# Changement d'échelle en topologie métrique

Guy Wallet

**Laboratoire de Mathématiques et Applications**

**Université de La Rochelle**

janvier 2007

Ce travail a pour but de déterminer une structure mathématique qui soit à la fois :

- très générale (non attachée à des choix partisans),

- offrant un cadre opératoire et autant que possible calculable,

pour les changements d'échelle. Initialement motivée par des considérations très concrètes, cette recherche se situe pour l'instant complètement sur le volet fondamental mais elle a aussi pour vocation d'éclairer les nombreuse situations appliquées dans lesquelles les changements d'échelle interviennent de manière essentielle.

## 1. Le problème de la mathématisation des changements d'échelle pouvant déformer la topologie

La notion d'échelle est fondamentale mais souvent implicite dans la démarche scientifique.

Cependant, il arrive que des changements d'échelle affectent explicitement les objets d'un domaine scientifique.

C'est le cas dans *la théorie de l'image* et aussi dans *la modélisation de données spatiaux-temporelles*.

Or, d'une part la topologie est un élément important de ces deux derniers domaines et d'autre part, on peut y constater qu'un changement d'échelle peut induire des déformations de la topologie des objets considérés.

*Une ville $A$ peut être située à l'intérieure d'une région $B$ à une certaine échelle, alors qu'elle est sur la frontière de $B$ à une échelle plus petite.*

Les spécialistes de ces domaines sont dans l'obligation de prendre en charge ce type de phénomène, par exemple pour le traitement automatique de la reconnaissance d'un objet pouvant apparaître à différentes échelles.

La transformation mathématique naturellement apparentée à un changement d'échelle est l' homothétie : on multiplie la taille de tous les objets par un même facteur $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Or :

*Une homothétie d'un espace affine est une transformation qui laisse invariante la topologie : c'est un homéomorphisme.*

Ainsi, pour le mathématicien, un disque de rayon $10^6$ et une disque de rayon $10^{-6}$ sont topologiquement identiques.

Sur la base de ce constat, on peut être tenté de conclure que :

*Les changements d'échelle susceptibles d'affecter la topologie ne sont pas du ressort des mathématiques.*

Heureusement pour la force de représentation des mathématiques, ce constat est incorrect.

C'est ce que va montrer la suite de cet exposé.

La première chose à faire est de se livrer à une analyse plus fine de ce que sont les changements d'échelle concrets. On peut convenir que ce sont des sortes de transformation d'un espace physique qui résultent de l'effet combiné de deux processus différents mais liés :

(1) une *homothétie* pouvant éventuellement avoir un caractère relativement *violent* ;

(2) une *simplification* qui permet de négliger les détails devenus trop petits.

Pour construire un bon représentant mathématique de la notion de changement d'échelle, il faut réussir à prendre en charge simultanément ces deux aspects.

## 2. Approche des changements d'échelle dans un espace métrique

La structure mathématique dans laquelle on a naturellement envie de faire des changements d'échelle est celle d'espace métrique. C'est une donnée de la forme $(X, d)$ dans laquelle $X$ désigne un ensemble et $d$ une distance sur $X$, c'est-à-dire, une application $(x, y) \mapsto d(x, y)$ de $X^2$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

(1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
(2) $d(x, y) = d(y, x)$
(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Dans ce cadre, une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ consiste simplement à multiplier la distance par $\lambda$ : on passe de l'espace métrique $(X, d)$ à l'espace métrique $(X, \lambda\, d)$.

C'est une transformation qui opère sur l'ensemble des distances dont on peut munir $X$ ou plus généralement sur la classe de tous les espaces métriques.

On retrouve la propriété d'invariance de la topologie par homothétie : les distances $d$ et $\lambda\, d$ définissent la même topologie sur l'ensemble $X$.

**Question naturelle :** Peut-on, d'une manière ou d'une autre prolonger les homothéties de manière à définir une bonne notion de changement d'échelle sur un espace métrique ?

**Deux réponses connues :**

- Le passage à la limite dans "l'espace métrique de tous les espaces métriques" au sens de la *convergence de Gromov-Hausdorff* (1981).

- La construction nonstandard des *cônes asymptotiques de van den Dries et Wilkie* (1984).

