

- Exercice sur les graphes orientés -

- Chapitre 1 - Définitions -

- Exercice 1 - Digraphes eulériens

Montrer qu'un digraphe D est eulérien si, et seulement si, D contient une tournée fermée contenant tous les arcs de D (*indication* : considérer une tournée fermée de D de longueur maximale).

- Exercice 2 - Digraphes réguliers

Montrer que tout digraphe régulier D possède un cycle-factor. On pourra chercher un couplage parfait dans le $B_a(D)$ biparti d'adjacence de D défini par $V(B_a(D)) = \{v^+ : v \in V(D)\} \cup \{v^- : v \in V(D)\}$ et $A(B_a(D)) = \{x^+x^- : xy \in A(D)\}$.

- Exercice 3 - Tri topologique

Montrer que tout digraphe acyclique possède une source (et un puit). En déduire qu'un graphe est acyclique si, et seulement si, il admet un tri topologique.

- Exercice 4 - 2-king

Un *2-king* dans un tournoi est un sommet dont tous les autres sommets sont à distance orienté 1 ou 2. Montrer qu'un sommet de degré sortant maximum est toujours un 2-king dans un tournoi.

- Exercice 5 - Bipartis fortement connexes

Montrer qu'un digraphe fortement connexe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycles orientés de longueur impaire. On pourra commencer par montrer que toute marche fermée de longueur impaire contient un cycle orienté de longueur impaire (une *marche fermée* est une suite d'arc e_1, \dots, e_p , pas forcément distincts mais avec $fin(e_i) = debut(e_{i+1})$ pour $i = 1, \dots, p-1$ et $fin(e_p) = debut(e_1)$).

- Exercice 6 - Out-branching

Montrer qu'un digraphe D admet un out-branching si et seulement si il a une unique composante fortement connexe initiale.

- Exercice 7 - Conjecture de Caccetta-Häggkvist

Montrer que si $d^+(x) \geq n/3$ et $d^-(x) \geq n/3$ pour tout sommet x d'un digraphe D , alors D contient un 2-cycle, un 3-cycle ou un 4-cycle.

- Exercice 8 - Conjecture de Thomassé

Montrer qu'un digraphe sans 2-cycle D contient un cycle orienté de longueur supérieure ou égale à $\frac{3}{2} \cdot \delta^+(D)$, où $\delta^+(D)$ est le plus petit degré sortant des sommets de D . (*Indication* : considérer un cycle orienté C de longueur maximale et un chemin P de longueur maximale partant de C et disjoint - sauf en son départ - de C).

- Chapitre 2 - Chemins -

- Exercice 9 - Tournoi transitif

Montrer que si un tournoi T a un seul chemin hamiltonien, alors T est un tournoi transitif.

- Exercice 10 - Dillworth

Prouver le Théorème de Dillworth : dans un ordre, la taille d'une antichaine (stable) maximale est égale au nombre minimal de chaîne (chemin) qui partitionne l'ordre (bien penser à prouver les deux sens de l'égalité...).

- Exercice 11 - Théorème d'Erdős-Sekeres

1 - Montrer que l'énoncé du Théorème de Gallai-Roy est 'serré', c'est-à-dire qu'il existe un graphe orienté de nombre chromatique k qui ne contient pas de chemin orienté de longueur $k + 1$.

2 - Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté. On considère (A_1, A_2) une partition de A , l'ensemble des arcs de D , et pour $i = 1, 2$, on note D_i le graphe (V, A_i) induit sur V par l'ensemble d'arcs A_i . Montrer que $\chi(D) \leq \chi(D_1) \times \chi(D_2)$.

3 - En déduire une preuve du Théorème d'Erdős-Sekeres :

De toute suite d'entiers de longueur $kl + 1$, on peut extraire une sous-suite croissante de longueur $l + 1$ ou une sous-suite décroissante de longueur $k + 1$.

- Exercice 12 - Version sommet de Menger

Prouver la version sommet du Théorème de Menger. *Indication* : remplacer chaque sommet x par deux sommets x^- et x^+ reliés par l'arc x^-x^+ et tels que x^- soit voisin sortant de chaque v^+ pour v voisin entrant de x et x^+ soit voisin entrant de chaque v^- pour v voisin sortant de x ; appliquer ensuite la version arc de Menger.

- Exercice 13 - Une condition suffisante pour être 2-linked

Soit $D = (V, A)$ un digraphe tel que pour tout couple (x, y) de sommets disjoints de D tel que $xy \notin A$ on ait $d^+(x) + d^-(y) \geq n + 2$. Montrer que D est 2-linked.

- Chapitre 2 - Cycles -

- Exercice 14 - Pancyclicité

Montrer que si T est un tournoi fortement connexe alors T est sommet-pancyclique, c'est-à-dire que pour tout sommet x de T , tout entier k avec $3 \leq k \leq n$, x est contenu dans un circuit de T de longueur k . Donner un exemple de tournoi qui n'est pas arc-pancyclique.

- Exercice 15 - MSSS

Montrer qu'un digraphe fortement connexe sans cut-vertex de taille 1 admet un MSSS qui ne contient pas de 2-cycle.

- Exercice 16 - Feedback arc set

Montrer que le nombre minimal d'arc à enlever dans un digraphe D pour le rendre acyclique est égal au nombre minimal d'arc à retourner dans D pour le rendre acyclique.