

Plan

Contexte : analyse d'images, segmentation d'image, estimation de caractéristiques géométriques

Définitions : régions et frontières 2D

Droite discrète : définitions, caractérisations, algorithmes de reconnaissance

Tangente à une courbe discrète 2D : définitions, calcul convergence

Longueur et courbure d'une courbe discrète 2D

Contexte : l'analyse d'images



Applications : aide au diagnostic médical, analyse d'images satellites, analyse de documents (systèmes OCR), recherche d'images par le contenu, contrôle qualité, vidéo-surveillance...

Deux sous-domaines :

Segmentation : décomposition d'une image en région "qui ont un sens", les objets de l'image.

Reconnaissance de formes : associer une catégorie à une (partie d'une) image ⇒ utilisation des caractéristiques, géométriques entre autres, des objets d'intérêt.

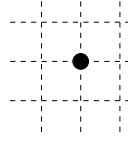
Connexités

- **Plan discret** : \mathbb{Z}^2 , **Point discret** : point de \mathbb{Z}^2
- 2 point discrets P et Q sont dits **4-connexes** ssi

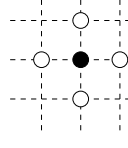
$$|x_P - x_Q| + |y_P - y_Q| = 1$$

- 2 point discrets P et Q sont dits **8-connexes** ssi

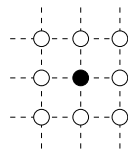
$$\max(|x_P - x_Q| + |y_P - y_Q|) = 1$$



Point discret



4-connexité

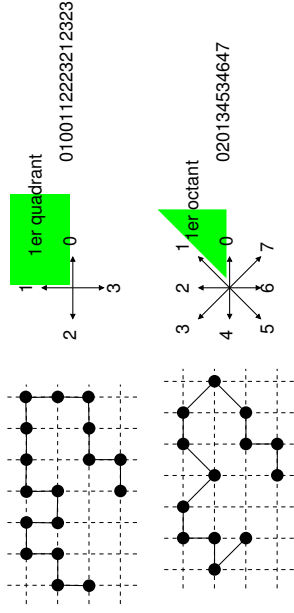


8-connexité

Chemin discret

Un **chemin discret** k -connexe est une suite de points discrets (P_0, P_1, \dots, P_n) tels que $\forall i \in 1..n, P_{i-1}$ et P_i sont k -adjacents.

Code de Freeman : (P_0, \dots, P_n) est représenté par $(P_0, d_0, \dots, d_{n-1})$. La direction d_i code le déplacement élémentaire de P_i à P_{i+1} .

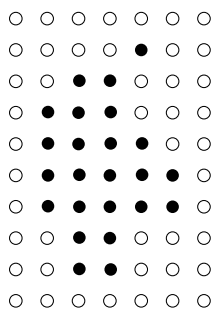


Composante connexe / région 2D

Ensemble connexe : ensemble de points discrets E tel que $\forall P, Q \in E, \exists$ un chemin discret (M_0, \dots, M_n) tel que $M_i \in E, M_0 = P, M_n = Q$.

Composante connexe d'un ensemble de points discrets : ensemble connexe maximal (ou classe d'équivalence pour la relation d'adjacence).

Exemple : ensemble discret composé d'une composante 8-connexe (de 2 composantes 4-connexes)

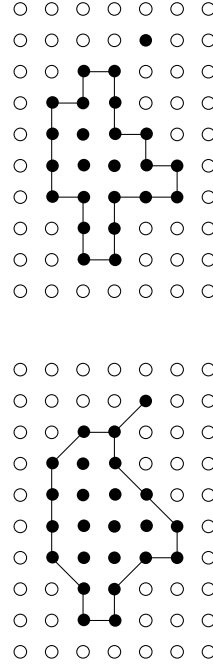


Frontière d'une région 2D

Définition classique

La **frontière** d'une région 8-connexe (respectivement 4-connexe) R est l'ensemble des points de R dont au moins un des 4-voisins (resp. 8-voisins) n'est pas élément de R .

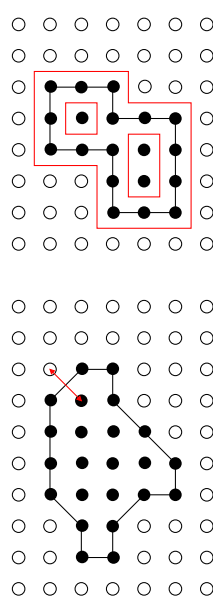
⇒ La frontière est composée de chemins 8-connexes (resp. 4-connexes).



