Petit récapitulatif sur les matroïdes et matroïdes orientés

Emeric Gioan

Ceci est une introduction aux matroïdes et aux matroïdes orientés, ne reposant que sur des notions de base de théorie des graphes, d'algèbre linéaire et de topologie. Les objets y sont illustrés géométriquement et graphiquement, pour faciliter l'interprétation dans ces deux cadres des résultats utilisant le formalisme des matroïdes orientés(*).

(*) A l'origine, ceci est l'Annexe 2 de ma thèse *Correspondance naturelle entre bases et réorientations des matroïdes orientés.*

1. Introduction

La théorie des matroïdes orientés est née dans les années 1970. Les matroïdes orientés sont des objets à la fois combinatoires, géométriques et algébriques. Leur structure peut-être considérée comme une abstraction combinatoire des positions relatives dans les configurations de points ou d'hyperplans des espaces réels, ou bien des directions dans les cycles et cocycles d'un graphe orienté. La vingtaine d'axiomatiques issues de directions diverses qui existent aujourd'hui, ainsi qu'une notion omniprésente de dualité, confirment le caractère très naturel de cette structure. Les applications, de plus en plus nombreuses, viennent de domaines très divers (voir l'appendice 'Some current frontiers of research' dans la deuxième édition de [OM]). La sous-section 52C40 de la classification AMS est consacrée entièrement aux matroïdes orientés depuis 2000.

Pour l'historique, en bref, les matroïdes orientés ont été introduits indépendamment et à peu près simultanément d'une part par Las Vergnas à partir de la théorie des graphes en tant que généralisation aux matroïdes de la notion d'orientation, d'autre part par Bland à partir de la programmation linéaire en tant que modèle combinatoire adapté à ce type de problèmes, et enfin par Folkman et Lawrence, qui partant de l'étude des polytopes ont abouti à la représentation topologique des matroïdes orientés par les arrangements de pseudosphères. Ces différentes motivations, toutes restées d'actualité, conduisent à des points de vue complémentaires, qui ont chacun leur importance dans cette thèse. Un livre de référence sur le sujet, 'Oriented Matroids', est paru en 1993, réédité en 1999, coécrit par Björner, Las Vergnas, Sturmfels, White et Ziegler [OM].

Lorsque l'on considère la sphère unité de l'espace réel coupée par des hyperplans en nombre fini, on obtient un complexe cellulaire. On repère les positions relatives des faces en attibuant un signe + ou - aux demi-espaces définis par les hyperplans. Les relations d'incidence entre ces hyperplans, la décomposition obtenue, sont des invariants pour les transformations topologiques (continues) de la sphère. Les matroïdes orientés associés à ces arrangements d'hyperplans sont ces classes d'équivalence à transformation topologique près (ce qui en fait un objet intéressant au sens du programme d'Erlangen de Felix Klein 1879). D'un point de vue algébrique, ils sont une axiomatisation combinatoire des propriétés de signes en l'algèbre linéaire, c'est-à-dire une axiomatisation du système de + et de - obtenu.

Le fait de considérer le matroïde orienté associé à un arrangement d'hyperplans revient (on s'en doute étant donné l'aspect purement combinatoire) à ne plus tenir compte des 'distances', et c'est pourquoi on obtient naturellement des objets géométriques plus généraux : des arrangements de pseudohyperplans qui n'ont plus besoin d'être 'droits' et qui ont l'avantage de vérifier une axiomatique simple, alors qu'il est actuellement hors de portée, probablement à jamais, de caractériser combinatoirement les arrangement d'hyperplans 'droits'.

Dans l'étude des graphes orientés aussi le formalisme des matroïdes orientés est utile (même si il existe déjà en filigrane dans le langage des graphes). Le point de vue des matroïdes orientés, qui ne s'occupe que des arêtes du graphe et permet toujours la manipulation d'un dual, apporte notamment un éclairage sur des notions de dualité, parfois plus délicates à exprimer en théorie des graphes. De plus il permet de distinguer ce qui ne dépend que de l'espace des cycles et non des sommets.

Outre leurs applications en théorie des graphes, les matroïdes orientés consituent surtout un outil fondamental de géométrie discrète et algorithmique (convexité, polyèdres, arrangements de pseudodroites...), ayant des applications depuis l'optimisation discrète et la programmation linéaire jusqu'aux graphes de visibilité et la stéréochimie. Il y a aussi d'autres interventions significatives dans des domaines plus lointains : application aux classes de Pontriagin en géométrie différentielle (Gelfand et MacPherson), stratification des grassmanniennes (Gelfand et son école), équivalence birationnelle des espaces de réalisation des matroïdes orientés et des variétés semi-algébriques réelles (théorème de Mnëv)...

Antérieurement, la structure de matroïde (1935) avait été obtenue en retenant les principales propriétés de la dépendance linéaire dans les espaces vectoriels, et en particulier dans l'espace des cycles d'un graphe, mais sans tenir compte des signes. Ils constituent du point de vue géométrique une généralisation des géométries projectives. De nombreux autres exemples naturels peuvent être construits à partir des graphes, des groupes, des corps (dépendance algébrique), des ensembles ordonnés, etc. C'est aussi la structure naturelle pour l'algorithme glouton (recherche d'un ensemble de poids minimal).

Les matroïdes et les matroïdes orientés sont néanmoins des structures distinctes : tout matroïde orienté a un matroïde sous-jacent, mais plusieurs matroïdes orientés peuvent avoir le même matroïde sous-jacent, alors que certains matroïdes non-orientables ne sont le matroïde sous-jacent d'aucun matroïde orienté.

On termine cette introduction par la définition du matroïde orienté associé à un graphe, et à un arrangement de pseudodroites. Ensuite, après avoir défini les matroïdes de façon combinatoire et donné les exemples classiques (partie 2), on définira indépendamment les matroïdes orientés par leur axiomatique combinatoire (partie 3) et par leur représentation topologique (partie 4). La partie 5 donne des constructions et des résultats techniques couramment utilisés. La partie 6 est une introduction à la traduction de la progrmmation linéaire dans les matroïdes orientés. Enfin, les résultats ou remarques utiles pour rendre ce récapitulatif cohérent, mais dont il ne sera pas question ailleurs, formeront la dernière partie 7 intitulée 'Compléments'.

