Arithmétique et combinatoire de la β-numération

Julien Bernat

Institut de Mathématiques de Luminy

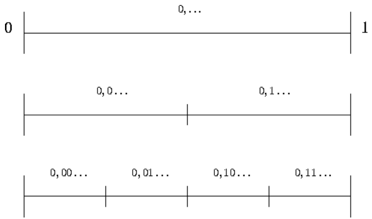
22 janvier 2007

Plan

- Numération en base de Fibonacci
- β-numération
- Arithmétique
- Combinatoire et substitutions

Écritures de réels en base 2

$$x \in [0,1]; x = \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k 2^{-(k+1)} \ ; \ \forall k, v_k \in \{0,1\}.$$



Partition de $[0,1]$ par les préfixes des écritures en base 2

Écritures de réels en base $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ϕ racine positive de $X^2 - X - 1$; $\lfloor \phi \rfloor = 1$.

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} v_k \phi^{-(k+1)} \; ; \; \forall k, v_k \in \{0, 1\}.$$

100 et 011 représentent la même quantité.

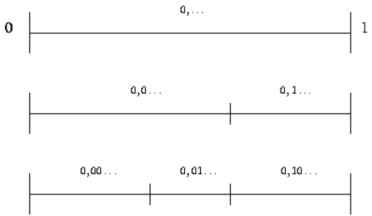
Non unicité des écritures :

$$0.1 = 0.100 = 0.011 = 0.01011 = \ldots = 0.(01)^\infty.$$

Condition d'admissibilité

$d_\phi(x)$: plus grande écriture pour $<_{lex}$.

$d_\phi(x)$ ne contient pas 11 ($011 <_{lex} 100$).



Partition de $[0, 1]$ par les préfixes des écritures en base ϕ

Définition et propriétés de $\mathbb{Z}_\phi^+$

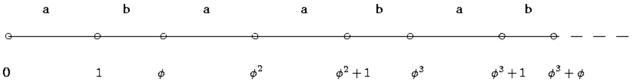
Ensemble des ϕ-*entiers* :

$$\mathbb{Z}_\phi^+ = \{\sum_{i=0}^{n} v_i \phi^i | v_i \in \{0,1\}, v_i v_{i+1} \neq 11\}.$$

Définition et propriétés de $\mathbb{Z}_\phi^+$

Ensemble des ϕ-*entiers* :

$$\mathbb{Z}_\phi^+ = \{\sum_{i=0}^{n} v_i \phi^i | v_i \in \{0,1\}, v_i v_{i+1} \neq 11\}.$$



Définition et propriétés de $\mathbb{Z}_\phi^+$

Ensemble des ϕ-*entiers* :

$$\mathbb{Z}_\phi^+ = \{\sum_{i=0}^{n} v_i \phi^i | v_i \in \{0,1\}, v_i v_{i+1} \neq 11\}.$$

- $\mathbb{Z}_\phi^+$ *uniformément discret* ($\min_{x,y \in \mathbb{Z}_\beta, x \neq y} |x - y| > 0$).
- Auto-similarité : $\phi\mathbb{Z}_\phi^+ \subset \mathbb{Z}_\phi^+$.
- $\mathbb{Z}_\phi^+$ non stable par addition et par multiplication.

  1 + 1

Définition et propriétés de $\mathbb{Z}_\phi^+$

Ensemble des ϕ-*entiers* :

$$\mathbb{Z}_\phi^+ = \{\sum_{i=0}^{n} v_i \phi^i | v_i \in \{0,1\}, v_i v_{i+1} \neq 11\}.$$

- $\mathbb{Z}_\phi^+$ *uniformément discret* ($\min_{x,y\in\mathbb{Z}_\beta, x\neq y} |x-y| > 0$).
- Auto-similarité : $\phi\mathbb{Z}_\phi^+ \subset \mathbb{Z}_\phi^+$.
- $\mathbb{Z}_\phi^+$ non stable par addition et par multiplication.

  1 + 1.00

Définition et propriétés de $\mathbb{Z}_\phi^+$

Ensemble des ϕ-*entiers* :

$$\mathbb{Z}_\phi^+ = \{\sum_{i=0}^{n} v_i\phi^i | v_i \in \{0,1\}, v_i v_{i+1} \neq 11\}.$$

- $\mathbb{Z}_\phi^+$ *uniformément discret* ($\min_{x,y\in\mathbb{Z}_\beta, x\neq y} |x-y| > 0$).
- Auto-similarité : $\phi\mathbb{Z}_\phi^+ \subset \mathbb{Z}_\phi^+$.
- $\mathbb{Z}_\phi^+$ non stable par addition et par multiplication.

