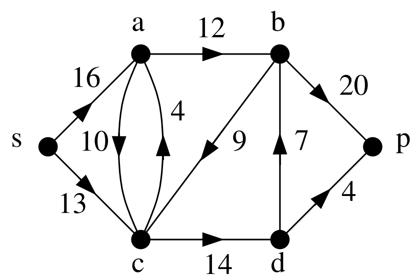
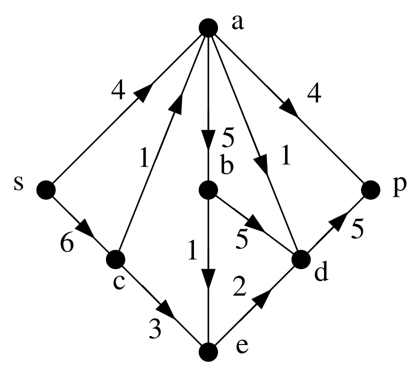
- Fiche de TD3 : Flots et circulations -

- Exercice 1 - Glouglouglou -

Dérouler à la main l'algorithme de Ford-Fulkerson sur les deux réseaux de transport suivants afin de déterminer dans chaque cas un flot maximal ainsi qu'une coupe minimale (les valeurs notées sur les arcs sont les capacités correspondantes).





- Exercice 2 - PL -

Soit $\mathcal{N} = (D, s, p, c)$ un réseau de transport. Montrer qu'il est possible d'écrire un programme linéaire correspondant à la recherche d'un flot de valeur maximal dans $\mathcal{N}$. On proposera un modèle utilisant un nombre polynomial (en la taille de D) de variables et de contraintes.

- Exercice 3 - Décomposition d'un flot -

Soit f un flot à valeurs entières sur un réseau de transport $\mathcal{N} = (D, s, p, c)$. Montrer qu'il existe dans D un ensemble de chemins $P_1, \dots, P_k$ tous de s à p et un ensemble de cycles $C_1, \dots, C_l$ tels que pour tout arc xy de D on ait $f(xy) = \#\{i \in \llbracket 1, k \rrbracket \ : \ xy \in P_i\} + \#\{j \in \llbracket 1, l \rrbracket \ : \ xy \in C_j\}$ (on pourra raisonner par récurrence sur $\sum_{xy \in A(D)} f(xy)$ par exemple).

- Exercice 4 - Théorème de Hall -

Soit $G = ((A, B), E)$ un graphe biparti (de bipartition (A, B)). On souhaite montrer le théorème de Hall en utilisant des résultats de flots. Pour cela, on considère le réseau de transport $\mathcal{N} = (D, s, p, c)$ où D est obtenu depuis G en ajoutant une source s dominant tous les sommets de A, en orientant toutes les arêtes de G de A vers B puis en ajoutant un puits p dominé par tous les sommets de B. Finalement, pour obtenir $\mathcal{N}$, on munit chaque arc de D d'une capacité de 1.

a. Soit X une (s, p)-coupe de capacité minimum et telle que $|X \cap A|$ soit minimal pour cela. Montrer qu'il n'y a d'arc dans D de $X \cap A$ à $B \setminus X$.

b. Déduire le théorème de Hall du théorème 'min cut = max flot'.

- Exercice 5 - Séquence de degrés d'un graphe biparti -

Soit $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ et $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ deux séquences d'entiers strictement positifs. La paire (p, q) est dite *réalisable* si il existe un graphe biparti $G = ((A, B), E)$ avec $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ et $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ tel que $deg_G(a_i) = p_i$ pour $1 \leq i \leq m$ et $deg_G(b_j) = q_j$ pour $1 \leq j \leq n$.

a. Formuler comme un problème de flots la question de savoir si une paire (p, q) est réalisable ou non.

b. On suppose que $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_n$. Déduire du théorème 'min cut = max flot' que (p, q) est réalisable si, et seulement si

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{m} \min(p_i, k) \geq \sum_{j=1}^{k} q_j \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq n$$

- Exercice 6 - Capacités basses -

Un *réseau avec capacités basses* est donné par un uple $\mathcal{R}_b = (D, s, p, b, c)$ où $D = (V, A)$ est un graphe orienté, s une source de D, p un puit de D, b et c des capacités $A \to \mathbb{R}^+$ vérifiant $b(xy) \leq c(xy)$ pour tout $xy \in A$. Un *flot compatible* est un flot sur (D, s, p, c) (c-à-d vérifiant les contraintes de conservation de flot et de capacité haute) qui satisfait de plus $b(xy) \leq f(xy)$ pour tout $xy \in A$ (*contraintes de capacité basse*). Le but de l'exercice est de mettre au point un algorithme de calcul de flot compatible si un tel flot existe.

a. On définit le réseau de transport 'classique' $\mathcal{R}' = (G', s', p', c')$ de la façon suivante : on ajoute deux sommets s' et p' à G tels que s' domine tous les sommets de G et que p' soit dominé par tous les sommets de G, on ajoute à G l'arc ps et pour finir on définit c' la capacité 'normale' sur les arcs de G' par : $c'(ps) = +\infty$, $c'(xy) = c(xy) - b(xy)$ pour tout arc xy de G, $c'(s'x) = b(V \setminus x, x)$ et $c'(xp') = b(x, V \setminus x)$ pour tout sommet x de G. Montrer que si f' est un flot de (G', s', p', c') de valeur $b(V, V)$ alors f défini sur A par $f(xy) = f'(xy) + b(xy)$ pour tout $xy \in A$ est un flot compatible de $\mathcal{R}_b$.

b. Inversement, montrer que si f est un flot compatible de $\mathcal{R}_b$ alors f' défini par $f'(xy) = f(xy) - b(xy)$ pour tout $xy \in A$, $f'(ps) = f(V \setminus p, p) - b(V \setminus p, p)$ et $f'(s'x) = b(V \setminus x, x)$ et $f'(xp') = b(x, V \setminus x)$ pour tout sommet x de G est un flot de $\mathcal{R}'$ de valeur $b(V, V)$.

c. En déduire que $\mathcal{R}_b$ admet un flot compatible si et seulement si $\mathcal{R}'$ admet un flot de valeur $b(V, V)$.

d. Déduire aussi le Théorème de Hoffman (1960) : $\mathcal{R}_b$ admet un flot compatible si et seulement si pour toute partie $X \subseteq V \setminus \{p\}$ on a $b(V \setminus X, X) \leq c(X, V \setminus X)$.

e. *Application.* Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. On veut arrondir (à l'entier supérieur ou inférieur) chaque entrée de la matrice M de telle sorte que pour toute ligne, la somme des arrondis des entrées de cette ligne soit égale à l'arrondi (supérieur ou inférieur) de la somme des entrées de la ligne, et que les mêmes conditions soient vérifiées pour les colonnes. Montrer qu'il est toujours possible d'arrondir les entrées de M afin de vérifier ces conditions.

- Exercice 7 - Circulez ! -

Pour tout $n \geq 3$ calculer $\phi(K_n)$.