# 3. La construction de Gromov

Dans ses travaux sur les groupes à croissance polynomiale, M. Gromov a réussi à donner du sens à une construction mathématique pouvant s'interpréter comme un passage à une petite échelle, c'est-à-dire comme l'action d'observer un espace métrique de loin.

Voir de loin un espace métrique $(X, d)$ consiste à remplacer $(X, d)$ par un nouvel espace métrique $(X^0, d^0)$ tel que $(X^0, d^0) = \lim_{n \to +\infty} (X, \varepsilon_n\, d)$

avec $(\varepsilon_n)$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\varepsilon_n \longrightarrow 0$.

La limite précédente est prise au sens de la "distance" de Gromov-Hausdorff sur la classe de tous les espaces métriques.

On remarque que ce procédé capte relativement bien les deux aspects constitutifs d'un changement d'échelle :

- la contraction violente correspond à la suite d'homothétie dont le rapport $\varepsilon_n$ tend vers 0,

- la simplification susceptible de modifier la géométrie de l'espace est obtenue par le passage à la limite.

Le problème est que la convergence de Gromov-Hausdorff est un concept sophistiqué dont la mise en œuvre est délicate et qui ne fonctionne que sous des hypothèses très restrictives portant sur l'espace métrique considéré. En l'état, il semble difficile de fonder sur cette approche une théorie générale des changements d'échelle.

Les cônes asymptotiques de van den Dries et Wilkie ont été proposés justement comme une alternative à la convergence de Gromov-Hausdorff car ils présentent l'avantage de toujours pouvoir être mis en œuvre.

# 4. Les cônes asymptotiques

Il s'agit d'une technique issue de l'analyse nonstandard.

Partant d'un espace métrique $(X, d)$, on en considère une extension nonstandard $({}^*X, {}^*d)$. Maintenant, ${}^*d$ est une application ${}^*X \times {}^*X \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ possédant toutes les propriétés formelles d'une distance mais à valeurs dans le corps des nombres hyper-réels nonstandard.

Dans ${}^*\mathbb{R}$, on dispose de nombres infiniment petits ($\varepsilon \simeq 0$) qui peuvent être non nuls et de nombres infiniment grands ($\omega \simeq +\infty$ ou $\omega \simeq -\infty$).

Etant donné un point $x_0 \in {}^*X$ et un nombre $\lambda \in {}^*\mathbb{R}$ tel que $0 < \lambda \simeq 0$, le cône asymptotique de l'espace métrique $(X, d)$ centré en $x_0$ de rapport $\lambda$ est l'espace métrique $(X_\lambda, d_\lambda)$ (tout à fait standard) défini par

$$X_\lambda = \{x \in {}^*X \ ; \ \lambda\, {}^*d(x, x_0) \not\simeq +\infty\} / \approx_\lambda$$

$$x \approx_\lambda y \iff \lambda\, {}^*d(x, y) \simeq 0$$

$$d_\lambda([x]_\lambda, [y]_\lambda) = \text{l'unique nombre réel } \rho \text{ tel que } \rho \simeq \lambda\, {}^*d(x, y)$$

Cette deuxième construction est elle-aussi intéressante et a donné lieu à de nombreux et importants développement. Néanmoins, en ce qui concerne le projet de fonder une théorie générale des changements d'échelle, elles présentent un certain nombre d'inconvénients :

- Il s'agit maintenant d'un concept profondément transcendant qui, de plus, dépend d'un choix (celui d'un ultra-filtre par exemple sur $\mathbb{N}$).

- Enfin, dans une bonne théorie des changements d'échelle, on souhaiterait que la composition de deux changements d'échelle constitue un changement d'échelle de l'espace métrique initiale avec un rapport égal au produit des rapports des éléments de la composition. Dans les deux approches citées, ce genre de propriété semble difficile à atteindre, sinon même à formuler.

**Thèse :** Les espaces métriques sont porteurs d'une structure trop pauvre pour qu'il soit possible d'y définir naturellement et de manière calculatoire une notion de changement d'échelle pouvant déformer la topologie.