Les résultats sont donnés sans démonstration. Pour plus de détails, on peut consulter les livres de référence [OM] à propos des matroïdes orientés, et [Ox] (ou [W1], [W2], [W3]) à propos des matroïdes.

Définition. Soit E un ensemble fini. Une *partie signée* de E est une partie $\underline{A}$ de E munie d'une partition en éléments dits positifs et en éléments dits négatifs : $\underline{A} = A^+ \uplus A^-$. La partie $\underline{A}$ est alors appelée *support* de la partie signée $A = (A^+, A^-)$. On se permet souvent d'employer la même notation A pour la partie signée et son support, et on note traditionnellement les éléments négatifs avec un surlignage ($\overline{1}2$).

De manière générale, un *matroïde orienté* M sur un ensemble fini E est défini par un ensemble parties signées de E, qui peut être l'ensemble des *circuits*, des *cocircuits*, des *vecteurs* ou des *covecteurs* de M (on ne s'occupera jamais ici du signe des *bases*).

• Graphes.

Soit un graphe orienté $G = (V, E)$. Dans le matroïde orienté M défini à partir de G :

- les circuits ont pour supports les ensembles d'arêtes des cycles élémentaires de G (cycles minimaux pour l'inclusion),

- le signe d'un élément e d'un circuit est $+$ ou $-$ selon que l'arête e est orientée ou non dans la direction d'un sens de parcours fixé.

Puisque l'on peut chosir deux sens de parcours opposés, il existe exactement deux circuits opposés ayant le même cycle élémentaire sous-jacent.

De façon similaire :

- les cocircuits ont pour supports les ensembles d'arêtes des cocycles élémentaires de G (coupes minimales pour l'inclusion, une coupe est l'ensemble des arêtes joignant A et B pour une partition $V = A + B$, une coupe est minimale si le nombre de composantes connexes augmente exactement de 1 lorsqu'on la supprime),

- le signe d'un élément e d'un cocircuit est $+$ ou $-$ selon que l'arête e est orientée ou non dans une direction fixée pour le cocycle (une direction pour le cocycle est soit de A vers B, soit de B vers A).

Puisque l'on peut chosir deux directions opposées, il existe exactement deux cocircuits opposés ayant le même cocycle élémentaire sous-jacent.

Un tel matroïde orienté est dit *graphique*.

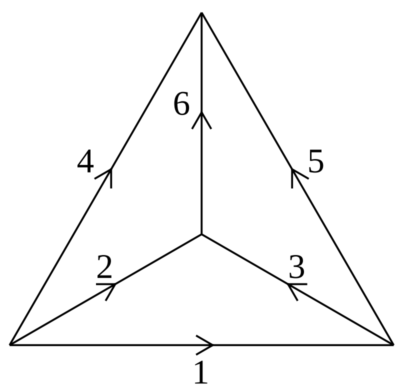

Figure A.1 : orientation de référence de K_4

Exemple. Sur la Figure A.1 est représenté un graphe K_4 orienté. Ses circuits sont $1\overline{2}3$, $2\overline{4}6$, $3\overline{5}6$, $1\overline{4}5$ et leurs opposés. Ses cocircuits sont 123, $\overline{1}35$, 456, $23\overline{6}$, 2345, $1\overline{3}46$, $12\overline{56}$ et leurs opposés.

Définition. Si tout élément appartient à un circuit positif, l'orientation est dite *totalement cyclique*. Si le graphe est connexe, totalement cyclique est équivalent à *fortement connexe*. Si tout élément appartient à un cocircuit positif, alors aucun élément n'appartient à un circuit positif ([1]) et l'orientation est *acyclique*.

([1]) Un résultat classique et important, vrai dans les matroïdes orientés en général,

Lemme A.1.1. (orthogonalité dans le cas graphique)

Soit un matroïde orienté graphique avec un circuit C et un cocircuit D, alors

$$|\,(C^+ \cap D^+) \cup (C^- \cap D^-)\,| = |\,(C^- \cap D^+) \cup (C^- \cap D^+)\,|$$

□

Cette propriété d'orthogonalité reste valide dans les matroïdes orientés réguliers (i. e. vectoriels sur tout corps). Dans les matroïdes orientés en général, on sait juste que les deux membres de cette égalité sont soit vides soit non vides simultanément.

- Arrangements de pseudodroites.

On appelle *pseudodroite* du plan affine euclidien une courbe homéomorphe à une droite réelle, et un *arrangement de pseudodroites* un ensemble de pseudodroites qui se coupent deux à deux une et une seule fois, en un point où elles se croisent.

Afin d'avoir une symétrie centrale, utile pour les axiomatiques, on préfère considérer que le plan affine est un hémisphère de la sphère réelle de dimension 2 et que les pseudodroites se prolongent continuement et symétriquement sur l'hémisphère opposé. Ceci revient à considérer des *pseudocercles* homémorphes à des cercles S^1 sur la sphère réelle S^2 de dimension 2, qui se coupent deux à deux en exactement deux points opposés où ils se croisent, formant à eux tous un *arrangement de pseudocercles.*

Les pseudocercles découpent la sphère en un complexe cellulaire de faces de dimensions 0, 1, ou 2. Si on choisit pour chaque pseudocercle un côté positif et un côté négatif, on peut associer à chaque face une partie signée dont le support est l'ensemble des pseudocercles ne contenant pas cette face, et dont les signes sont les signes du côté du pseudocercle où se trouve la face.

L'arrangement définit un matroïde orienté dont :

- les *cocircuits* sont les parties signées associées aux faces de dimension 0 (sommets),

- les *covecteurs* sont les parties signées associées aux faces de toutes dimensions.

Pour représenter par une figure un arrangement de pseudocercles, on représentera un hémisphère de S^2, dont le bord sera un des pseudocercles (homéomorphe à S^1). En général, E étant dans les exemples $1...n$, la figure représentera le côté positif de 1, dont le bord sera 1. Bien sûr il n'apparaît ainsi que la moitié des régions de l'arrangement complet de pseudocercles, l'autre moitié se déduisant évidemment par symétrie centrale.

