Représentation de Connaisssances et Raisonnements à Base de Graphes $v0.2$

Jean-François Baget & Marie-Laure Mugnier

5 novembre 2010

1 Faits et Graphes

Notions fondamentales, notes de cours, à compléter avec vos notes. On s'intéresse à un fragment de la logique du premier ordre (FOL, First Order Logic) : le fragment existentiel, positif, conjonctif, sans symbole fonctionnel, noté FOL($\wedge, \exists$).

1.1 Syntaxe

Definition 1 *[Vocabulaire] Un* vocabulaire *est un triplet $\mathcal{V} = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \alpha)$ où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ sont deux ensembles disjoints, respectivement de* noms de prédicats *et de* constantes*, et α associe à chaque nom de prédicat un nombre entier non nul : son* arité*.*

Nous considérons également un ensemble infini $\mathcal{X}$ de *variables*, disjoint de $\mathcal{P}$ comme de $\mathcal{C}$. L'ensemble $\mathcal{T} = \mathcal{C} \cup \mathcal{X}$ est celui des *termes*.

Definition 2 *[Atomes, faits] Soit $\mathcal{V} = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \alpha)$ un vocabulaire. Un* atome *$p(t_1, \ldots, t_k)$ sur le vocabulaire $\mathcal{V}$ est une formule définie par un prédicat p d'arité k et un tuple de k termes $(t_1, \ldots, t_k)$. Une* conjonction *sur $\mathcal{V}$ est une formule $C_1 \wedge \ldots \wedge C_p \wedge \ldots$ où les C_i sont des atomes sur $\mathcal{V}$. Un* fait *sur $\mathcal{V}$ est la fermeture existentielle $\exists x_1 \ldots \exists x_q \ldots C_1 \wedge \ldots \wedge C_p \wedge \ldots$ d'une conjonction sur $\mathcal{V}$ (où les x_i sont les variables apparaissant dans la conjonction).*

On ne s'interdit pas qu'une conjonction ou un fait soient infinis (c'est même utile pour les démonstrations). En d'autres termes, un fait est une formule logique fermée (i.e. chaque variable de la formule est dans la portée d'un quantificateur) existentiellement (ce quantificateur est existentiel), positive et conjonctive. On peut adopter sans ambiguïté une notation ensembliste $\{A_1, \ldots, A_p, \ldots\}$ en ne notant que les atomes qui définissent ces formules. Petit bémol, les formules $\exists x p(x) \wedge p(x)$ et $\exists x p(x)$ se codent toutes les deux par le même ensemble $\{p(x)\}$, mais ce n'est pas grave car ces deux formules sont équivalentes.

1.2 Sémantique

L'interprétation d'un vocabulaire est le codage d'un monde possible, qui donne une signification aux symboles du vocabulaire $\mathcal{V}$. Une formule construite sur $\mathcal{V}$ pourra être vraie ou fausse dans ce monde.

Definition 3 *[Interprétation d'un vocabulaire] Soit $\mathcal{V} = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \alpha)$ un vocabulaire. Une* interprétation *de $\mathcal{V}$ est une paire $I = (\Delta_I, .^I)$ où Δ_I est un ensemble non vide (pouvant être infini) appelé le* domaine d'interprétation *et la* fonction d'interprétation *interprète chaque élément de $\mathcal{V}$ de la façon suivante :*
- *$\forall c \in \mathcal{C}$, $c^I \in \Delta_I$ (l'interprétation d'un terme est un élément du domaine d'interprétation) ;*
- *$\forall p \in \mathcal{P}$, avec $\alpha(p) = k$, $p^I \in 2^{(\Delta_I^k)}$ (l'interprétation d'un prédivat est l'ensemble des k-tuples sur le domaine qui le vérifient).*

Cette définition d'une interprétation est standard en logique du premier ordre. La notion de modèle permet de définir à quelles conditions une formule F est vraie dans une interprétation I donnée (on dit que I est un modèle de F et on note $I \models F$). Dans le fragment de la logique qui nous concerne, la définition usuelle peut être réécrite comme le montre la propriété suivante (sans démonstration).