  1 + 0.11

Définition et propriétés de $\mathbb{Z}_\phi^+$

Ensemble des ϕ-*entiers* :

$$\mathbb{Z}_\phi^+ = \{\sum_{i=0}^{n} v_i \phi^i | v_i \in \{0,1\}, v_i v_{i+1} \neq 11\}.$$

- $\mathbb{Z}_\phi^+$ *uniformément discret* ($\min_{x,y \in \mathbb{Z}_\beta, x \neq y} |x-y| > 0$).
- Auto-similarité : $\phi \mathbb{Z}_\phi^+ \subset \mathbb{Z}_\phi^+$.
- $\mathbb{Z}_\phi^+$ non stable par addition et par multiplication.

  $1 + \ 0.11 \ = 1.11$

Définition et propriétés de $\mathbb{Z}_\phi^+$

Ensemble des ϕ-*entiers* :

$$\mathbb{Z}_\phi^+ = \{\sum_{i=0}^{n} v_i \phi^i | v_i \in \{0,1\}, v_i v_{i+1} \neq 11\}.$$

- $\mathbb{Z}_\phi^+$ *uniformément discret* ($\min_{x,y \in \mathbb{Z}_\beta, x \neq y} |x-y| > 0$).
- Auto-similarité : $\phi \mathbb{Z}_\phi^+ \subset \mathbb{Z}_\phi^+$.
- $\mathbb{Z}_\phi^+$ non stable par addition et par multiplication.

  $1 + \quad 0.11 \quad = 01.11$

Définition et propriétés de $\mathbb{Z}_\phi^+$

Ensemble des ϕ-*entiers* :

$$\mathbb{Z}_\phi^+ = \{\sum_{i=0}^{n} v_i\phi^i | v_i \in \{0,1\}, v_iv_{i+1} \neq 11\}.$$

- $\mathbb{Z}_\phi^+$ *uniformément discret* $(\min_{x,y\in\mathbb{Z}_\beta, x\neq y} |x-y| > 0)$.
- Auto-similarité : $\phi\mathbb{Z}_\phi^+ \subset \mathbb{Z}_\phi^+$.
- $\mathbb{Z}_\phi^+$ non stable par addition et par multiplication.

  $1 + \ 0.11 \ = 10.01$; $101 \times 101 = 100010.01$

Définition et propriétés de $\mathbb{Z}_\phi^+$

Ensemble des ϕ-*entiers* :

$$\mathbb{Z}_\phi^+ = \{\sum_{i=0}^{n} v_i \phi^i | v_i \in \{0,1\}, v_i v_{i+1} \neq 11\}.$$

- $\mathbb{Z}_\phi^+$ *uniformément discret* ($\min_{x,y\in\mathbb{Z}_\beta, x\neq y} |x-y| > 0$).
- Auto-similarité : $\phi\mathbb{Z}_\phi^+ \subset \mathbb{Z}_\phi^+$.
- $\mathbb{Z}_\phi^+$ non stable par addition et par multiplication.
- Burdík, Frougny, Gazeau, Krejcar 98 :

$$\phi^2(\mathbb{Z}_\phi^+ + \mathbb{Z}_\phi^+) \subset \mathbb{Z}_\phi^+ \; ; \; \phi^2(\mathbb{Z}_\phi^+ \times \mathbb{Z}_\phi^+) \subset \mathbb{Z}_\phi^+.$$

Numération en base β

Rényi 57, Parry 60.

$$x = \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k \beta^{-k-1} \; ; \; \forall k, v_k \in \mathcal{A}_\beta = [\![0, \lfloor \beta \rfloor]\!].$$

$d_\beta(x) =$ suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ maximale pour $<_{lex}$.

$d_\beta(1)$ fini : *nombre de Parry simple*.
$d_\beta(1)$ ultimement périodique : *nombre de Parry non simple*.

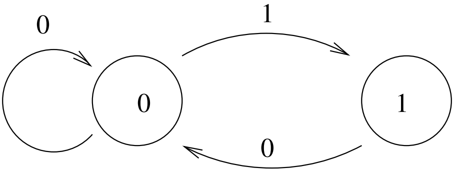
Caractérisations des nombres de Parry

Algébrique : Pisot $\Rightarrow$ Parry $\Rightarrow$ Perron.

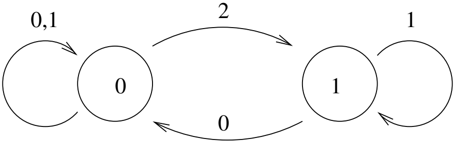
Symbolique : Bertrand 86.