Exemple. La figure A.2 représente les covecteurs d'un arrangement de pseudodroites du plan projectif : à chaque face est associée son covecteur. Les cocircuits correspondant aux faces de dimension 0 (sommets) sont les mêmes que dans l'exemple

---

est que tout élément appartient soit à un circuit positif, soit à un cocircuit positif, mais pas les deux.

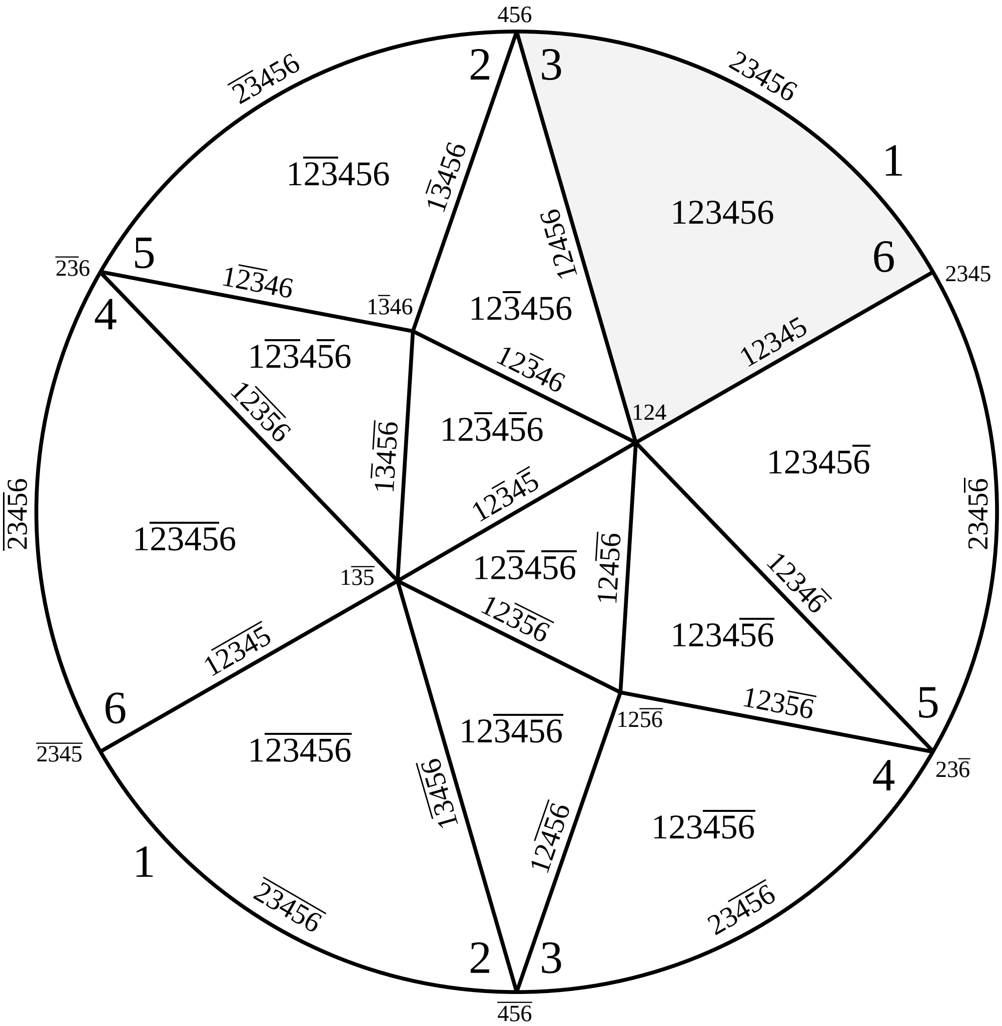

Figure A.2 : covecteurs de K_4

graphique précédent : les Figures A.1, et A.2 représentent en fait le même matroïde orienté défini par une orientation particulière de K_4.

Remarque. L'intersection de tous les côtés positifs est une région (face de dimension 2) si et seulement si il existe un covecteur positif, si et seulement si tout élément appartient à un cocircuit positif. L'arrangement signé alors est dit *acyclique*.

Les arrangements de pseudocercles représentent les *matroïdes orientés simples de rang* 3, où le rang 3 est dû à la dimension 2 de la sphère considérée, et où 'simple' signifie que l'on interdit la 'duplication' d'un élément, ainsi que la présence de 'boucles' qui sont en général les éléments de rang 0.

2. Matroïdes.

Dans cette thèse, un matroïde est une structure combinatoire définie sur un ensemble fini par la donnée d'une collection de parties qui peuvent être par exemple les bases, les circuits, ou les cocircuits du matroïde. Il y a ainsi plusieurs façons de définir un matroïde.

• <u>Bases d'un matroïde</u>.

Définition. Soit E un ensemble fini. Un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de E est l'ensemble des *bases* d'un *matroïde* M sur E si et seulement si les axiomes suivants sont vérifiés :

(i) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

(ii) *pour tous B et B' dans $\mathcal{B}$ et $e \in B \setminus B'$ il existe $f \in B' \setminus B$, tel que $B \setminus e \cup f \in \mathcal{B}$.*

Ces axiomes impliquent immédiatement que toutes les bases ont même cardinal. Ce cardinal est appelé le *rang* du matroïde, et noté $r(M)$ ou simplement r.

Les matroïdes sont la structure naturelle de l'algorithme glouton. Soit un ensemble $\mathcal{I}$ de parties de E appelées *indépendants* vérifiant 'si $A \subset B$ et $B \in \mathcal{I}$ alors $A \in \mathcal{I}$'. On peut calculer l'élément de $\mathcal{I}$ de poids minimal pour tout ordre total sur E (poids) en partant de l'ensemble vide et en ajoutant à chaque fois l'élément de poids minimal pour lequel la partie obtenue reste un élément de $\mathcal{I}$ (algorithme glouton), si et seulement si les éléments maximaux de $\mathcal{I}$ constituent les bases d'un matroïde (i. e. satisfont les axiomes ci-dessus).

L'ensemble des complémentaires des bases de M dans E vérifiant les mêmes axiomes, c'est aussi l'ensemble des bases d'un matroïde, appelé *matroïde dual* de M et noté M^*.

Exemples.