On se propose maintenant de présenter une forme plus générale de structure métrique pour laquelle le passage à une petite échelle (une contraction) devient naturel et calculable. On peut alors analyser le "miracle" de la construction non-standard d'un changement d'échelle sur un espace métrique par van den Dries et Wilkie comme résultant de la production intermédiaire d'espaces porteurs implicitement de cette nouvelle structure.

## 5. Premier ingrédient : une distance généralisée

Une *distance généralisée* sur un ensemble $F$ est une application

$$\delta_\alpha : F \times F \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

telle que, pour tout $x, y, z \in F$ :

1. $\delta(x,x) = 0$
2. $\delta(x,y) = \delta(y,x) > 0$ pour $x \neq y$
3. $\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$

A une distance généralisée $\delta$ sur $F$, on associe une topologie sur $F$ définie par les boules ouvertes

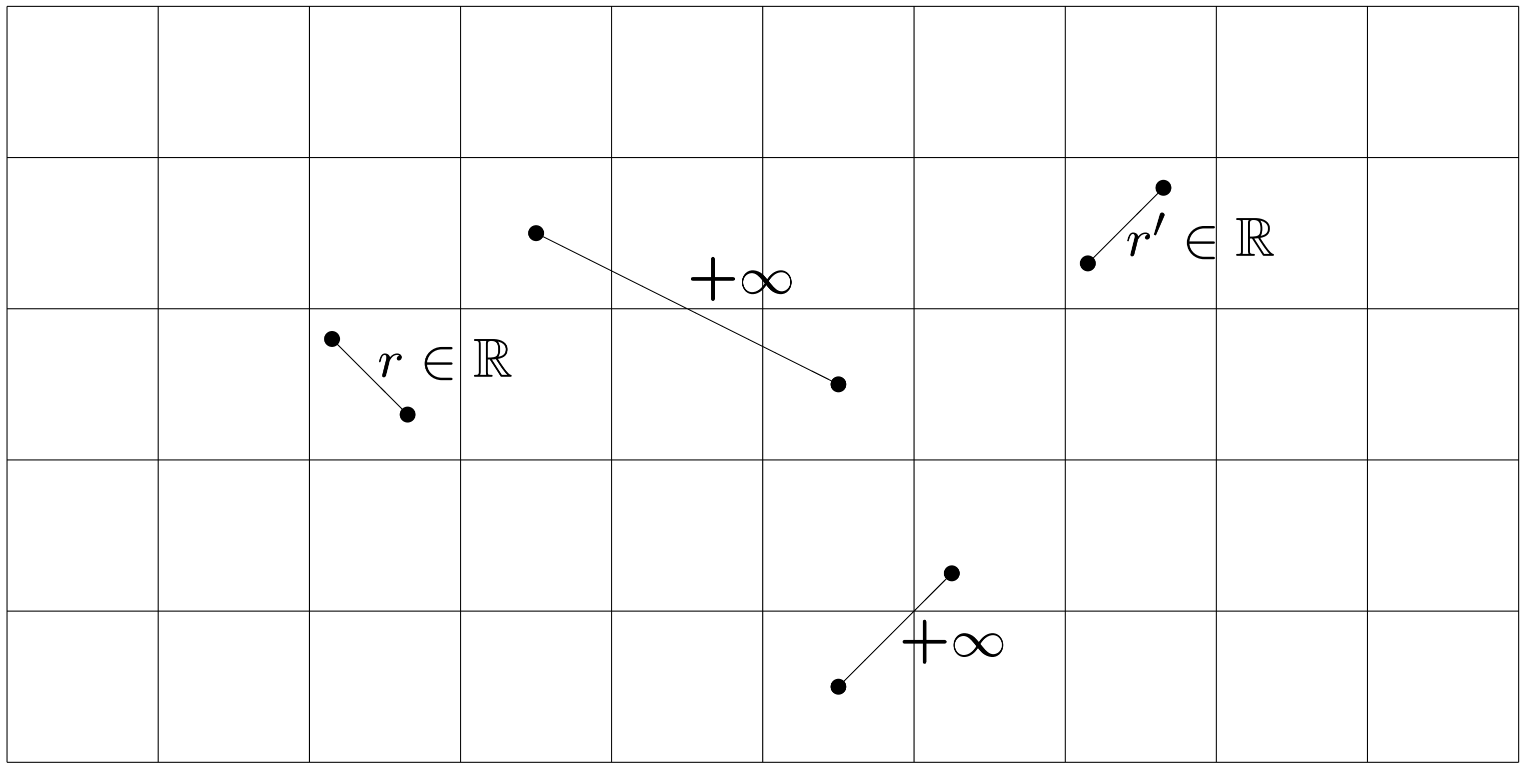
$\forall (x,r) \in F \times (\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}) \;\; B_\delta(x,r) = \{y \in F \;;\; \delta(x,y) < r\}$

