society, 1966. **125**, № 3, p. 497—510.
9. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. Получисленные алгоритмы. Пер. с англ. — М.: Мир, 1977. — 724 с.

* Ср. Реньи [12, с. 153—155].

10. Вьюгин В. В. Алгоритмическая энтропия (сложность) конечных объектов и ее применение к определению случайности и количества информации. — Семиотика и информатика, 1981, вып. 16, с. 14—43.
11. Колмогоров А. Н. К логическим основам теории информации и теории вероятностей. — Проблемы передачи информации, 1969, 5, вып. 3, с. 3—7.
12. Реньи А. Письма о вероятности. Пер. с венгерского. — В кн.: Реньи А. Трилогия о математике. М.: Мир, 1980, с. 121—198.
13. Schnorr C. P. Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit. Lectur Notes in Mathematics. — Berlin: Upringer-Verlag, 1971.