- Les forêts maximales d'un graphe $G = (V, E)$ sont les bases d'un matroïde sur E. Un tel matroïde est appelé *matroïde graphique.* Le rang de ce matroïde est donc $\mid V \mid - c(G)$ où $c(G)$ est le nombre de composantes connexes de G. Si le graphe est planaire, le matroïde défini à partir du graphe dual G^* est le dual du matroïde défini à partir de G.

- Si E est un ensemble fini de vecteurs d'un espace vectoriel sur un corps K, engendrant l'espace vectoriel V, alors les parties de E qui sont des bases de V sont les bases d'un matroïde sur E. Un tel matroïde est appelé *matroïde vectoriel.* Le rang de ce matroïde est alors la dimension de V.

- Un ensemble fini d'hyperplans d'un espace vectoriel réel (ou *arrangement d'hyperplans*) définit un matroïde vectoriel en considérant les dépendances des formes linéaires dont les hyperplans sont les noyaux. Dans ce cas, le rang du matroïde est la dimension de l'espace vectoriel de départ moins la dimension de l'intersection des hyperplans de E.

- Les parties à r éléments de E de cardinal n, forment les bases d'un matroïde sur E appelé *matroïde uniforme* et noté $U_{r,n}$.

Remarques.

- Tous les matroïdes graphiques sont aussi vectoriels : pour un graphe $G = (V, E)$, il suffit de considérer l'ensemble des vecteurs $x_j - x_i$, $(i, j) \in E$, pour une base $(x_i)_{i \in V}$ de l'espace réel.

- Tous les matroïdes vectoriels ne sont pas graphiques : l'exemple fondamental est $U_{2,4}$.

A partir de l'ensemble des bases du matroïde, on définit d'autres ensembles de parties de E, qui déterminent eux aussi le matroïde et qui vérifient certains axiomes.

• <u>Objets usuels dans les matroïdes</u>.

- L'ensemble des *indépendants* de M est l'ensemble des parties des bases. Ainsi les bases sont les indépendants maximaux. Dans le cas graphique, les indépendants sont les ensembles d'arêtes des forêts du graphe. Dans le cas vectoriel, ce sont les indépendants au sens de la dépendance linéaire.

- L'ensemble des *dépendants* de M sont les parties non-indépendantes. Dans un graphe, ce sont les ensembles d'arêtes contenant les arêtes d'un cycle. Dans le cas vectoriel, ce sont les parties contenant des vecteurs liés au sens de la dépendance linéaire.

- L'ensemble des *circuits* de M est l'ensemble des dépendants minimaux pour l'inclusion. Dans un graphe, ce sont les arêtes des cycles élémentaires (i. e. ceux qui ne passent pas deux fois par un même sommet). Dans le cas vectoriel, ce sont les parties dépendantes de E minimales pour l'inclusion.

- La *fermeture* d'une partie $A \subseteq E$ notée $cl(A)$ ('closure' en anglais) est la plus petite partie de E contenant A et vérifiant, pour tout circuit C de M et tout e dans E, si $C - e \subseteq A$ alors $e \in cl(A)$. Un *fermé* de M est une partie qui est égale à sa propre fermeture. Dans un graphe, la fermeture s'obtient en ajoutant à une partie les arêtes qui ferment un cycle dans cette partie. Dans le cas vectoriel, la fermeture d'une partie est l'intersection de E avec le sous-espace engendré par cette partie.

On appelle *rang* d'un fermé le cardinal d'un indépendant maximal contenu dans ce fermé (c'est en fait le cardinal d'une base du matroïde obtenu en se restreignant à cette partie), et le rang d'une partie est celui de sa fermeture. On note r la fonction rang.

L'ensemble des fermés ordonnés par l'inclusion forme un treillis, gradué par la fonction rang, et tel que $F_1 \wedge F_2 = F_1 \cap F_2$ (plus grand fermé inférieur aux deux autres) et $F_1 \vee F_2 = cl(F_1 \cup F_2)$ (plus petit fermé supérieur aux deux autres). Un treillis est un ensemble ordonné sur lequel $\vee$ et $\wedge$ sont définis. Le treillis des fermés du matroïde sous-jacent d'un matroïde orienté est l'ensemble ordonné pour l'inclusion des intersections de pseudosphères.

- Un *hyperplan* de M est un fermé de rang $r(M) - 1$.

- L'ensemble des *cocircuits* de M est l'ensemble des complémentaires dans E des hyperplans de M.

Dans un graphe, ce sont les coupes minimales pour l'inclusion([2]). Dans le cas vectoriel, ce sont pour chaque sous espace de dimension $r-1$ engendré par des éléments de E, les élément de E n'appartenant pas à cet espace.

- Un *isthme* est un élément qui appartient à toutes les bases. Une *boucle* est un élément qui n'appartient à aucune base. Dans le cas graphique, ce sont les notions habituelles. Dans le cas vectoriel, les isthmes sont des vecteurs tels que les autres vecteurs engendrent un espace de dimension $r-1$, et les boucles sont autant de copies du vecteur nul.

Les isthmes de M sont les boucles de M^*, et les boucles de M sont les isthmes de M^*.

• Propriétés diverses.

Les circuits de M sont les cocircuits de M^*
et les cocircuits de M sont les circuits de M^*.

Passages d'un ensemble d'objets usuels à un autre :

- les indépendants sont les parties ne contenant pas de circuits,
- les fermés sont les complémentaires d'unions de cocircuits...

Propriété A.2.1.

Soit F un fermé d'un matroïde M. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E \setminus F$ est un fermé de M^* ;

(ii) F est une union de circuits ;

(iii) $M(F)$ n'a pas d'isthme.

Un fermé qui satisfait les propriétés A.2.1 est appelé *fermé cyclique*.

Preuve. (i) et (ii) sont équivalents puisqu'un fermé d'un matroïde est le complémentaire d'une union de cocircuits du matroïde.

Les circuits de $M(F)$ sont les circuits de M contenus dans F, et un isthme est un élément qui n'appartient à aucun circuit. On en déduit immédiatement (ii) équivalent à (iii). □

• Mineurs des matroïdes.

Pour $A \subseteq E$, on définit M/A qui est le matroïde dont les bases sont les $\{B \setminus A \mid B \in \mathcal{B}, A \subseteq B\}$. On dit qu'il est obtenu par *contraction* de A. Et on définit $M \setminus A = M(E \setminus A)$ dont les bases sont les $\{B \mid B \in \mathcal{B}, B \cap A = \emptyset\}$. On dit qu'il est obtenu par *suppression* A, ou par restriction à $E \setminus A$([3]).

