Graphes d'arcs circulaires unitaires : algorithme de reconnaissance linéaire et existence d'un modèle compact

Jean Daligault

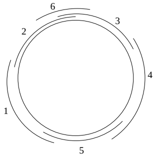
Stage de M2, sous la direction de Michel Habib, LIAFA

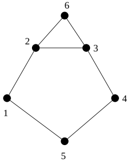
November 6, 2007

Outline

- Préliminaires
- Algorithme linéaire de reconnaissance
- Modèle compact

Graphes d'arcs circulaires : définitions





- M est un modèle de $G \longrightarrow G$ est un *graphe d'arcs circulaires* (CA) [généralisation des graphes d'intervalles]
- $\longrightarrow$ graphes d'arcs circulaires propres [PCA]
- $\longrightarrow$ graphes d'arcs circulaires unitaires [UCA]
- $\longrightarrow$ graphes d'arcs circulaires de Helly [HCA]

Motivations

- Biologie, génomique : graphes d'intervalles $\rightarrow$ outils clé dans l'étude de l'ADN (Benzer, 50' - 60')
- CA et sous-classes : molécules circulaires, fragments circulaires de l'ADN.
- UCA : ordonnancement (feux de signalisation de durée identique, emploi du temps ...), compilation (allocation "équitable" de registres), psychologie mathématique (graphes d'indifférence), ...

Résultats existants

- CA : algorithme de reconnaissance linéaire (McConnell 2003)
- PCA : algorithme de reconnaissance linéaire (Deng, Hell, Huang 1996)
- HCA : algorithme de reconnaissance linéaire (Lin, Szwarcfiter 2007)
- UCA : algorithme de reconnaissance quadratique (Duran, Gravano, McConnell, Spinrad, Tucker 2004)

UCA : problèmes ouverts (après Duran et al 04)

- Existence d'un algorithme de reconnaissance linéaire pour les graphes UCA ?
- Existence d'une représentation compacte d'un modèle UCA (coordonnées entières polynomiales pour les extrémités)

$\longrightarrow$ Min Chih Lin, Jayme L. Szwarcfiter (06) !!

Résultats

Théorème

Il existe un algorithme linéaire de reconnaissance des graphes UCA

Théorème

Il existe un algorithme polynomial (cubique) calculant une représentation compacte pour un graphe UCA

Algorithme linéaire de reconnaissance des graphes UCA : Preuve (1)

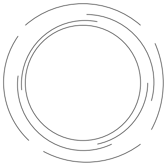


Figure: CI$(4, 1)$

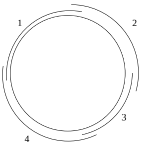


Figure: un $(4, 1)$-circuit

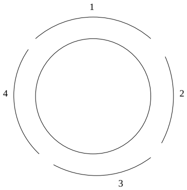


Figure: une $(4, 1)$-séquence indépendante

Algorithme linéaire de reconnaissance des graphes UCA : Preuve (2)

Théorème (Tucker)

Soit G un graphe PCA. G est un graphe UCA
$\iff$ il n'a pas de $\mathrm{CI}(n, t)$ comme sous-graphe induit, avec n et t premiers entre eux, et $2t < n$
$\iff$ G ne contient pas une (n, t)-séquence indépendante et un (n, t)-circuit, avec n et t premiers entre eux et $2t < n$.

Théorème (Tucker)

Soit G un graphe PCA. Soit $\mathcal{C}$ un (k, p)-circuit et I une (l, q)-séquence indépendante de G. Alors $\frac{k}{p} \geq \frac{l}{q}$.

Algorithme linéaire de reconnaissance des graphes UCA : Preuve (3)

$\longrightarrow$ Recherche de séquence indépendante et circuit optimaux !
Intuition : bornes sur le périmètre P du cercle d'un éventuel modèle UCA.

- Existence d'un (n, k)-circuit : $P \leq n/k$
- Existence d'une (m, j)-séquence indépendante : $P > m/j$

Algorithme linéaire de reconnaissance des graphes UCA

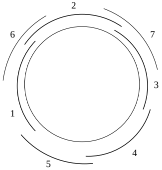
Soit G un graphe.

- On teste si G est PCA.
- On trouve un modèle PCA de G sans paire couvrante.
- On cherche un circuit et une séquence indépendante optimaux.
- ratios différents $\Rightarrow$ UCA ; ratios égaux $\Rightarrow$ $CI(n, k)$

Algorithme linéaire de reconnaissance des graphes UCA : Preuve (4)

Soit G un graphe PCA. On fixe un modèle PCA de G.

- Arc favori (depuis un autre arc) : arc qui l'intersecte s'étendant le plus loin dans le sens horaire
- Parcours : suite d'arcs favoris depuis leur prédécesseur
- Circuit cohérent : premier arc favori depuis le dernier



Algorithme linéaire de reconnaissance des graphes UCA : Preuve (5)

Théorème

Tout circuit cohérent est optimal

Algorithme linéaire de reconnaissance des graphes UCA

Soit A un arc. On construit un parcours depuis A et on s'arrête dès la deuxième occurence d'un arc (dès que le parcours est de la forme $A\alpha B\omega B$). La portion du parcours entre ces deux occurrences ($B\omega$) est un circuit cohérent, donc optimal.

Le cas d'une séquence indépendante optimale est symétrique.

UCA : Modèle compact (1)

Idées de Tucker

- On part d'un modèle PCA avec les extrémités réparties régulièrement
- On calcule les bornes sup et inf
- On ajuste le périmètre du cercle à une valeur entre ces bornes
- On va toujours conserver l'ordre circulaire des extrémités
- Algorithme par étapes : ajuster la longueur d'un arc à 1 en déplaçant une extrémité
- Choc avec une extrémité d'arc déjà traité / non traité
- Cascade d'arcs en rotation $\rightarrow$ circuits d'arcs traités.

UCA : Modèle compact (2)

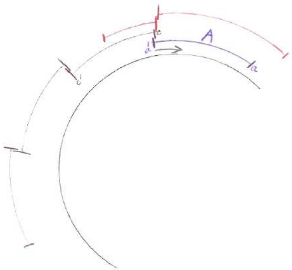


Figure: On déplace a' vers a → rotation d'un *circuit* → borne supérieure sur le périmètre assure le non-bloquage

UCA : Modèle compact (3)

Pour s'assurer que les coordonnées seront polynomiales :

- Notons p/k et q/l les bornes inf et sup sur le périmètre
- Changement d'échelle par $\frac{p/k+q/l}{2}\frac{1}{2n}kl$
- arcs de longueur kl
- gap incompressible de $\frac{kq-pl}{3n}$ entre les extrémités

$\rightarrow$ coordonnées entières en $O(n^4)$.

Merci !