β nombre de Parry $\Leftrightarrow \mathcal{S}_\beta$ reconnaissable par automate fini.

β nombre de Parry simple $\Leftrightarrow$ $\{$facteurs interdits minimaux$\}$ fini.



$$\beta = \phi,\ d_\beta(1) = 0.11,\ \mathcal{S}_F = \{11\}$$



$$\beta = \phi + 1,\ d_\beta = 0.21^\infty,\ \mathcal{S}_F = \{21^k2, k \in \mathbb{N}\}$$

Construction des β-entiers

$$\mathbb{Z}_\beta^+ : \{\sum_{i=0}^{n} v_i\beta^i | v_n \dots v_0 \text{ admissible}\}.$$

- $\mathbb{Z}_\beta^+$ discret.
- $\mathbb{Z}_\beta^+$ définit un pavage de $\mathbb{R}_+$

Construction des β-entiers

$$\mathbb{Z}_\beta^+ : \{\sum_{i=0}^{n} v_i\beta^i | v_n \ldots v_0 \text{ admissible}\}.$$

- $\mathbb{Z}_\beta^+$ discret.
- $\mathbb{Z}_\beta^+$ définit un pavage de $\mathbb{R}_+$

  (Thurston : nombre fini de tuiles $\Leftrightarrow$ β Parry).

Construction des β-entiers

$$\mathbb{Z}_\beta^+ : \{\sum_{i=0}^{n} v_i \beta^i | v_n \dots v_0 \text{ admissible}\}.$$

- $\mathbb{Z}_\beta^+$ discret.
- $\mathbb{Z}_\beta^+$ définit un pavage de $\mathbb{R}_+$
- $\mathbb{Z}_\beta$ non stable pour les lois usuelles.

Construction des β-entiers

$$\mathbb{Z}_\beta^+ : \{\sum_{i=0}^{n} v_i \beta^i | v_n \dots v_0 \text{ admissible}\}.$$

- $\mathbb{Z}_\beta^+$ discret.
- $\mathbb{Z}_\beta^+$ définit un pavage de $\mathbb{R}_+$
- $\mathbb{Z}_\beta$ non stable pour les lois usuelles.

  $2 + 1 = 10.111(00012)^\infty$ pour $d_\beta(1) = 0.2011$

Construction des β-entiers

$$\mathbb{Z}_\beta^+ : \{\sum_{i=0}^{n} v_i \beta^i | v_n \dots v_0 \text{ admissible}\}.$$

- $\mathbb{Z}_\beta^+$ discret.
- $\mathbb{Z}_\beta^+$ définit un pavage de $\mathbb{R}_+$
- $\mathbb{Z}_\beta$ non stable pour les lois usuelles.

  $2 + 1 = 10.111(00012)^\infty$ pour $d_\beta(1) = 0.2011$

  $d_\beta(\beta - 1)$ apériodique lorsque β non Parry

Arithmétique en base β

$\mathrm{Fin}(\beta)^+$: β-développements finis (="β-décimaux")
$\mathrm{Per}(\beta)^+$: β-développements périodiques (="β-rationnels")
$\mathrm{Fin}(\beta) \subset \mathbb{Z}[\beta^{-1}]$, $\mathrm{Per}(\beta) \subset \mathbb{Q}(\beta)$; cas d'égalité ?

Bertrand, Schmidt : β Pisot $\Rightarrow \mathrm{Per}(\beta) = \mathbb{Q}(\beta)$;
$\mathrm{Per}(\beta) = \mathbb{Q}(\beta) \Rightarrow \beta$ Pisot ou Salem.

$\mathrm{Fin}(\beta) = \mathbb{Z}[\beta^{-1}]$ est appelée *propriété de finitude*, notée $(\mathcal{F})$.
$(\mathcal{F}) \subset$ {nombres de Pisot et de Parry simple}.

Opérations sur les β-entiers

$$L_{\oplus} = \text{ décalage fini maximal de la virgule pour } \mathbb{Z}_\beta + \mathbb{Z}_\beta,$$

$$L_{\otimes} = \text{ décalage fini maximal de la virgule pour } \mathbb{Z}_\beta \times \mathbb{Z}_\beta.$$

β Pisot $\Rightarrow L_{\oplus}$ et $L_{\otimes}$ finis (Frougny, Solomyak 92).

$\exists\ \beta$ tel que $L_{\oplus}$ ou $L_{\otimes}$ infini ?

Calcul effectif de $L_{\oplus}$ et $L_{\otimes}$?