Property 1 *[Modèle d'une formule] Soit F un fait défini sur un vocabulaire $\mathcal{V} = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \alpha)$, et $I = (\Delta_I, .^I)$ une interprétation de $\mathcal{V}$. Alors $I \models F$ si et seulement si il existe une application $\omega : termes(F) \rightarrow \Delta_I$ telle que :*
- *$\forall c \in constantes(F)$, $\omega(c) = c^I$ (ω associe à toute constante son interprétation) ;*
- *$\forall p(t_1, \ldots, t_k) \in F$, $(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_k)) \in p^I$ (l'interprétation des arguments d'un prédicat appartient à l'interprétation du prédicat).*

Une telle application est dite un témoin *de F dans I.*

Cette notion de modèle nous permet de définir de façon usuelle les notions de satisfiabilité, validité, est conséquence sémantique.

Definition 4 *[Satisfiabilité, validité] Soit F un fait défini sur $\mathcal{V}$. Alors :*
- *F est* satisfiable *si et seulement si il existe une interprétation I de $\mathcal{V}$ qui est un modèle de F ;*
- *F est* valide *si et seulement si toute interprétation I de $\mathcal{V}$ est un modèle de F.*

Definition 5 *[Conséquence sémantique] Soient F et Q deux faits définis sur $\mathcal{V}$. On dit que Q est* conséquence sémantique *de F et on note $F \vdash Q$ si et seulement toute interprétation de $\mathcal{V}$ qui est un modèle de F est également un modèle de Q.*

1.3 Mécanismes de calcul

Nous nous attachons maintenant à définir des mécanismes de calcul pour satisfiabilité, validité et conséquence sémantique.

1.3.1 Calculs triviaux : satisfiabilité et validité

Property 2 *Le seul fait valide est le fait vide $\emptyset$.*

Proof: On dit qu'une interprétation $I = (\Delta_I, .^I)$ de $\mathcal{V} = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \alpha)$ est *vide* lorsque $\forall p \in \mathcal{P}$, $p^I = \emptyset$. Voir que si F est une formule non vide, alors toute interprétation vide ne peut pas être un modèle de F, d'où F n'est pas valide.

De la même façon, si $F = \emptyset$, toute interprétation est un modèle de F (par vacuité). $\square$

Property 3 *Tout fait est satisfiable.*

Nous proposons deux démonstrations pour cette propriété. La deuxième (basée sur le modèle isomorphe) est la plus intéressante dans l'immédiat.

Proof: Soit $\mathcal{V} = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \alpha)$ un vocabulaire. Nous appelons *interprétation universelle* de $\mathcal{V}$ une interpretation $U_{\mathcal{V}} = (\Delta_U, .^U)$ définie par :
- $\Delta_U = \mathcal{C} \cup v$ où v n'est pas un élément de $\mathcal{C}$;
- $\forall c \in \mathcal{C}$, $c^U = c$;
- $\forall p \in \mathcal{P}$, $p^U = \Delta_U^{\alpha(p)}$ (tout prédicat p est vérifié par chaque $\alpha(p)$-tuple d'éléments du domaine).

Voir que pour toute formule F définie sur $\mathcal{V}$, l'interprétation universelle de $\mathcal{V}$ est un modèle de F, qui est donc satisfiable. $\square$

Proof: Soit F un fait. Nous appelons *modèle isomorphe* de F une interprétation $I_F = (\Delta_I, .^I)$ construite de la façon suivante :
- $\Delta_I = \mathit{termes}(F)$;
- $\forall c \in \mathit{constantes}(F)$, $c^I = c$;
- $p(t_1, \ldots, t_k) \in F$ si et seulement si $(t_1, \ldots, t_k) \in p^I$.