([2]) Une *coupe* est l'ensemble des arêtes joignant les sommets de deux parties A et B de l'ensemble des sommets V, où $V = A \uplus B$ est une partition de V.

([3]) Il a déjà été question précédemment de restriction à propos du rang : le rang de A dans M est le rang du matroïde $M(cl(A))$.

Alors évidemment on a pour tout $A \subseteq E$

$$(M/A)^* = M^* \setminus A$$

et

$$(M \setminus A)^* = M^*/A$$

et pour toutes parties A et B de E d'intersection vide

$$M/A \setminus B = M \setminus B/A$$

ces matroïdes étant appelés *mineurs* de M.

De plus si e est un isthme ou une boucle de M alors $M/e = M \setminus e$ (on peut montrer facilement que c'est une condition nécessaire et suffisante).

Dans le cas graphique, ces définitions coïncident avec les définitions habituelles des mineurs. Dans le cas vectoriel, la suppression revient simplement à supprimer les éléments concernés, et la contraction par contre est plus subtile([4]). Dans le cas d'un arrangement d'hyperplans, la contraction selon A est l'arrangement induit sur l'intersection des hyperplans appartenant à A.

• Axiomatique des circuits et des cocircuits.

Théorème A.2.2.

Un ensemble de parties $\mathcal{C}$ d'un ensemble fini est l'ensemble des circuits (ou des cocircuits) d'un matroïde si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.

(i) $\emptyset \notin \mathcal{C}$;

(ii) pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$ si $X \subseteq Y$ alors $X = Y$; *(incomparabilité)*

(iii) pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$, $e \in X \cap Y$ et $f \in (X \setminus Y)$, il existe $Z \in \mathcal{C}$ tel que
$Z \subseteq (X \cup Y) - e$
et $f \in Z$. *(élimination forte)*

([4]) pour une configuration de points, cela revient à projeter la configuration sur un hyperplan en position générale, successivement à partir de chaque élément à contracter

3. Matroïdes orientés : définition combinatoire.

Les axiomatiques des circuits et vecteurs s'appliquent de la même façon, respectivement, aux cocircuits et covecteurs via le dual défini après.

• Axiomatiques.

Définition. Un ensemble de parties signées $\mathcal{C}$ d'un ensemble fini est l'ensemble des circuits (ou des cocircuits) d'un matroïde orienté si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées. Le matroïde orienté est alors déterminé par l'ensemble des circuits (ou des cocircuits).

(i) $\emptyset \notin \mathcal{C}$;

(ii) $\mathcal{C} = -\mathcal{C}$; (symétrie)

(iii) pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$ si $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$ alors $X = Y$ ou $X = -Y$; (incomparabilité)

(iv) pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$, $X \neq Y$, $e \in X^+ \cap Y^-$ et $f \in (X^+ \setminus Y^-) \cup (X^- \setminus Y^+)$, il existe $Z \in \mathcal{C}$ tel que

$Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) - e$

$Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) - e$

et $f \in \underline{Z}$. (élimination forte des circuits)

Définition. Si l'on ne tient pas compte des signes, les conditions obtenues sont l'axiomatique des circuits d'un matroïde (partie 2). Le matroïde dont les circuits sont les supports des circuits d'un matroïde orienté est appelé *matroïde sous-jacent* de ce matroïde orienté.

Définition. Un ensemble $\mathcal{V}$ de parties signées d'un ensemble fini est l'ensemble des vecteurs (ou des covecteurs) d'un matroïde orienté si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées. Le matroïde orienté est alors déterminé par l'ensemble des vecteurs (ou des covecteurs).

(i) $\emptyset \in \mathcal{V}$;

(ii) $\mathcal{V} = -\mathcal{V}$; (symétrie)

(iii) pour tout $X, Y \in \mathcal{V}$ on a $X \circ Y \in \mathcal{V}$; (composition)

(iv) pour tout $X, Y \in \mathcal{V}$, $e \in X^+ \cap Y^-$ et $f \in (\underline{X} \setminus \underline{Y}) \cup (\underline{Y} \setminus \underline{X}) \cup (X^+ \cap Y^+) \cup (X^- \cap Y^-)$, il existe $Z \in \mathcal{V}$ tel que

$Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) - e$

$Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) - e$

et $f \in \underline{Z}$. (élimination forte des vecteurs)

Etant données deux parties signées $A = (A^+, A^-)$ et $B = (B^+, B^-)$, on définit la *composition* $A \circ B = (A^+ \cup (B^+ \setminus \underline{A}), A^- \cup (B^- \setminus \underline{A}))$. c'est-à-dire que $A \circ B$ a pour support $\underline{A} \cup \underline{B}$, les éléments de A étant signés comme dans A, et les autres comme dans B.

Si A et B ont les mêmes signes sur leurs éléments communs, on dit que $A \circ B$ est une *composition conforme*.

Deux vecteurs (resp. covecteurs) sont *conformes* si ils ont les mêmes signes sur leurs éléments communs (c'est-à-dire, géométriquement, si les faces correspondantes se touchent, cf. partie 4).

Théorème A.3.1.

L'ensemble des vecteurs (resp. covecteurs) est engendré par composition conforme à partir de l'ensemble des circuits (resp. cocircuits).

Il existe d'autres caractérisations des vecteurs (da Silva, Handa... voir [OM]).

La réorientation de M selon A est le matroïde orienté ayant pour ensemble de circuits les circuits de M dans lesquels on change le signe des éléments de A (ce qui se transporte alors aux vecteurs, aux cocircuits et aux covecteurs). Toutes les réorientations de M forment sa *classe de réorientations*. Elles ont toutes le même matroïde sous-jacent.

Les matroïdes et les matroïdes orientés sont des objets différents, même si à un matroïde orienté est toujours associé un matroïde sous-jacent. En effet certains matroïdes ne sont le matroïde sous-jacent d'aucun matroïde orienté (ils sont *non-orientables*, cf. 'Compléments'), et plusieurs classes de réorientations de matroïdes orientés différentes peuvent avoir le même matroïde sous-jacent.

• Dualité.

