- Stage Recherche M2 -
- Partitions acycliques de graphes orientés -

- Encadrant et lieu de stage -

Stéphane Bessy
mail : `bessy@lirmm.fr`
page web : `http://www.lirmm.fr/~bessy`

Le stage se déroulera au sein de l'équipe AlGCo (page web : `http://www.lirmm.fr/algco/`) du département informatique du Lirmm (Montpellier).

- Sujet -

Au regard des développements de la théorie des graphes ces dernières décennies, l'étude des graphes orientés semble encore marginale. L'objectif du stage est de se familiariser avec les techniques structurelles et algorithmiques propres à cette classe d'objets combinatoires. Plus précisément on se focalisera sur des questions liées à une notion naturelle de coloration des graphes orientés.

Un graphes orienté est dit *acyclique* si il ne contient pas de cycle orienté. De nombreux problèmes algorithmiques sont faciles (résolubles en temps polynomial) sur des graphes orientés acycliques alors qu'il sont (NP-)difficiles sur les graphes orientés en général. On peut citer par exemple : Chemin-Hamiltonien, Min-Partition-En-Chemins ou k-Linkage. Il est ainsi naturel de considérer cette classe de graphe comme 'simple' et de chercher à décomposer un graphe orienté en parties simples. Ainsi, pour un graphe orienté $D = (V, E)$, une fonction de V dans $\{1, \dots, k\}$ est une *k-coloration orienté* de D si aucun cycle orienté de D n'est monochromatique. Le *nombre chromatique orienté* de D, noté $\chi_o(D)$ est alors le minimum des entiers k tel que D admette une k-coloration orienté.
De nombreuses questions sont ouvertes concernant ce type de coloration. Une des plus fameuses, probablement, est due à V. Neumann-Lara qui initia dans les années 80 l'étude de ce paramètre. C'est une forme d'équivalent orienté du Théorème des 4 couleurs.

Conjecture 1 (V. Neumann-Lara, 1982, [2])**.** *Si D est un graphe orienté planaire alors $\chi_o(D) \leq 2$.*

Des résultats partiels sont connus concernant cette conjecture, notament le cas des graphes planaires orientés sans cycle orienté de taille 3 et 4 (voir [1])

Durant le stage, on s'interessera à une question précise, possiblement plus 'attaquable' que la Conjecture de Neumann-Lara. Cette question concerne la possibilité d'obtenir des graphes de grand nombre chromatique orienté.

Conjecture 2. *Si G est un graphe de nombre chromatique (usuel) k, alors G admet une orientation dont le nombre chromatique orienté est de l'ordre de $k/\log k$.*

Une première étape à été obtenu récément par Mohar et Wu [3] en prouvant que l'énoncé cidessus est correct en remplaçant le nombre chromatique par un paramètre plus petit (le nombre chromatique fractionnaire) et plus maniable.

- Plan d'attaque -

Le stage commencera par une étude bibliographique des résultats et questions liés á la coloration orienté, tant structurels qu'algorithmiques. Le livre de référence sur les graphes orientés est celui de J. Bang-Jensen et G. Gutin [6]. Les résultats de Mohar et Wu [3] utilisent des méthodes probabilistes et cela semble être un outils incontournable pour résoudre la Conjecture 2. Une bonne introduction des méthodes probabilistes en Théorie des Graphes est donné dans [4], Chapitre 11, ou [5], Chapitre 13.

Quelques pistes et/ou questions intermédiaires pour attaquer la Conjecture 2 pourraient être les suivantes :

— On fera le point sur l'aspect algorithmique du calcul de χ_o. On regardera ce qui se passe pour certaines classes de graphes orientés (par exemple, quel est le statut du problème consistant à determiner si $\chi_o \leq 2$ pour un tournoi ?).
— Peut-on prouver Conjecture 2 sur certaines familles de graphes à grand nombre chromatique. Par exemple, c'est possible de le faire pour les graphes de Knesser en s'appuyant sur le Théorème de Borsuk-Ulam (voir le document de travail [7]). Comme autre famille de graphes à grand nombre chromatique, on pourra étudier, par exemple, les graphes obtenus par la construction de Myscielski (voir [5]).
— Comment se comporte la construction de Hàjos ([4]) vis-à-vis de la Conjecture 2 ?
— Peut-on appliquer le lemme de régularité de Széméredi ([4]) pour obtenir des résultats en lien avec la Conjecture 2 ?
— ...

Références

[1] A. Harutyunyan, B. Mohar, Planar digraphs of digirth five are 2-colorable , *Journal of Graph Theory*, to appear, 2014. Ref. Arxiv : *arXiv :1401.2213*.

[2] V. Neumann-Lara, Vertex colourings in digraphs. Some Problems. *Seminar notes, University of Waterloo*, July 8, 1985 (communicated by A. Bondy and S. Thomassé).

[3] B. Mohar, H. Wu, Dichromatic Number and Fractional Chromatic Number of a Graph, *3rd annual Mississippi Discrete Mathematics Workshop*, Starkville, 2014.

[4] R. Diestel, Graph Theory, *Springer* (2010).

[5] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. Graph Theory, *Springer* (2008).

[6] J. Bang-Jensen and G. Gutin, Digraphs : Theory, Algorithms and Applications 2nd edition, Springer Verlag, London 2009.

[7] S. Bessy, A. Harutyunyan and S.Thomassé. Orientation de graphe avec grands nombre chromatique orienté. *Document de travail*, 2014.