Voir que l'identité est un témoin de F dans son modèle isomorphe (ce qui justifie le nom de modèle), F est donc satisfiable. $\square$

1.3.2 Codage des faits et des interprétations par des graphes

Afin d'obtenir un mécanisme de calcul pour la conséquence sémantique, nous allons maintenant coder les interprétations comme les faits par des graphes. Cette vision est importante d'un point de vue algorithmique (possibilité d'importer des résultats venus de la théorie des graphes), comme d'un point de vue "interface utilisateur" (lisibilité des données).

Definition 6 *[Graphe sur un vocabulaire] Soit $\mathcal{V} = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \alpha)$ un vocabulaire. Un* graphe sur *$\mathcal{V}$ est un tuple $G = (S, H, \gamma, \epsilon)$ où S et H sont deux ensembles, respectivement de* sommets *et d'*hyperarcs *(parfois appelés* entités *et* relations*), $\gamma : H \to S^+$ associe à chaque hyperarcs un tuple de sommets appelés ses arguments, et ϵ* étiquette *chaque sommet et chaque hyperarc de la façon suivante :*
- *$\forall s \in S$, $\epsilon(s)$ est soit une constante de $\mathcal{C}$ soit une variable de $\mathcal{X}$;*
- *$\forall h \in H$, $\epsilon(h)$ est un nom de prédicat de $\mathcal{P}$ tel que $\alpha(\epsilon(h)) = |\gamma(h)|$ (le nombre de voisins de l'hyperarc est déterminé par l'arité de son étiquette).*

Nous souhaitons maintenant "coder" par un graphe les faits comme les interprétations.

Definition 7 *[Graphe d'un fait] Soit F un fait. Le graphe de F (noté $gr(F)$) est un graphe (S, H, γ, ϵ) défini de la façon suivante :*

- *$S = termes(F)$;*
- *$H = atomes(F)$;*
- *$\forall h = p(t_1, \ldots, t_k) \in H$, $\gamma(h) = (t_1, \ldots, t_k)$;*
- *$\forall s \in S, \epsilon(s) = s$;*
- *$\forall h = p(t_1, \ldots, t_k) \in H$, $\epsilon(h) = p$.*

Remarquons que le graphe d'un fait est un codage pour ce fait. On pourrait retrouver le fait initial à partir de son graphe, par une opération que nous noterons gr^{-1}.

Nous avons un petit problème pour coder les interprétations par des graphes. En effet, un même élément du domaine peut interpréter plusieurs constantes. Il faudrait donc coder ces éléments par des sommets étiquettés par plusieurs constantes, ce qui ne correspond pas à notre définition d'un graphe. Afin d'éviter ceci (et des preuves plus complexes), nous allons adopter l'*hypothèse du nom unique* (UNA, pour *unique name assumption*).

Definition 8 *[UNA] Une interprétation $I = (\Delta_I, .^I)$ de $\mathcal{V} = (\mathcal{C}, \mathcal{P}, \alpha)$ satisfait l'hypothèse du nom unique si et seulement si $\forall c \neq c' \in \mathcal{C}$, $c^I \neq c'^I$ (deux constantes différentes ont une interprétation différente).*

Nous considérerons par la suite que toutes les interprétations satisfont cette hypothèse, une contrainte courante en logique. Ceci va nous permettre de coder facilement les interprétations par des graphes.