On dit que deux parties signées X et Y sont *orthogonales* si $(X^+ \cap Y^+) \cup (X^+ \cap Y^+) \neq \emptyset$ et $(X^- \cap Y^+) \cup (X^+ \cap Y^-) \neq \emptyset$ dès que $\underline{X} \cap \underline{Y} \neq \emptyset$.

Théorème A.3.2.

L'ensemble des parties signées orthogonales à tous les vecteurs (resp. covecteurs), est égal à l'ensemble des parties signées othogonales à tous les circuits (resp. cocircuits).

C'est l'ensemble des vecteurs (resp. covecteurs) d'un matroïde orienté sur E.

Définition. Ce matroïde orienté est le *dual* de M, noté M^*. Son matroïde sous-jacent est le matroïde dual de celui de M. L'ensemble des covecteurs (resp. vecteurs) de M^* est l'ensemble des vecteurs (resp. covecteurs) de M. L'ensemble des cocircuits (resp. circuits) de M^* est l'ensemble des circuits (resp. cocircuits) de M.

En pratique on joue à la fois techniquement sur les circuits et les cocircuits, ou les vecteurs et les covecteurs, qui interviennent de pair. Lorsque l'on ne considère que leurs supports, parties non signées, on utilise leurs propriétés dans le matroïde sous-jacent. Lorsque l'on prend en compte les signes, les propriétés d'orthogonalité sont souvent exploitées. Par exemple :

- si C est un circuit et D un cocircuit, alors $\mid C \cap D \mid \neq 1$;

- et si $C \cap D = \{e, f\}$ alors e et f sont de même signe dans C et de signes opposés dans D, ou bien de signes opposés dans C et de même signe dans D.

4. Matroïdes orientés : définition topologique

Les matroïdes orientés sont représentés par des objets topologiques naturels, qu'ils modélisent de façon combinatoire : les arrangements de pseudosphères.

Historiquement, les matroïdes orientés sont définis avec les axiomatiques combinatoires de la partie precédente, et le **théorème de représentation topologique** est le résultat fondamental montrant que l'on peut les définir de façon topologique comme dans la présente partie. Un intérêt des matroïdes orientés est que l'ensemble des circuits et des vecteurs, ou des cocircuits et des covecteurs, vérifient une axiomatique simple, c'est-à-dire qu'il y a une caractérisation simple des ensembles de parties signées pouvant correspondre aux faces d'un arrangement de pseudosphères.

Le fait de définir les matroïdes orientés par leur représentation topologique peut paraître artificiel dans le sens où la description d'un matroïde orienté donné se fait en pratique le plus souvent de façon combinatoire. D'un autre côté, la plupart des résultats et objets usuels dans les matroïdes orientés ont des interprétations géometriques remarquables. Dès lors, dans un sens, il peut sembler que l'objet intéressant est l'objet topologique, la combinatoire étant l'outil qui permet de travailler et d'établir des liens avec d'autres domaines. Mais dans un autre sens, la structure combinatoire plus abstraite permet, par exemple, de considérer - en même temps - un matroïde orienté et son dual, ce qui est moins spontané géométriquement. Quoi qu'il en soit, l'aspect topologique est un bon support pour l'intuition.

• Arrangement de pseudosphères.

Définitions. On note S^d la sphère unité de l'espace réel de dimension $d+1$.

On appelle *pseudosphère* de S^d une sphère S homéomorphe à S^{d-1} dans un homéomorphisme de S^d. Il y a alors deux composantes connexes dans $S^d \setminus S$, chacune homéomorphe à une boule de dimension d, que l'on appelera les *côtés* de S.

Un *arrangement de pseudosphères* est un ensemble fini $\mathcal{A}$ de pseudosphères S_e, $e \in E$ de S^d vérifiant les conditions suivantes :

(i) $S_A = \cap_{e\in A} S_e$ est une sphère, pour tout $A \subseteq E$.

(ii) Si $S_A \not\subseteq S_e$ pour $A \subseteq E$, $e \in E$, et S_e^+ et S_e^- sont les deux côtés de S_e alors $S_A \cap S_e$ est une pseudosphère de S_A ayant pour côtés $S_A \cap S_e^+$ et $S_A \cap S_e^-$.

Si $S_E = \emptyset$ l'arrangement est dit *essentiel*.

On dit que l'arrangement est *signé* lorsque l'on choisit pour chaque pseudosphère S_e, $e \in E$, un côté positif S_e^+ et un côté négatif S_e^-.

Deux arrangements (resp. deux arrangements signés) sont *équivalents* si ils sont égaux à un homéomorphisme de S^d près (resp. si en plus l'homéomorphisme conserve les signes).

Les *matroïdes orientés* de rang $d+1$ sans boucles sont les classes d'équivalence des arrangements de pseudosphères essentiels signés de S_d.

On peut ajouter à un matroïde orienté des éléments non représentés appelés ses *boucles*, dont on verra plus loin l'importance. On a alors défini les matroïde orientés en toute généralité.

La *réorientation* d'un matroïde orienté M selon $A \subseteq E$ est le matroïde orienté obtenu en changeant les signes des pseudosphères S_e, $e \in A$. On le note $-_A M$.

• Faces de l'arrangement - Covecteurs du matroïde orienté.

Les intersections des pseudosphères définissent des faces, et un complexe cellulaire de faces qui partitionne S^d. Un des intérêts des matroïdes orientés est que considérer un arrangement signé permet de répertorier les positions relatives des faces par rapport aux éléments.

Définition. Etant donné un arrangement $\mathcal{A} = (S_e)_{e \in E}$ de pseudosphères de S^d représentant un matroïde orienté M, à chaque point a de S^d est associée une partie signée de E définie par $e \in A^+$ si et seulement si $a \in S_e^+$ et $e \in A^-$ si et seulement si $a \in S_e^-$. Ainsi $e \notin A$ si et seulement si $a \in S_e$. L'ensemble des parties signées ainsi obtenues est l'ensemble des *covecteurs* du matroïde orienté.

Autrement dit, l'ensemble des covecteurs s'obtient en considérant, pour chaque face, l'ensemble C des éléments qui ne contiennent pas cette face, et en attribuant à chaque élément e de C le signe du côté de S_e dans lequel la face est contenue.

Théorème A.4.1. (théorème de représentation topologique, Folkman Lawrence 1978)
Les deux définitions, topologique et combinatoire, sont équivalentes.

