

Examen

Combinatoire des mots

15 Janvier 2008

Les problèmes sont indépendants.

1 Étude d'un mot infini défini par une substitution

On considère la substitution de Fibonacci σ sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, définie par $\sigma(0) = 01$, $\sigma(1) = 0$.

1. Montrer que σ admet un unique point fixe sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, et que cet unique point fixe commence par 0. Soit \mathbf{u} ce point fixe.
2. Soit ρ la substitution définie par $\rho = \sigma^2$. Donner la matrice d'incidence de ρ . Montrer que \mathbf{u} est aussi l'unique point fixe de ρ .

On considère la substitution τ , définie par $\tau(0) = 001$, $\tau(1) = 01$.

3. Montrer que τ admet un unique point fixe \mathbf{v} qui commence avec 0. Écrire les 20 premières lettres de \mathbf{v} .
4. La substitution τ est-elle inversible ? Peut-on en déduire la fonction de complexité de \mathbf{v} ?
5. Montrer que la suite \mathbf{v} est uniformément récurrente.
6. Donner la liste des facteurs de \mathbf{v} de longueur inférieure ou égale à 6. Donner la liste des facteurs spéciaux à gauche de longueur 5 de \mathbf{v} . Représenter les graphes des mots de Rauzy de \mathbf{v} de rang 1 à 5. Quelle semble être la complexité de \mathbf{v} ?
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\tau^n(0)$ et $\rho^n(0)$ ont le même nombre de lettres et que la même propriété est vraie pour $\tau^n(1)$ et $\rho^n(1)$ (considérer les matrices d'incidence).

Le but ces questions suivantes est de montrer que $S(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$, où S est l'opération de décalage : $S(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

8. Montrer que \mathbf{v} commence par $\tau^n(0)0$ pour tout n , et que \mathbf{u} commence par $\rho^n(0)$ pour tout n .
9. En déduire que $\mathbf{u} = S(\mathbf{v})$ (c'est-à-dire $u_n = v_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) si et seulement si la relation $\tau^n(0)0 = 0\rho^n(0)$ est vraie pour tout n .
Montrons cette relation par récurrence.
Soit A_n la propriété $0\rho^n(0) = \tau^n(0)0$, et soit B_n la propriété $0\rho^n(1)\rho^n(0) = \tau^n(0)\tau^n(1)0$.
10. Montrer que A_1 et B_1 sont vraies.
11. Montrer que, si A_n et B_n sont vraies, alors A_{n+1} et B_{n+1} sont vraies (*Indication* : $\rho^{n+1}(0) = \rho^n(010)$ et $\tau^{n+1}(0) = \tau^n(001)$).
12. En déduire la fonction de complexité de \mathbf{v} .

2 Mots centraux

1. Donner le mot de Christoffel de pente $7/9$ sur l'alphabet $\{x < y\}$. Donner son graphe de Cayley. Donner son mot de Christoffel dual.
2. Donner les inverses de 7 et 9 modulo 16. Construire tous les mots non constants de périodes 7 et 9 de longueur 14.
3. Montrer que si deux mots U et V satisfont $UV = VU$, alors il existe un mot W et $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $U = W^i$, $V = W^j$. Donner une preuve par récurrence et une preuve basée sur le théorème de Fine et Wilf.

3 Suite de Tribonacci

Soient $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ et $\sigma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ la substitution définie par $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = ac$ et $\sigma(c) = a$.

1. On appelle point σ -périodique une suite \mathbf{v} de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe un entier n non nul avec $\sigma^n(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Combien de points σ -périodiques la substitution σ admet-elle?

Soit \mathbf{u} le point fixe de σ commençant par a . La suite \mathbf{u} est appelée *suite de Tribonacci*. Cette suite est une généralisation de la suite de Fibonacci, point fixe de $a \mapsto ab$, $b \mapsto a$.

2. Établir une relation de récurrence satisfaite par les longueurs $|\sigma^n(a)|$, pour tout n .
3. Montrer que \mathbf{u} est uniformément récurrente.
4. Montrer que tout préfixe de \mathbf{u} est spécial à gauche.
5. *Lemme de décomposition* : montrer que tout facteur W de \mathbf{u} s'écrit de manière unique sous la forme

$$W = R\sigma(V)S,$$

avec V facteur de \mathbf{u} , $R \in \{\varepsilon, b, c\}$, et $S = a$ si W finit par a , $S = \varepsilon$, sinon.

6. Montrer que si W est un facteur spécial à gauche non vide de \mathbf{u} , alors dans la décomposition précédente, V est facteur spécial à gauche de \mathbf{u} , et $R = \varepsilon$.

En déduire le nombre de facteurs spéciaux à gauche de longueur n de \mathbf{u} pour tout n .

7. Donner la fonction de complexité de \mathbf{u} .
8. Quelle est la forme générale des graphes des mots de Rauzy?