Definition 9 *[Graphe d'une interprétation] Soit $I = (\Delta_I, .^I)$ une interprétation d'un vocabulaire $\mathcal{V} = (\mathcal{C}, \mathcal{P}, \alpha)$. Le graphe de I (noté $gr(I)$) est un graphe (S, H, γ, ϵ) défini de la façon suivante :*

- *$S = \Delta_I$;*
- *$\forall p \in \mathcal{P}, \forall (t_1, \ldots, t_k) \in p^I$, H contient un hyperarc h avec $\gamma(h) = (t_1, \ldots, t_k)$ et $\epsilon(h) = p$;*
- *$\forall s \in S$, si $\exists c \in \mathcal{C}$ tel que $c^I = s$ (et dans ce cas, grace à l'UNA, c est unique), alors $\epsilon(s) = c$, sinon, chosiir pour $\epsilon(s)$ une variable de $\mathcal{X}$ distincte de toutes les autres variables étiquetant les sommets de $gr(I)$.*

Cette fois ci, nous avons presque un codage car nous choisissons les variables étiquettant les éléments du domaine qui n'interprètent pas les constantes. C'est donc un codage "à un renommage près des variables", mais ceci ne change pas la sémantique du graphe.

1.3.3 Conséquence sémantique et homomorphismes

Nous allons voir maintenant que l'opération de graphe qui traduit exactement la notion de conséquence sémantique est un *homomorphisme de graphes*.

Définitions préalables

Definition 10 *[Homomorphismes] Soient* $F = (S_F, H_F, \gamma_F, \epsilon_F)$ *et* $Q = (S_Q, H_Q, \gamma_Q, \epsilon_Q)$ *deux graphes sur un vocabulaire* $\mathcal{V} = (\mathcal{C}, \mathcal{P}, \alpha)$. *Un* homomorphisme *de* Q *dans* F *est une application* $\pi : S_Q \to S_F$ *qui conserve les constantes et les hyperarcs, c'est à dire :*

- $\forall s \in S_Q$, *si* $\epsilon(s) \in \mathcal{C}$, *alors* $\epsilon(s) = \epsilon(\pi(s))$ *;*
- $\forall h \in H_Q$, *avec* $\gamma(h) = (t_1, \ldots, t_k)$, *il existe un hyperarc* $h' \in H_F$ *avec* $\epsilon(h') = \epsilon(h)$ *et* $\gamma(h') = (\pi(t_1), \ldots, \pi(t_k))$.

Property 4 *[Composition] La composition de deux homomorphismes est un homomorphisme. En d'autres termes, si* π *est un homomorphisme de* F *dans* F', *et* π' *est un homomorphisme de* F' *dans* F'', *alors* $\pi' \circ \pi$ *est un homomorphisme de* F *dans* F'' *(avec* $\pi' \circ \pi$ *définie par :* $\forall s \in S_F, (\pi' \circ \pi)(s) = \pi'(\pi(s))$.

La preuve est immédiate, et laissée en exercice.

Nous nous intéresserons parfois à des homomorphismes particuliers : les isomorphismes. De façon intuitives, deux graphes sont isomorphes lorsqu'ils admettent la même représentation graphique.

Definition 11 *[Isomorphisme] Un* isomorphisme *est un homomorphisme injectif, surjectif, et fidèle.*

- injectif *:* $\forall s \neq s' \in S_Q$, $\pi(s) \neq \pi(s')$ *;*
- surjectif *:* $\forall s' \in S_F$, $\exists s \in S_Q$ *tel que* $\pi(s) = s'$ *;*
- fidèle *:* $\forall h' \in H_F$ *avec* $\gamma_F(h') = (t'_1, \ldots, t'_k)$, $\exists h \in H_Q$ *avec* $\gamma_Q(h) = (t_1, \ldots, t_k)$, $\epsilon(h) = \epsilon(h')$ *et* $\forall 1 \leq i \leq k$, $\pi(t_k) = t'_k$.

Property 5 *[Inverse] L'inverse d'un isomorphisme est un isomorphisme (en d'autres termes, si* π *est un isomorphisme de* Q *dans* F, *alors* π^{-1} *est un isomorphisme de* F *dans* Q, *où* π^{-1} *est définie par* $\pi^{-1}(s) = s'$ *ssi* $\pi(s') = s$*).*

La encore, la preuve est immédiate et est laissée en exercice.