Frontière d'une région 2D

Problèmes de la définition classique

- 2 régions adjacentes n'ont pas de portion de frontière commune
- Une frontière 8-connexe ne sépare pas le plan discret en deux composantes 8-connexes distinctes.
- Une frontière 4-connexe peut séparer le plan en plus de 2 composantes 4-connexes distinctes.

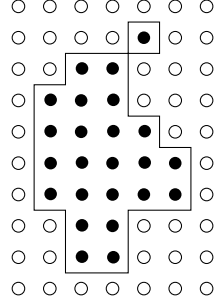


Frontière d'une région 2D

Définition interpixels

Chaque point discret de la région est vu comme un pixel (carré unitaire de côté 1 centré sur le point).

La **frontière interpixel** est une suite d'arêtes de pixels du bord de la région. On peut représenter cette frontière par un chemin discret 4-connexe (décalé dans la grille demi-entière).



Suivi de frontière interpixel 2/2

Algorithme

$$\Delta x = \{1, 0, -1, 0\}$$

$$\Delta y = \{0, -1, 0, 1\}$$

Si $P = \{x + \Delta x[d], y + \Delta y[d] + \Delta y[d - 1]\}$ pt objet
 $d = d-1$
 $(x, y) = P$

Sinon si $P = \{x + \Delta x[d], y + \Delta y[d]\}$ pt objet
 $(x, y) = P$

Sinon
 $d = d+1$

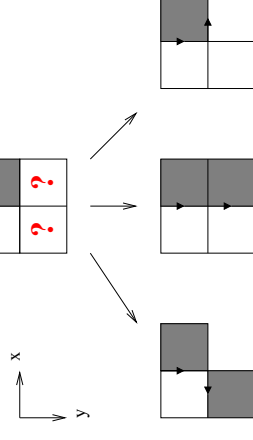
Ajouter d au résultat

Suivi de frontière interpixel 1/2

Objet 8-connexe

Recherche du 1er point (x, y) par balayage, initialisation du résultat à 23, initialisation de la direction courante $d = 3$. On suppose que la région se trouve à gauche du contour.

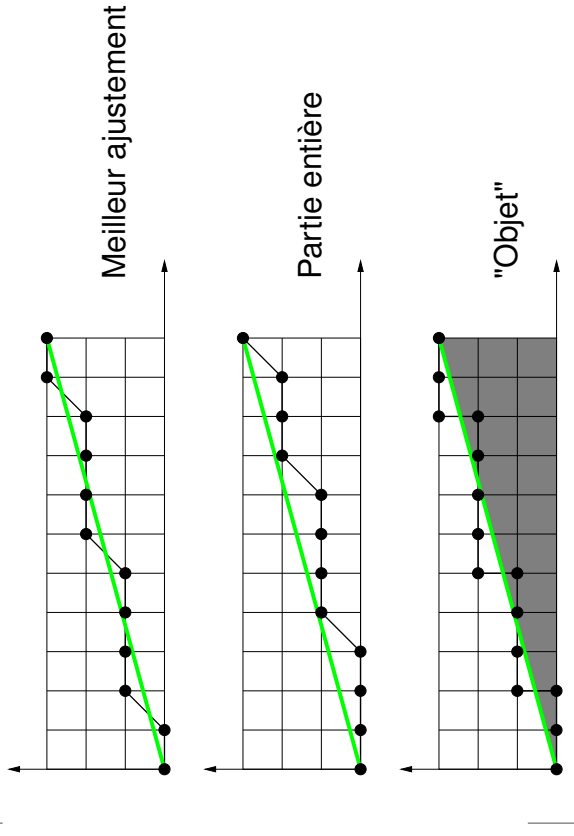
Recherche de la direction suivante : à chaque pas on teste un ou deux points



Fin du suivi : retour au 1er point.

Droite discrète - Définition

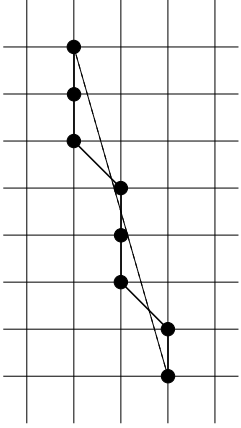
Discretisation d'une droite réelle



Caractérisation de Rosenfeld (74)

Un chemin discret 8-connexe C est un segment de droite discrète ssi il vérifie la **propriété de la corde** :

$$\forall P, Q \in C, \forall m \in [P, Q], \exists M \in C / \max(|x_M - x_m|, |y_M - y_m|) < 1$$



Algorithme de reconnaissance

[Troesch 93]

basé sur la structure de droite discrète - On considère le mot de Freeman du chemin discret testé.