Propriétés.

- Un matroïde orienté possède toujours une symétrie centrale combinatoire, dans le sens où l'ensemble des covecteurs est invariant par passage à l'opposé. On en déduit que la réorientation d'un matroïde orienté selon E tout entier est le même matroïde orienté. Cette symétrie fondamentale se retrouve dans toutes les axiomatiques.

- Deux arrangements de pseudosphères sont (combinatoirement) équivalents si et seulement si ils définissent le même ensemble de covecteurs.

Définitions.

- Les *régions* sont les composantes connexes de $S^d \setminus \cup_{e \in E} S_e$. L'ensemble de toutes les régions des arrangements induits par $\mathcal{A}$ sur toutes les intersections de pseudosphères, est l'ensemble des *faces* du complexe cellulaire défini par $\mathcal{A}$. Les régions sont les faces de dimension d, les intersections réduites à un point sont les faces de dimension 0.

- L'ensemble des éléments contenant une face est appelé un *fermé* de M. Le *rang* r de M est $r = d + 1$. Si une face est de dimension k, le fermé correspondant est de *rang* $r - k - 1$.

Les fermés ne déterminent pas M, ils déterminent en fait le *matroïde sous-jacent* $\underline{M}$, ce qui revient à considérer l'ensemble des faces de l'arrangement (intersection de pseudosphères), mais sans s'occuper de leurs positions relatives, c'est-à-dire sans tenir compte des signes des covecteurs (voir partie 2).

- De même, les *bases* du matroïde orienté, qui sont les ensemble de r pseudosphères dont l'intersection est vide sont aussi une notion du matroïde sous-jacent (voir partie 2).

- Les *cocircuits* sont les covecteurs correspondant aux faces de dimension 0, appelées aussi *sommets*, c'est-à-dire les intersections de pseudosphères réduites à un point, c'est-à-dire que les cocircuits ont pour supports les complémentaires des fermés de rang $r-1$ (appelés hyperplans du matroïde). A un cocircuit du matroïde correspondent deux parties signées opposées, cocircuits du matroïde orienté (alors que pour les autres fermés, il peut y avoir de nombreux covecteurs ayant même support).

• <u>Régions - covecteurs maximaux - réorientations acycliques</u>.

Les *covecteurs maximaux* de M sont ceux dont le support est E moins les boucles éventuelles. Ils sont, par définition ici, en bijection canonique avec les régions de l'arrangement.

Un matroïde orienté est dit *acyclique* s'il existe un covecteur maximal positif, c'est-à-dire si la signature des pseudosphères qui définit le matroïde orienté désigne une région (cette région définit un covecteur maximal positif).

Ainsi les régions de l'arrangement de pseudosphères (qui ne dépendent pas de la façon dont celles-ci sont signées) sont en bijection canonique avec les covecteurs maximaux du matroïde orienté (qui dépend lui d'une certaine signature de référence), et en bijection canonique avec les réorientations acycliques du matroïde orienté (qui reviennent à changer la signature de référence, tant que celle-ci désigne une région).

On emploira régulièrement et indifféremment, sauf ambigüïté, ces appellations.

Les réorientations correspondant aux vecteurs maximaux sont les réorientations *totalement cycliques* ou pour un graphe les orientations *fortement connexes*. Ce sont les réorientations acycliques du dual.

• <u>Arrangements d'hyperplans</u>.

Etant donné un ensemble d'hyperplans (sous-espaces vectoriels de codimension 1) d'un espace vectoriel réel de dimension $d+1$, l'intersection de ces hyperplans avec la sphère unité S^d de l'espace définit un arrangement de pseudosphères, et donc, en choisissant une signature de référence, un matroïde orienté.

Un tel matroïde orienté est dit *vectoriel* ou *réalisable*.

Les signes des circuits et des cocircuits sont les signes des coefficients dans des relations de dépendances linéaires de vecteurs de l'espace déduits des hyperplans. Ce lien avec l'algèbre linéaire constitue une part importante de la théorie des matroïdes orientés (le chapitre 2 de [OM] est entièrement consacré à ce cas) mais il n'en est presque pas question dans cette thèse.

Grossièrement, à partir d'un arrangement d'hyperplans, on peut encore définir un matroïde orienté en déformant les hyperplans, c'est-à-dire en les remplaçant par des pseudohyperplans homéomorphes à des hyperplans, à condition qu'ils se coupent entre eux comme le feraient des hyperplans (condition (i)), et que les arrangements induits sur leurs intersections soient aussi des arrangements de peudohyperplans (condition (ii)).

Pour écrire ces propriétés rigoureusement, on est amené à employer des arrangements de peudosphères (et non de pseudohyperplans). L'intérêt de ces 'déformations' est que les objets obtenus sont des objets combinatoires dont l'axiomatique est simple, alors qu'il existe des arrangements de pseudosphères ne venant pas d'arrangements d'hyperplans (cf. 'Compléments') et qu'il est actuellement hors de portée de caractériser ceux qui viennent effectivement d'arrangements d'hyperplans (il y a notamment une infinité de classes de mineurs exclus). Le point de vue combinatoire ne tenant pas compte des distances, et les contraintes de réalisabilité étant profondément liées aux distances, il n'est pas étonnant que celles-ci disparaissent dans les matroïdes orientés et que l'on obtienne des objets plus généraux. Ainsi, l'étude des arrangements d'hyperplans à homéomorphisme près peut se faire dans le cadre des matroïdes orientés d'un point de vue purement combinatoire.

• <u>Configurations de points</u>.

C'est le point de vue dual du précédent au sens de l'algèbre linéaire. Etant donnés n points d'un espace affine réel, on appelle *hyperplans de la configuration* ou *hyperplans du matroïde orienté* les ensembles de points portés par un même hyperplan affine. Les complémentaires de ces hyperplans sont les supports des cocircuits.

Les signes de deux éléments du cocircuit sont les mêmes si et seulement si ils sont dans le même demi-espace délimité par l'hyperplan.

Les matroïdes orientés permettent ainsi d'axiomatiser les positions relatives de points dans l'espace. Cependant on n'utilise pas dans cette thèse de représentation par configurations de points (elles sont systématiquement acycliques et une réorientation acyclique revient à une transformation projective).