Témoins et homomorphismes Les deux propriétés suivantes ont été montrées en cours. Leur preuve est immédiate, et ne nécessite qu'une réécriture à partir des définitions.

Property 6 *Soit* F *un fait sur* $\mathcal{V}$ *et* I *une interprétation de* $\mathcal{V}$. *Soit* ω *une application de termes*(F) *dans* Δ_I. *Alors* ω *est un témoin de* F *dans* I *si et seulement si* ω *est un homomorphisme de gr*(F) *dans gr*(I).

Property 7 *Soit* F *un fait sur* $\mathcal{V}$ *et* I *le modèle isomorphe de* F. *Alors l'identité est un isomorphisme de gr*(F) *dans gr*(I).

Théorème principal Nous pouvons maintenant énoncer et prouver le résultat principal de ce premier cours, qui justifie notre ambition de "faire de la logique avec des graphes" :

Theorem 1 *Soient F et Q deux faits sur un vocabulaire $\mathcal{V}$. Alors $F \vdash Q$ si et seulement si il existe un homomorphisme de $gr(Q)$ dans $gr(F)$.*

Proof: Nous prouvons successivement les deux sens de cette équivalence.

($\Rightarrow$) Si $F \vdash Q$, alors tous les modèles de F sont des modèles de Q (définition 5). En particulier, le modèle isomorphe I de F (voir preuve de la propriété 3) est un modèle de Q. Il y a un isomorphisme de $gr(F)$ fans $gr(I)$ (propriété 7), donc un isomorphisme π de $gr(I)$ dans $gr(F)$ (propriété 5) ; et il y a un homomorphisme π' de $gr(Q)$ dans $gr(I)$ (propriété 6). Donc $\pi \circ \pi'$ est un homomorphisme de $gr(Q)$ dans $gr(F)$ (propriété 4).

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe un homomorphisme π de $gr(Q)$ dans $gr(F)$. Montrons que tout modèle de F est un modèle de Q. Soit I un modèle quelconque de F. Alors il existe un homomorphisme π' de $gr(F)$ dans $gr(I)$ (propriété 6). Alors $\pi' \circ \pi$ est un homomorphisme de $gr(Q)$ dans $gr(I)$ (propriété 4). Donc I est un modèle de Q (propriété 6).

□

1.3.4 Complexité

Nous nous intéressons maintenant, pour calculer la déduction dans ce fragment particulier de la logique, au problème de décision suivant :
HOMOMORPHISME ?
Données : 2 graphes Q et F sur un vocabulaire $\mathcal{V}$.
Question : existe-t'il un homomorphisme de Q dans F ?

Property 8 HOMOMORPHISME ? *est un problème NP-complet.*

Proof: Pour prouver que HOMOMORPHISME ? est dans NP, nous avons besoin d'exhiber un certificat polynomial. C'est l'homomorphisme lui-même. Pour prouver qu'il est NP-complet, nous devons prouver qu'il existe un problème NP-complet Π et une transformation polynomiale τ des instances de Π en instances d'HOMOMORPHISME ? telle que la réponse à une instance P de Π soit OUI si et seulement si la réponse à $\tau(P)$ est OUI. Le problème de référence que nous avons vu en cours est k-COLORATION DE GRAPHE ?. La transformation τ que nous avons vue repose sur la propriété suivante : un graphe G admet une k-coloration si et seulement si il existe un homomorphisme de G dans K_k, le graphe complet à k sommets.