Itérer

1- Soustraire l'élément de code le plus petit
 → mot sur 0, 1 (éventuellement échanger 0 et 1)

2- Remplacer chaque palier 00...01 par sa longueur

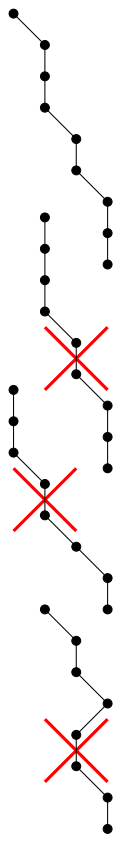
Jusqu'à obtenir un mot constant

0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
4	4	3	3	4	4	4	3	3	4	4	3	4	4	4	3	4	4	4	4	3	4	4
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
2																						

Caractérisation de Freeman (74)

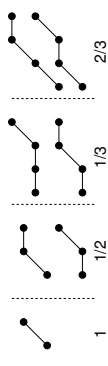
Un chemin discret 8-connexe est un segment de droite discrète ssi

- Son mot de Freeman est composé au plus de deux directions élémentaires différentes dont la différence est 1 modulo 8.
- Si le mot est composé de deux directions, une de ces directions apparait systématiquement de manière isolée.
- Les occurrences de la direction isolée sont réparties de la manière la plus uniforme possible dans le mot.



Motifs et sous-motifs

Une droite discrète de pente rationnelle est composée d'un motif qui se répète



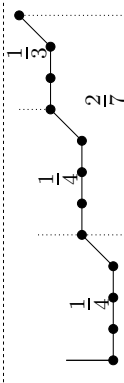
Exemple : droite de pente $p = \frac{3}{11} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$ motif $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4} < p < \frac{1}{3}$ motif $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3 + \frac{1}{1+0}} < p < \frac{1}{3 + \frac{1}{1+1}}$ motif $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} < p < \frac{2}{7}$ motif $\frac{1}{4}$

pente exacte $\frac{3}{11}$



Définition arithmétique 1/2

[Réveillés 91]

Caractéristiques de la droite : $(a, b, \mu) \in \mathbb{Z}^3, \omega \in \mathbb{N}$

pende : $\frac{a}{b}$, position dans le plan : μ , épaisseur : ω

La droite de caractéristiques (a, b, μ, ω) est l'ensemble des points discrets vérifiant :

$$\mu \leq ax - by < \mu + \omega$$

Droites d'appui : $ax - by = \mu$ et $ax - by = \mu + \omega - 1$

Points d'appui : points discrets appartenant aux droites d'appui.

Algorithme de reconnaissance 1/9

Algorithme **incrémental** de reconnaissance de segment discret le long d'un chemin 8-connexe [Debled 95]

Principe : on ajoute un par un les points du chemin discret qu'on veut identifier à un segment de droite discrète. A chaque étape, on met à jour si nécessaire les caractéristiques du segment reconnu.

Soient $S = (P_0, \dots, P_n)$ un segment de droite discret du 1er octant et M le point à ajouter.

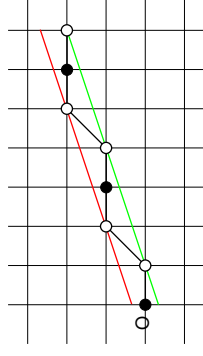
$S + M$ **est-il un segment de droite** ? Si oui, quelles sont ses caractéristiques ?

Condition nécessaire : M est voisin de P_n et la direction élémentaire de P_n à M est compatible avec les deux (au plus) directions composant $S \Rightarrow d(P_n, M) = O$ ou 1

Définition arithmétique 2/2

$\omega = \max(|a|, |b|) \Rightarrow$ droite 8-connexe

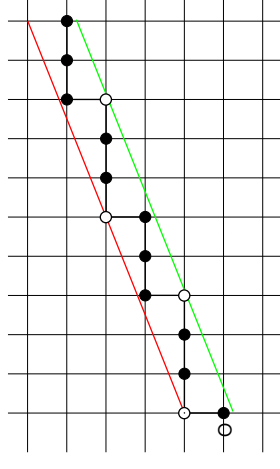
$\omega = |a| + |b| \Rightarrow$ droite 4-connexe



$(a, b, \mu) = (1, 3, -1)$

- Droite d'appui supérieure
- Droite d'appui inférieure
- o Point d'appui

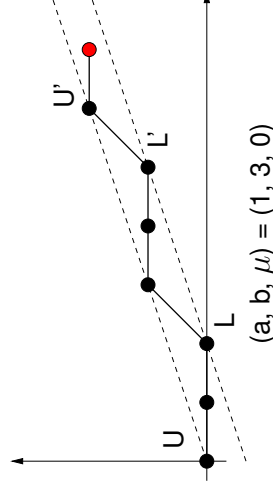
$(a, b, \mu) = (2, 5, -5)$



Algorithme de reconnaissance 2/9

Cas 1 : $\mu \leq ax_M - by_M < \mu + b$

M prolonge S sans modification de caractéristiques.