Les boules ouvertes de rayon l'infini sont aussi les classes d'équivalence pour la relation binaire $\delta(x, y) < +\infty$ sur $F$. Ces classes d'équivalence sont des espaces métriques pour $\delta$ que nous allons appeler les *composantes métriques* de $F$.

Notons $\mathcal{M}_F$ l'ensemble des composantes métriques de $F$ et, pour chaque $x \in F$, notons $C_F(x)$ la composante métrique de $F$ qui contient $x$.

D'une certaine manière, un ensemble muni d'une distance généralisée est seulement la réunion disjointe d'une famille d'espaces métriques sans autre lien entre eux. On souhaite enrichir ce type de structure en introduisant une relation topologique entre ces espaces métriques qui prolonge de manière cohérente la distance généralisée $\delta$.

Un ensemble muni d'une distance généralisée :



## 6. Deuxième ingrédient : une extension des nombres réels

Afin de pouvoir mesurer la distance entre les composantes métriques, il faut disposer d'une extension propre de corps ordonné des nombres réels $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{K}$.
(Exemples : $\mathbb{K} = \mathbb{R}(X)$ , $\mathbb{R}((X))$ , ${}^*\mathbb{R}, \ldots$)

Dans ce cadre, on montre l'existence dans $\mathbb{K}$ :

- de nombres infiniment petits $(x \simeq 0 \Leftrightarrow |x| < 1/n \; \forall n \in \mathbb{N})$ ;

- de nombres infiniment grands $(|x| > n \; \forall n \in \mathbb{N})$ qui se décline en les infiniment grands positifs $(x \simeq +\infty)$ et les négatifs $(x \simeq -\infty)$.

La galaxie de 0 est l'ensemble des nombres limités

$$\mathsf{Gal}(0) = \{x \in \mathbb{K} \ ; \ x \not\simeq \pm\infty\}$$

et on vérifie que tout nombre limité $t \in \mathbb{K}$ est infiniment proche d'un unique nombre réel ${}^{o}t \in \mathbb{R}$. Cette propriété donne naissance à la fonction valeur principale $\mathsf{Vp} : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ telle que, pout tout $t \in \mathbb{K}$

$$\mathsf{Vp}(t) = \begin{cases} {}^{o}t & \text{si } t \not\simeq \pm\infty \text{ avec } {}^{o}t \in \mathbb{R} \text{ et } t \simeq {}^{o}t \\ +\infty & \text{si } t \simeq +\infty \\ -\infty & \text{si } t \simeq -\infty \end{cases}$$

# 7. Troisième ingrédient : une distance galactique

L'ensemble des nombres limités Gal(0) est un sous-groupe additif de $\mathbb{K}$. On considère le groupe quotient $\mathbb{K}/\mathrm{Gal}(0)$ et la projection canonique

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{Gal} & : & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}/\mathrm{Gal}(0) \\ & & x & \longmapsto & \mathrm{Gal}(x) := x + \mathrm{Gal}(0) \end{array}$$

et on vérifie que $\mathbb{K}/\mathrm{Gal}(0)$ est un groupe ordonné pour la relation

$$\mathrm{Gal}(x) \leq \mathrm{Gal}(y) \Leftrightarrow x \leq y \text{ ou } x - y \not\simeq \pm\infty$$

Ce groupe ordonné est appelé le groupe galactique et il est noté $\mathrm{Gal}(\mathbb{K})$.