Finitude de $L_\oplus$ et $L_\otimes$

Théorème. (B. 05) Soit β un nombre de Perron. Alors :

- $\{\{x+y\}_\beta | x, y \in \mathbb{Z}_\beta\} \cap \mathrm{Per}(\beta)$ est fini.
- Si β est un nombre de Parry, $L_\oplus$ est calculable.

Corollaire. Pour β Perron, $L_\oplus$ et $L_\otimes$ finis.

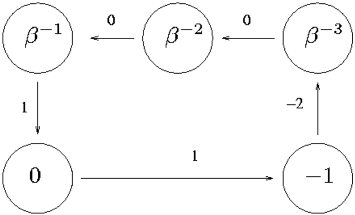
Proposition. (B. 05) Lorsque $d_\beta(1) = 0.111$, $L_\oplus = 5$; $4 \leq L_\otimes \leq 5$.

Idée de la preuve

- $x + y = [x + y]_\beta + \{x + y\}_\beta \rightarrow$ la somme terme-à-terme de $[x + y]_\beta + \{x + y\}_\beta - x - y$ est une écriture de 0.
- Action du décalage $\leftrightarrow$ $\mathbb{Z}^d$-actions affines.
- Construction d'un automate A.
- β Perron $\Rightarrow$ A fini et calculable.
- Parties β-fractionnaires $\leftrightarrow$ chemins dans A.

Exemple de Tribonacci

$d_\beta(1) = 0.111$; 1000 et 0111 représentent la même quantité.
$1 + 1 = 10.001 \rightarrow 1(-2).001$ est une écriture finie de 0.
$\Rightarrow 0.1, 0.01, 0.001 \in \{\{x + y\}_\beta | x, y \in \mathbb{Z}_\beta\}$.



Exemple de boucle dans $\mathcal{G}_\beta^+$

Définitions

Une *substitution* σ : un morphisme $\mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$.

β-substitutions (Thurston ; Fabre) :
$\sigma : a_i \longmapsto a_1^{k_1} a_{i+1}$, $a_d \longmapsto a_1^{k_d}$ (σ codée par $u = k_1 \ldots k_d$).

Exemples : $a \longmapsto ab$, $b \longmapsto a$ (Fibonacci)
$a \longmapsto ab$, $b \longmapsto ac$, $c \longmapsto a$ (Tribonacci)

Matrice d'incidence : $M_\sigma = [|\sigma(a_j)|_{a_i}]$

Définitions

Une *substitution* σ : un morphisme $\mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$.

β-substitutions (Thurston ; Fabre) :
$\sigma : a_i \longmapsto a_1^{k_1} a_{i+1},\ a_d \longmapsto a_1^{k_d}$ (σ codée par $u = k_1 \dots k_d$).

Exemples : $a \longmapsto ab$, $b \longmapsto a$ (Fibonacci)
$a \longmapsto ab$, $b \longmapsto ac$, $c \longmapsto a$ (Tribonacci)

Propriétés d'une β-substitution :

- *non effaçante* : $\forall l \in \mathcal{A}, \sigma(l) \neq$ mot vide.
- *primitive* : $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\min_{i,j} M_\sigma^N[i,j] \geq 1$.
- si $k_d = 1$: unimodulaire ($\det M_\sigma = \pm 1$), inversible.

Complexité

Fonction de complexité $p(n)$ = nombre de mots de longueur n.
σ primitive $\Rightarrow p$ sous-linéaire (Queffélec, Pansiot, Durand).

Algorithme : substitution $\rightarrow$ fonction de complexité ?

Théorème. (B., Másáková, Pelantová) La fonction de complexité d'une β-substitution est affine $\Leftrightarrow$ ($k_d = 1$ et $(u = pvp1 \Rightarrow v \neq p^j)$).

Idée de la preuve : caractérisation des facteurs spéciaux à gauche.

Généralisation ? Représentation géométrique ?

Propriétés

$\sigma : a_i \longmapsto a_1^k a_{i+1}$, $a_d \longmapsto a_1$, β Parry confluent unitaire.

Caractérisation combinatoire : palindromes, langage stable par image miroir.

Intéret : fabrication d'un ensemble modèle $\mathbb{Z}_\beta^s$ vérifiant :

- $\mathbb{Z}_\beta^s = -\mathbb{Z}_\beta^s$, avec $0 \in \mathbb{Z}_\beta^s$,
- $\mathbb{Z}_\beta^s$ localement isomorphe à $\mathbb{Z}_\beta^+$
- inflation : $\exists i$ tel que $\beta^i \mathbb{Z}_\beta^s \subset \mathbb{Z}_\beta^s$