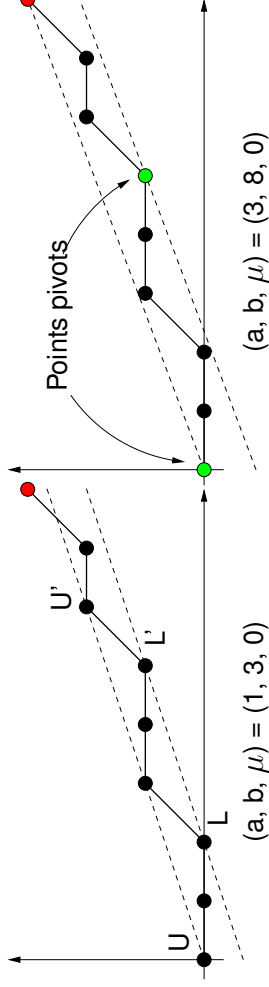
$(a, b, \mu) = (1, 3, 0)$

- U point d'appui supérieur d'abscisse minimum
- U' point d'appui supérieur d'abscisse maximum
- L point d'appui inférieur d'abscisse minimum
- L' point d'appui inférieur d'abscisse maximum

Algorithme de reconnaissance 3/9

Cas 2.1 : $ax_M - by_M = \mu - 1$

$S + M$ est un segment de caractéristiques différentes de celles de S : la pente de $S + M$ est supérieure à la pente de S .

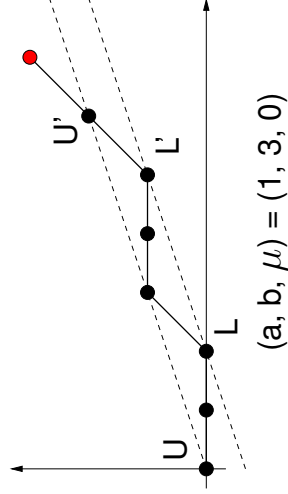


Géométrie d'une courbe discrète - p.21/44

Algorithme de reconnaissance 5/9

Cas 3: $ax_M - by_M < \mu - 1$ ou $ax_M - by_M > \mu + b$

$S + M$ n'est pas un segment de droite.

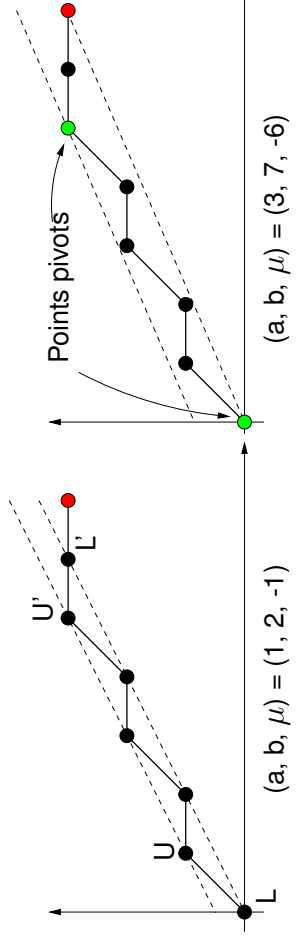


Géométrie d'une courbe discrète 2D - p.23/44

Algorithme de reconnaissance 4/9

Cas 2.2 : $ax_M - by_M = \mu + b$

$S + M$ est un segment de caractéristiques différentes de celles de S : la pente de $S + M$ est inférieure à la pente de S .