□

2 Règles

2.1 Syntaxe

Definition 12 *[Règle] Une* règle *sur un vocabulaire* $\mathcal{V} = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \alpha)$ *est une formule de la forme* $R = \forall x_1 \ldots \forall x_p (H \to (\exists y_1 \ldots \exists y_q C))$ *où* H *et* C *sont deux conjonctions sur* $\mathcal{V}$ *appelées respectivement* hypothèse *et* conclusion *de la règle (on note* $H = hyp(R)$ *et* $C = conc(R)$*), les* x_i *sont toutes les variables de* H*, et les* y_i *sont les variables de* C *qui ne sont pas dans* H*.*

On codera souvent une règle par la paire de conjonctions (H, C) (on note aussi $H \to C$), par une paire de graphes $(gr(H), gr(C))$, ou par un *graphe bicoloré* $grc(R)$. Un graphe bicoloré est tout simplement une paire (G, κ) où $G = (S, H, \gamma, \epsilon)$ est un graphe et $\kappa : S \cup H \to \{0, 1\}$ associe à chaque sommet et chaque hyperarc de G une des deux couleurs 0 ou 1. Le graphe bicoloré $grc(H \to C)$ est obtenu de la façon suivante :

- construire le graphe $gr(H \cup C)$;
- si s est un sommet de $gr(H \cup C)$ tel que $\epsilon(s)$ est un terme de H, alors $\kappa(s) = 0$;
- si h est un hyperarc de $gr(H \cup C)$ associé à un atome de H, alors $\kappa(h) = 0$;
- pour tout autre sommet ou hyperarc x, $\kappa(x) = 1$.

On appelle *frontière* de la règle $R = (H, C)$ l'ensemble des variables communes à H et C. Dans la représentation par graphe bicoloré, ce sont les sommets variables incidents à des hyperarcs de couleurs différentes.

2.2 Sémantique

Comme nous l'avions fait pour la propriété 1 sur les modèles des faits, la propriété suivante n'est qu'une réécriture pour des formules particulières de la notion de modèle telle qu'elle est définie en logique du premier ordre.

Property 9 *[Modèle d'une règle] Soit* $R = H \to C$ *une règle définie sur un vocabulaire* $\mathcal{V}$ *et* $I = (\Delta_I, .^I)$ *une interprétation de* $\mathcal{V}$*. Alors* $I \models R$ *si et seulement si pour tout témoin* ω *de* H *dans* I*, il existe un témoin* ω *de* C *dans* I *tel que pour toute variable* x *de la frontière de* R*,* $\omega(x) = \omega'(x)$*.*

Cette propriété se traduit immédiatement par une opération de graphes colorés :

Property 10 *Soit* $R = H \to C$ *une règle définie sur un vocabulaire* $\mathcal{V}$ *et* I *une interprétation de* $\mathcal{V}$*. Alors* $I \models R$ *si et seulement si tout homomorphisme de* $gr(H)$ *dans* $gr(I)$ *s'étend à un homomorphisme de* $gr(H \cup C)$ *dans* $gr(I)$

2.3 Mécanismes de calcul

2.3.1 Substitutions

Definition 13 *[Substitution] Soit* $\mathcal{V} = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \alpha)$ *un vocabulaire. Une* substitution *sur* $\mathcal{V}$ *est une application* $\sigma : X \to \mathcal{X} \cup \mathcal{C}$ *où* $X \subseteq \mathcal{X}$ *est un ensemble de* *variables.*

Si G est une conjonction sur $\mathcal{V} = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \alpha)$ et $\sigma : X \rightarrow \mathcal{X} \cup \mathcal{C}$ est une substitution sur $\mathcal{V}$, alors on note $\sigma(G)$ la conjonction obtenue en remplaçant chaque occurence d'une variable $x \in X$ dans G par $\sigma(x)$. Si G est un fait, alors $\sigma(G)$ est la fermeture existentielle de $\sigma(conj(G))$ où $conj(G)$ est la conjonction associée à G.

La notion de substitution est très proche de celle d'homomorphisme, en effet :

Property 11 *Soient Q et F deux faits. Alors il existe un homomorphisme π de $gr(Q)$ dans $gr(F)$ ssi il existe une substitution σ telle que $\sigma(Q) = F$.*

Proof:

□

Par un léger abus de notation, nous pourrons appeler également homomorphisme de Q dans F une substitution σ telle que $\sigma(Q) = F$.