Une distance galactique sur un ensemble $\mathcal{E}$ est une application $\Delta : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathrm{Gal}_{\mathbb{K}}{}^{+}$ qui satisfait les propriétés usuelles d'une distance :

Pour tout $X, Y, Z \in \mathcal{E}$ :
1. $\Delta(X, X) = 0$
2. $\Delta(X, Y) = \Delta(Y, X) > 0$ pour $X \neq Y$
3. $\Delta(X, Z) \leq \Delta(X, Y) + \Delta(Y, Z)$

Une distance galactique est une distance ambiguë qui mesure les distances à un nombre limité près. De même qu'une distance usuelle, une distance galactique sur un ensemble $\mathcal{E}$ définit une topologie sur cet ensemble.

# 8. Espace galactique

Voici enfin le type de structure métrique sur lequel il est facile de définir un concept relativement calculable de changement d'échelle.

*Un espace galactique est une structure de la forme* $(F, \delta, \Delta)$ *où :*
*-* $F$ *est un ensemble,*
*-* $\delta$ *est une distance généralisée sur* $F$*,*
*-* $\Delta$ *est une distance galactique sur l'ensemble* $\mathcal{M}_F$ *des composantes métriques de* $F$ *pour* $\delta$*.*

Cette structure présuppose le choix d'une extension de corps ordonné $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}$.