Géométrie d'une courbe discrète

Algorithme de reconnaissance 6/9

Ajout d'un point

$reste = ax_M - by_M$

Si $(\mu \leq reste < \mu + b)$

Si $(reste == \mu)$ M est point d'appui sup.
 $U' = M$

Si $(reste == \mu + b - 1)$ M est pt d'appui inf

$L' = M$

Si non si $(reste == \mu - 1)$ La pente augmente

$L = L'$

$U' = M$

$a = y_M - y_U$

$b = x_M - x_U$

$\mu = ax_M - by_M$

Géométrie d'une courbe discrète

Ajout d'un point (suite)

Si on si (reste == $\mu + b$) La pente diminue

$$U = U'$$

$$L' = M$$

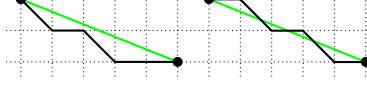
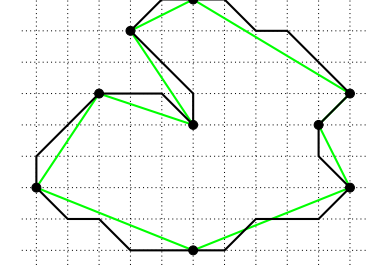
$$a = y_M - y_L$$

$$b = x_M - x_L$$

$$\mu = ax_M - by_M - b + 1$$

Si on M ne permet pas d'agrandir le segment

Appication directe : polygonalisation



Remarque : perte d'information

Algorithme de reconnaissance 9/9

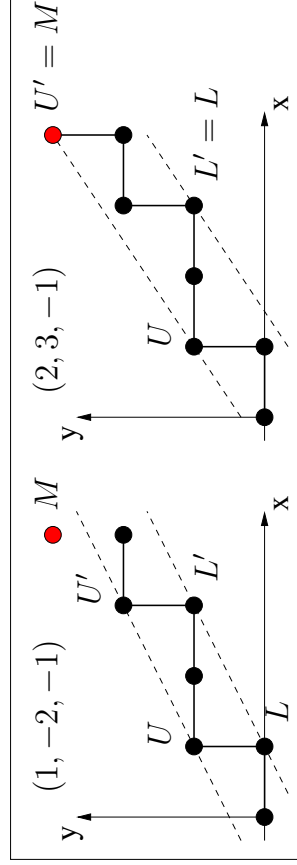
Géométrie d'un contour discret 2D

Cas 4-connexe

Test d'ajout d'un point M à un segment de droite :

(1) M est entre les droites d'appui : OK

(2) $ax_M - by_M = \mu - 1$: M est "un peu trop au dessus"



(3) $ax_M - by_M = \mu + a + b$: M est "un peu trop au dessous"

Problématique

Un nombre infini de formes ont la même discrétisation \Rightarrow il n'y a pas UNE bonne approximation des caractéristiques géométriques

Hypothèses sur la frontière sous-jacente : courbe lisse de courbure bornée par exemple

Estimateurs : longueur, tangente, courbure

Propriétés souhaitées :

- convergence asymptotique
- bonne estimation à faible résolution
- préservation des propriétés de la forme (convexité par exemple)

Tangente discrète 2D

Approximation de la tangente par une droite discrète

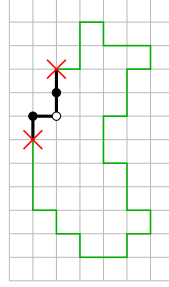
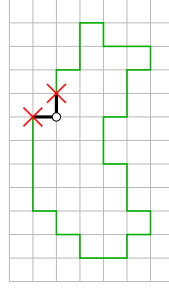
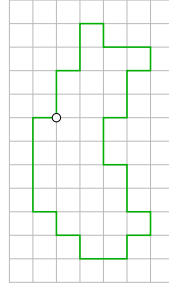
Définition : la **tangente discrète symétrique** au point P_i de la courbe discrète C est la plus longue portion de C centrée en P_i qui soit un segment de droite discret.

Algorithme : ajout de paires de points autour de P_i , $(P_{i-1}, P_{i+1}) \dots (P_{i-k}, P_{i+k})$ tant que $(P_{i-k}, \dots, P_{i+k})$ est un segment de droite.

⇒ adapter l'algorithme de reconnaissance d'un segment de droite discrète de façon à pouvoir étendre un segment du 1er quadrant par un point d'abscisse négative.

