

Examen

Combinatoire des mots

9 Janvier 2007

Les deux problèmes sont indépendants.

1 Étude d'un mot infini défini par une substitution

Soient $\mathcal{A} = \{a, b\}$ et $\sigma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ la substitution définie par $\sigma(a) = aba$ et $\sigma(b) = ab$.

Dans la suite, on note \mathbf{u} le point fixe de σ commençant par a .

1. La substitution σ est-elle inversible ? Peut-on en déduire sa fonction de complexité ?
2. Montrer que la suite \mathbf{u} est uniformément récurrente.
3. Donner la liste des facteurs de \mathbf{u} de longueur inférieure ou égale à 6. Donner la liste des facteurs spéciaux à gauche de longueur 5 de \mathbf{u} . Représenter les graphes des mots de Rauzy de \mathbf{u} de rang 1 à 5. Quelle semble être la complexité de \mathbf{u} ?
4. Montrer le *lemme de décomposition* suivant : tout facteur W de longueur au moins 3 de \mathbf{u} s'écrit de manière *unique*

$$W = R\sigma(V)S$$

où V est un facteur de \mathbf{u} , $R \in \{\varepsilon, a, b, ba\}$, $S \in \{\varepsilon, a\}$ si W finit par a , et $S = ab$, sinon.

5. Montrer que si W est un facteur spécial à gauche de \mathbf{u} de longueur supérieure ou égale à 3, alors W se décompose de manière unique comme $W = \sigma(V)S$, où V est un facteur spécial à gauche de \mathbf{u} , $S \in \{\varepsilon, a\}$ si W finit par a , et $S = ab$, sinon.
6. Montrer que \mathbf{u} n'est pas ultimement périodique.

7. En déduire la fonction de complexité de \mathbf{u} .
8. Montrer que \mathbf{u} est le mot de Fibonacci. Montrer que l'ensemble des facteurs de \mathbf{u} est invariant par image miroir.
9. Soit $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ la substitution définie par $\sigma(a) = baa$ et $\sigma(b) = ab$. Donner la matrice d'incidence de τ .
 - (a) Le but de cette question est de montrer que la substitution τ n'est pas inversible. Si elle l'était, quelle serait la forme de la matrice d'incidence M de son inverse ? Donner la liste des automorphismes qui ont M comme matrice d'incidence. Conclure.
 - (b) Donner l'expression de τ^2 . Combien de points fixes la substitution τ admet-elle dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$? Même question avec τ^2 ? Montrer que le point fixe commençant par a de la substitution τ^2 n'est pas Sturmien (regarder les facteurs de petite taille et les premières valeurs de la fonction de complexité).

2 Mots centraux

1. Donner le mot de Christoffel de pente $5/4$ sur l'alphabet $\{x < y\}$. Donner son graphe de Cayley. Donner son mot de Christoffel dual.
2. Donner les inverses de 5 et 4 modulo 9. Construire tous les mots non constants de périodes 5 et 4 de longueur 7.
3. Montrer que si deux mots U et V satisfont $UV = VU$, alors il existe un mot W et $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $U = W^i$, $V = W^j$. Donner une preuve par récurrence et une preuve basée sur le théorème de Fine et Wilf.