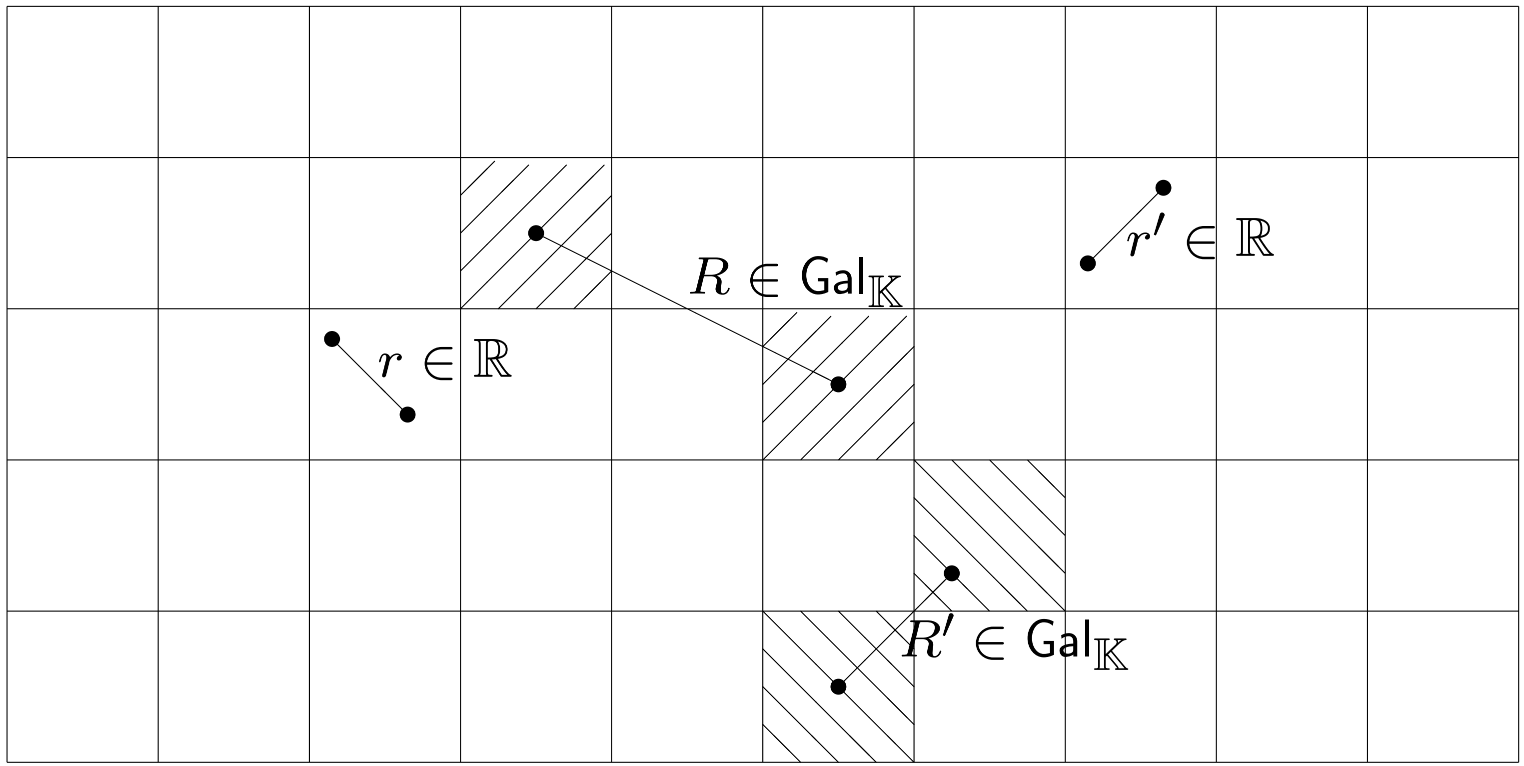
**Commentaire**

Un espace galactique $(F, \delta, \triangle)$ est un espace muni d'une structure métrique à deux résolutions :

- une résolution grossière qui permet de distinguer et d'organiser topologiquement les composantes métriques de $F$ à l'aide de la distance galactique $\triangle$ ;

- une résolution fine qui permet dans chaque composante métrique de distinguer et d'organiser topologiquement les points de $F$ à l'aide de la distance généralisée $\delta$.

Un espace galactique :



**Exemples**

1) Un espace métrique $(E, d)$ est un espace galactique $(E, d, 0)$ avec pour seule composante métrique $E$ lui-même et $0$ pour distance galactique.

2) Soit $(E_1, d_1)$ and $(E_2, d_2)$ deux espaces métriques tels que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. On choisit $\Delta_{1,2} \in \mathsf{Gal}(\mathbb{K})$ non trivial ($\Delta_{1,2} \neq 0 \in \mathsf{Gal}(\mathbb{K})$). Alors, on peut définir un espace galactique $(E, d, D)$ tel que

- $E = E_1 \cup E_2$ ;
- $d(x, y) = \begin{cases} d_1(x, y) & \text{if } (x, y) \in {E_1}^2 \\ d_2(x, y) & \text{if } (x, y) \in {E_2}^2 \\ +\infty & \text{else} \end{cases}$ ;
- $D(E_1, E_2) = \Delta_{1,2}$.

3) *La droite galactique continue* est l'espace galactique $(\mathbb{D}_c, \delta, \boldsymbol{\Delta})$ défini par :

- l'ensemble $\mathbb{D}_c$ est le quotient $\mathbb{K}/\simeq$ du corps $\mathbb{K}$ par la relation de proximité infinitésimale $x \simeq y$

- la distance généralisée $\delta([x],[y]) = \mathsf{Vp}(|x-y|)$
où $[x]$ (*resp.* $[y]$) représente la classe d'équivalence de $x$ (*resp.* $y$)

- la distance galactique $\boldsymbol{\Delta}(C_{\mathbb{D}_c}([x]), C_{\mathbb{D}_c}([y])) = \mathsf{Gal}(|x-y|)$
où $C_{\mathbb{D}_c}([x])$ (*resp.* $C_{\mathbb{D}_c}([y])$) représente la composante métrique de $[x]$ (*resp.* de $y$)

4) *La droite galactique discrète* est un espace galactique $(\mathbb{D}_d, \delta, \triangle)$ tel que :

- on choisit dans chaque composante métrique $G$ de la droite galactique continue $(\mathbb{D}_c, \delta, \triangle)$un sous-ensemble discret $\mathbb{Z}_G = \{[n+g]\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$

- on pose $\mathbb{D}_d = \bigcup_{G \in \mathcal{M}_{\mathbb{D}_c}} \mathbb{Z}_G$ qui est donc un sous-ensemble (discret) de $\mathbb{D}_c$

- la distance généralisée $\delta$ est la distance galactique $\triangle$ sont les mêmes que celles de la droite galactique continue.

# 7. Contraction d'un espace galactique

Etant donné un nombre $\gamma \in \mathbb{K}$ tel que $0 < \gamma \leq 1$ et une galaxie $R = \mathsf{Gal}(r) \in \mathsf{Gal}_{\mathbb{K}}^{+}$ on définit le produit $\gamma \bullet R$ comme étant la galaxie $\mathsf{Gal}(\gamma r) \in \mathsf{Gal}_{\mathbb{K}}^{+}$ (indépendant du choix de $r$ dans la classe d'équivalence $R$).