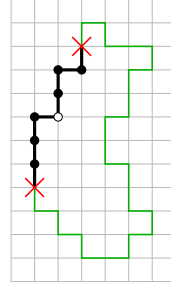
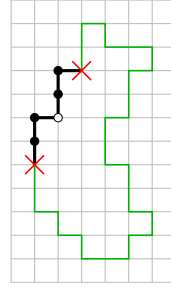
Tangente discrète 2D

Tangente symétrique autour d'un point



$(-1, 1, -1)$

$(-1, 2, -2)$



$(-1, 2, -2)$

$(-2, 5, -5)$

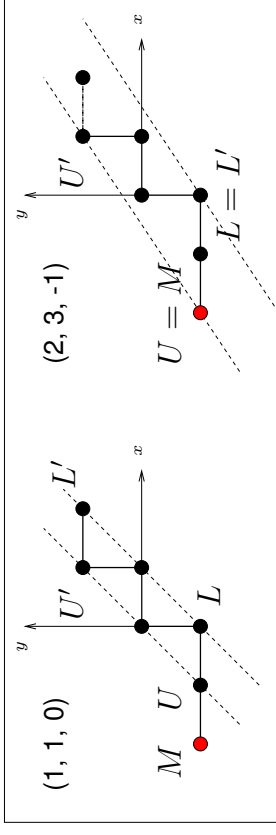
Reconnaissance d'un segment 4-conne

Ajout d'un point M d'abscisse positive : voir tr. 24

Ajout d'un point M d'abscisse négative

(1) M est entre les droites d'appui : OK

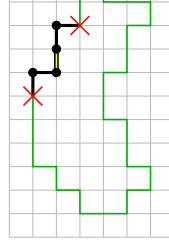
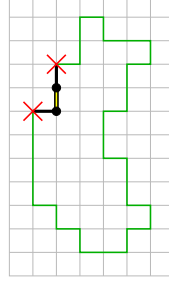
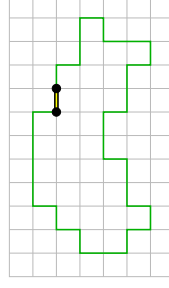
(2) $ax_M - by_M = \mu - 1$: M est "un peu trop au dessus"



(3) $ax_M - by_M = \mu + a + b$: M est "un peu trop au dessous"

Tangente discrète 2D

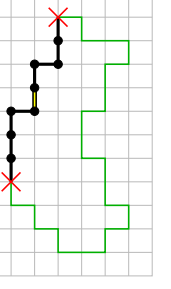
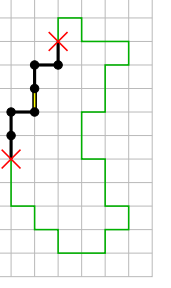
Tangente symétrique autour d'une arête



$(0, 1, 0)$

$(-1, 2, -2)$

$(-1, 2, -2)$

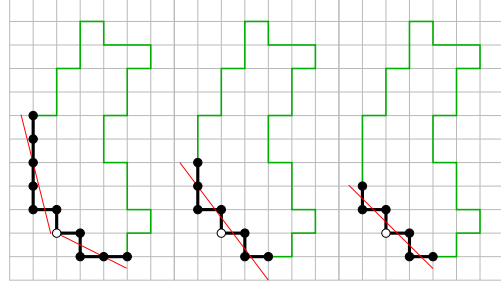
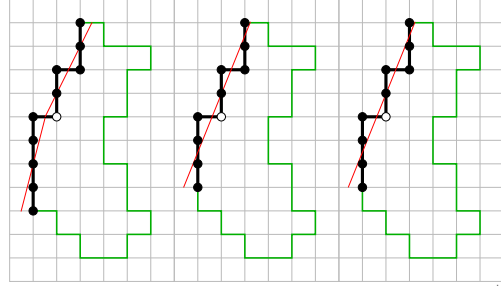


$(-1, 2, -2)$

$(-2, 5, -5)$

Tangente discrète 2D

Il existe plusieurs définitions basées sur un segment [Vialard 96], [Feschet 99], [Lachaud 03], [Lachaud 05].



Demi-tangentes

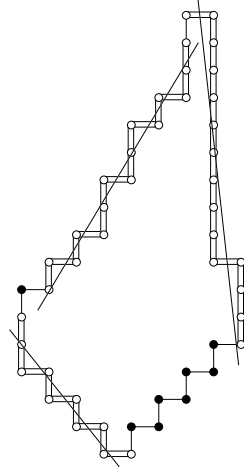
Feschet-Touagne

Etendue

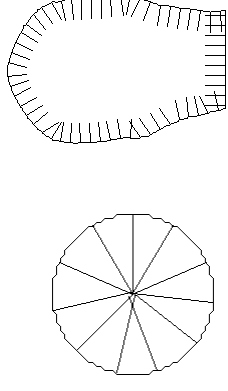
Segment maximal 1/3

Une suite de points (P_i, \dots, P_j) d'un contour discret est un **segment maximal** ssi:

- (P_i, \dots, P_j) est un segment de droite,
- (P_{i-1}, \dots, P_j) n'est pas un segment de droite,
- (P_i, \dots, P_{j+1}) n'est pas un segment de droite.