2.3.2 Satisfiabilité et validité

Intéressons nous maintenant à la satisfiabilité et à la validité d'une règle.

Property 12 *Toute règle est satisfiable.*

Proof: Soit R une règle sur $\mathcal{V}$. Voir que l'interprétation universelle $U_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ est un modèle de R. □

Property 13 *Une règle $R = (H, C)$ est valide si et seulement il existe un homomorphisme π de C dans H tel que pour tout sommet s de C tel que $\epsilon(s)$ appartient à la frontière de R, $\epsilon(\pi(s)) = \epsilon(s)$.*

Proof: Nous montrons successivement les deux sens de l'équivalence.

□

Property 14 VALIDITÉ RÈGLE ? *est un problème NP-complet.*

2.3.3 Conséquence sémantique

Nous considérons maintenant une base de connaissances composée d'un fait F et d'un ensemble de règles $\mathcal{R}$. Nous voulons maintenant savoir si un fait Q (la requête) se déduit logiquement de F et de $\mathcal{R}$, c.à.d. si toute interprétation qui est un modèle à la fois de F et de chaque règle $R \in \mathcal{R}$ est également un modèle de Q. Nous décrivons par la suite un mécanisme de calcul fonctionnant en marche avant. Notez qu'on utilise ici une vision "faits = ensemble d'atomes". Réécrire les définitions à venir sous la forme "faits = graphes" pourrait être un bon exercice...

Application de règle et saturation Une notion importante pour ce qui suit est celle de *substitution fiable* (pour *safe substitution en anglais*). Soit F un fait et σ une substitution quelconque. On note $\sigma^s(F)$ un fait appelé substitution fiable de F par rapport à σ, obtenu comme suit :

- si x est une variable de F et de $dom(\sigma)$, alors remplacer chaque occurrence de x dans F par $\sigma(x)$;
- sinon, si x est une variable de F qui n'est pas dans $dom(\sigma)$, associer à x une *nouvelle variable* x_f (*fresh variable* en anglais), puis remplacer chaque occurrence de x par x_f.

Intuitivement, $\sigma^s(F)$ est obtenue en remplaçant chaque variable x de F par $\sigma(x)$ si possible, et par une nouvelle variable sinon. $\emptyset^s(F)$ remplace donc toutes les occurrences de F par une nouvelle variable.

Definition 14 *[Application d'une règle] Soit F un fait et R une règle. On dit que R est* applicable *à F si il existe un homomorphisme π de $hyp(R)$ dans F. Dans ce cas,* l'application de R à F suivant π *produit un fait noté $\alpha(F, R, \pi) = F \cup \pi^s(conc(R))$.*

Notons au passage que lorsque R est π-applicable sur F, on a $\alpha(F, R, \pi) \equiv \alpha(\alpha(F, R, \pi), R, \pi)$. En d'autres termes, appliquer deux fois la même règle suivant le même homomorphisme est inutile, puisque cela produit un fait équivalent.

Definition 15 *[Dérivation] Soit F un fait et $\mathcal{R}$ un ensemble de règles. Une $\mathcal{R}$-dérivation de F est une séquence de faits $F = F_0, F_1, \ldots, F_k$ telle que $\forall 1 \leq i \leq k$, il existe une règle $R \in \mathcal{R}$ et un homomorphisme π de $hyp(R)$ dans F_{i-1} tels que $F_i = \alpha(F_{i-1}, R, \pi)$.*

Theorem 2 *Soient F et Q deux faits et $\mathcal{R}$ un ensemble de règles. Alors $F, \mathcal{R} \models Q$ si et seulement si il existe une $\mathcal{R}$-dérivation $F_0, F_1, \ldots, F_k$ de F telle que $F_k \models Q$.*

Algorithme en marche avant et saturation

Indécidabilité