On remarque que, si $R \neq 0$ dans $\mathsf{Gal}_{\mathbb{K}}$, tout élément de $\gamma R$ est infiniment grand si $\gamma \not\simeq 0$ et infiniment proche de $\gamma r$ si $\gamma \simeq 0$. Il en résulte que l'application valeur principale $\mathsf{Vp}$ est constante sur l'ensemble $\gamma R$ si $R \neq 0$ et on note $\mathsf{Vp}(\gamma\, R)$ sa valeur.

Etant donné $\gamma \in \mathbb{K}$ tel que $0 < \gamma \leq 1$, une *$\gamma$-contraction* d'un espace galactique $(F, \delta, \Delta)$ est la donnée d'un espace galactique $(F', \delta', \Delta')$ et d'une application surjective $\pi : F \to F'$ possédant les propriétés suivantes :

$\forall (x_1, x_2) \in F^2$

(1) $$\delta'(\pi(x_1), \pi(x_2)) = \begin{cases} \mathrm{Vp}(\gamma\, \delta(x_1, x_2)) & \text{si } \delta(x_1, x_2) < +\infty \\ \mathrm{Vp}(\gamma\, \Delta(E_1, E_2)) & \text{si } \delta(x_1, x_2) = +\infty \end{cases}$$

où $E_1 := C_F(x_1)$ et $E_2 := C_F(x_2)$

(2) $$\Delta'(F_1, F_2) = \gamma \bullet \Delta(E_1, E_2)$$

où $F_1 := C_{F'}(\pi(x_1))$ et $F_2 := C_{F'}(\pi(x_2))$

Etant donné un espace galactique $(F, \delta, \Delta)$ et un nombre $\gamma \in \mathbb{K}$ tel que $0 < \gamma \leq 1$, on peut construire explicitement une $\gamma$-contraction $\pi_\gamma : (F, \delta, \Delta) \to (F_\gamma, \delta_\gamma, \Delta_\gamma)$.

Pour cela, on pose $F_\gamma := F/\sim_\gamma$ où $\sim_\gamma$ désigne une relation d'équivalence sur $F$ telle que $x_1 \sim_\gamma x_2$ lorsque

$$\begin{cases} \mathsf{Vp}(\gamma\,\delta(x_1, x_2)) = 0 & \text{si } \delta(x_1, x_2) < +\infty \\ \mathsf{Vp}(\gamma\,\Delta(C_F(x_1), C_F(x_2))) = 0 & \text{si } \delta(x_1, x_2) = +\infty \end{cases}$$

Puis, désignant par $\pi_\gamma$ la projection canonique $F \to F_\gamma$, on définit la distance généralisée $\delta_\gamma$ et la distance galactique $\Delta_\gamma$ sur $F_\gamma$ en imposant simplement que $\pi_\gamma$ vérifient les propriétés (1) et (2) précédentes.

De plus, $\gamma$ étant fixé, deux $\gamma$-contractions d'un même espace galactique $(F, \delta, \triangle)$ sont essentiellement les mêmes, c'est-à-dire sont isométriques en un sens naturel.

En fait, il est possible de définir une notion de morphisme d'espace galactique. On obtient alors une catégorie des espace galactiques dans laquelle les contractions sont des solutions de problèmes universels. On peut aussi y montrer l'existence de limites inductives de systèmes de contractions.

Enfin, on a une propriété naturelle de transitivité des contractions :

Etant donnés une $\gamma_1$-contraction de $(F, \delta, \Delta)$

$$\pi_1 : (F, \delta, \Delta) \longrightarrow (F_1, \delta_1, \Delta_1)$$

et une $\gamma_2$-contraction de $(F_1, \delta_1, \Delta_1)$

$$\pi_2 : (F_1, \delta, \Delta_1) \longrightarrow (F_2, \delta_2, \Delta_2)$$

l'application composée

$$\pi_2 \circ \pi_1 : (F, \delta, \Delta) \longrightarrow (F_2, \delta_2, \Delta_2)$$

est une $\gamma_1\gamma_2$-contraction de $(F, \delta, \Delta)$.