Tangente discrète 2D



Avantages :

- fenêtre de taille variable suivant la configuration du contour
- algorithme indépendant du sens de parcours et du point de départ
- évaluation assez précise
- algorithme similaire en 4 ou 8-connexité

Inconvénients :

- compromis localisation/précision
- problème / convexité (tgte symétrique, demi-tgte)
- problème / convergence asymptotique

Segment maximal 2/3

Calcul incrémental (complexité linéaire)

Calcul_segment_max_suisvant $(P_i \dots P_j)$

first = i+1

last = j+1

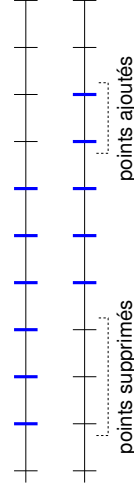
Tant que $(P_{first} \dots P_{last})$ n'est pas un segment

first = first + 1 //enlever un point

Tant que $(P_{first} \dots P_{last})$ est un segment

last = last + 1 //ajouter un point

retourner $(P_{first} \dots P_{last-1})$



Segment maximal 3/3

Calcul incrémental - suppression d'un point

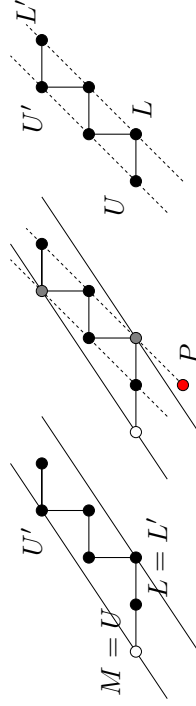
Idée : si l'ajout d'un point a modifié le segment, sa suppression doit rétablir les anciennes caractéristiques.

Exemple :

Le point à supprimer vérifie $M = U$ et $\overrightarrow{MU'} = (b, a)$. Son ajout a fait diminuer la pente.

U' et L restent inchangés lors de la suppression.

P est point d'appui inférieur de la droite après suppression \Rightarrow nouvelles caractéristiques.



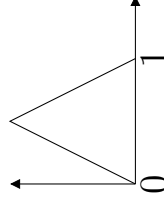
Géométrie d'une courbe discrète 2D - p.37/44

Nouvelle définition de la tangente 2/2

Orientation de la tangente au point P_k : moyenne pondérée des orientations des segments maximaux passant par P_k

$$\theta_k = \frac{\sum_M \lambda(e_M(k)) \theta_M}{\sum_M \lambda(e_M(k))}$$

Exemple de fonction λ :



Avantages :

- précision de l'estimation
- convergence asymptotique
- respect de la convexité

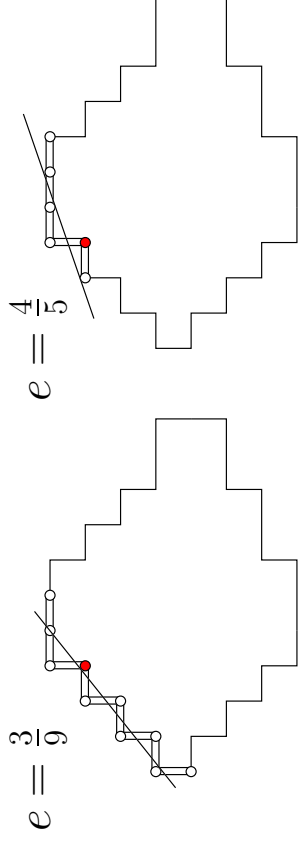
Géométrie d'une courbe discrète 2D - p.39/44

Nouvelle définition de la tangente 1/2

[Lachaud 05]

Excentricité du point P_k relativement au segment maximal $M = (P_i, \dots, P_j)$ ($i \leq k \leq j$) :

$$e_M(k) = \frac{k-i}{j-i}$$



Géométrie d'une courbe discrète

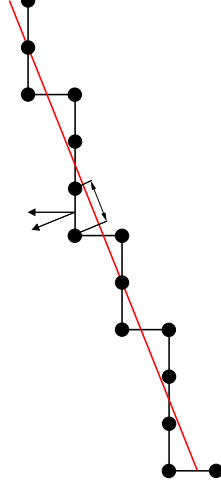
Longueur / périmètre d'un contour

Contribution d'une arête : $\vec{n} \cdot \vec{e}$

\vec{n} : vecteur normal calculé

\vec{e} : normale triviale

$$l = \sum \vec{n}_i \cdot \vec{e}_i$$



Remarque : il existe des estimateurs basés sur le nombre de motifs élémentaires du contour (par exemple nombre de coins pour l'estimateur de Rosen-Proffit).

Géométrie d'une courbe discrète

Courbure le long d'un contour 1/2

Une définition de la courbure :

dérivée de l'orientation de la tangente [Worring 93].

- Dérivée lissée : convolution par la dérivée d'une gaussienne.

$$\kappa_i = \frac{\hat{\theta}_i * G'_\sigma}{1.1107} \quad G'_\sigma(i) = \left(\frac{i}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i^2}{2\sigma^2}} \right)_{i=-m..m}$$

Taille de la fenêtre : $m = 3\sigma$, $\sigma = 3$ par exemple.

- Calcul par différences finies :

$$\kappa_i = \frac{\hat{\theta}_{i+k} - \hat{\theta}_{i-k}}{d(P_{i-k}, P_{i+k})}$$

ou

$$\kappa_i = \frac{\|\vec{t}_{i+k} - \vec{t}_{i-k}\|}{d(P_{i-k}, P_{i+k})}$$

Géométrie d'une courbe discrète 2D - p.41/44

Références 1/2

[Rosenfeld 74] A. Rosenfeld. Digital straight segments. IEEE Trans. Computers, 23:1264-1269, 1974.

[Freeman 74] H. Freeman. Computer processing of line drawing images. ACM Comput. Surveys, 6(1):57-98, 1974.

[Réveillé 91] J.-P. Réveillé. Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, 1991.

[Troesch 93] A. Troesch. Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide et reconnaissance de segments. Theoretical Computer Science, 115:291-319, 1993.

[Worring 93] M. Worring and A.W.M. Smeulders. Digital curvature estimation. CVGIP: Image Understanding, 58:366-382, 1993.

[Chassery 91] J.-M. Chassery et Annick Montanvert. Géométrie discrète en analyse d'images. Hermès, 1991.

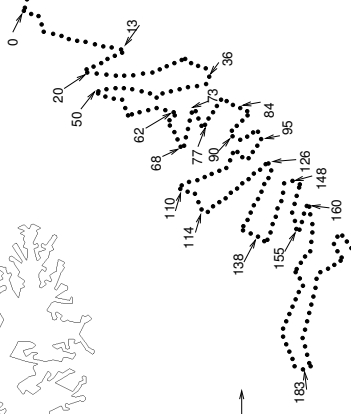
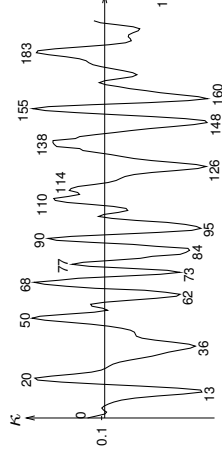
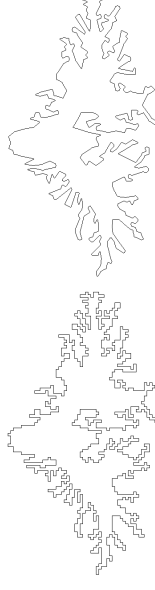
[Debled 95] I. Debled-Renesson and J.-P. Réveillé. A linear algorithm for segmentation of discrete curves. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 9:635-662, 1995.

[Vialard 96] A. Vialard. Geometrical parameters extraction from discrete paths. In Proc. DGC'96, volume 1176 of LNCS, Springer.

Géométrie d'une courbe discrète 2D - p.43/44

Courbure le long d'un contour 2/2

Les extrema d'un profil de courbure le long d'un contour correspondent aux points caractéristiques du contour.



Géométrie d'une courbe discrète

Références 2/2

[Feschet 99] F. Feschet and L. Tougne. Optimal time computation of the tangent of a discrete curve : application to the curvature. In Proc. DGC'99, volume 1568 of LNCS, Springer. [Coeurjolly 02] D. Coeurjolly. Algorithmique et géométrie discrète pour la caractérisation de courbes et des surfaces. Thèse de doctorat, Université Lyon 2, 2002.

[Lachaud 03] J.-O. Lachaud and A. Vialard. Geometric measures on arbitrary dimensional digital surfaces. In Proc. DGC'03, volume 2886 of LNCS, Springer.

[Lachaud 05] J.-O. Lachaud and A. Vialard and François de Vieilleville. Analysis and comparative evaluation of discrete tangent estimators. To appear in Proc. DGC'05.

Géométrie d'une courbe discrète