• <u>Graphes</u>.

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, en considérant l'ensemble des hyperplans d'équations $x_j - x_i = 0$, $(i, j) \in E$, où les vecteurs x_i, $i \in V$ forment une base de l'espace réel de dimension $\mid V \mid$, on définit un arrangement d'hyperplans et donc un matroïde orienté en choisissant une signature de référence.

Une signature de l'arrangement étant le choix d'un demi-espace positif, d'équation $x_j > x_i$ ou $x_i > x_j$, pour tout couple $(i, j) \in E$, les réorientations du matroïde sont en bijection canonique avec les orientations du graphe. Si le graphe de départ est orienté, on choisit la signature de l'arrangement de façon cohérente : $x_j > x_i$ pour l'arête (i, j) orientée de i vers j.

Un tel matroïde orienté est dit *graphique.*

La structure de matroïde orienté obtenue peut se définir à partir de l'espace des cycles du graphe : les cocircuits signés du matroïde orienté sont les cocycles signés (coupes minimales signées) sur le graphe (qui déterminent le matroïde orienté). De nombreuses informations du graphe se retrouvent dans le matroïde orienté, par exemple les bases du matroïde orienté sont les arbres couvrants du graphe.

Exemple. La figure A.3 repésente l'arrangement de rang 3 de la Figure A.2 de pseudodroites (pseudosphères de dimension 1) correspondant à l'orientation du graphe K_4 de la Figure A.1. Dans chaque région est réprésentée l'orientation acyclique correspondante du graphe. La région grisée est la région de référence

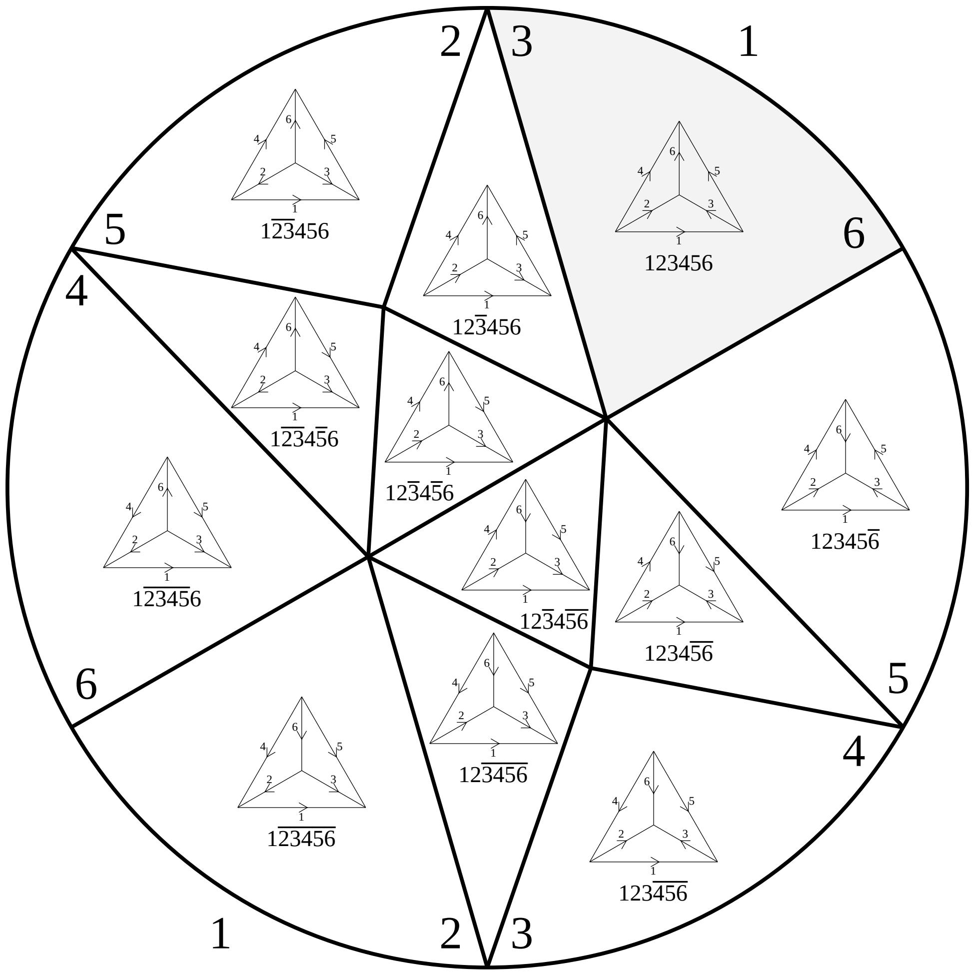

Figure A.3 : orientations acycliques, régions, et covecteurs maximaux de K_4

(covecteur positif) à partir de laquelle sont signés tous les covecteurs.

Remarque. Les réorientations du matroïde orienté graphique correspondant sont en bijection canonique avec les orientations du graphe : il y a une seule 'classe de réorientation' pour un graphe donné en tant que matroïde orienté, autrement dit deux matroïdes orientés définis par ce graphe sont des réorientations l'un de l'autre, contrairement aux matroïdes généraux pour lesquels un même matroïde peut être le matroïde sous-jacent de plusieurs matroïdes orientés qui ne sont pas des réorientations les uns des autres (le cas uniforme en est l'exemple typique : il y a de nombreuses façons d'avoir des points en position générale dans l'espace avec des positions relatives différentes).

• <u>Dualité</u>.

Le théorème A.3.2 est un fort résultat combinatoire, mais aussi topologique : étant donné un arrangement de pseudosphères de taille n et de rang r, il existe un arrangement de pseudosphères dual de taille n et de rang $n-r$ dont les covecteurs

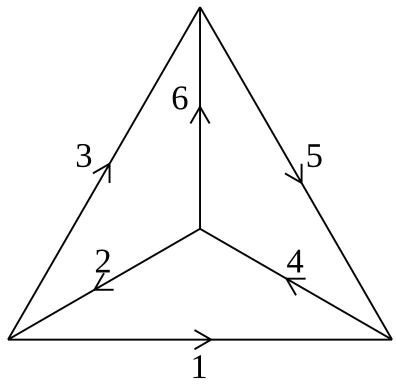

Figure A.4 : dual de K_4

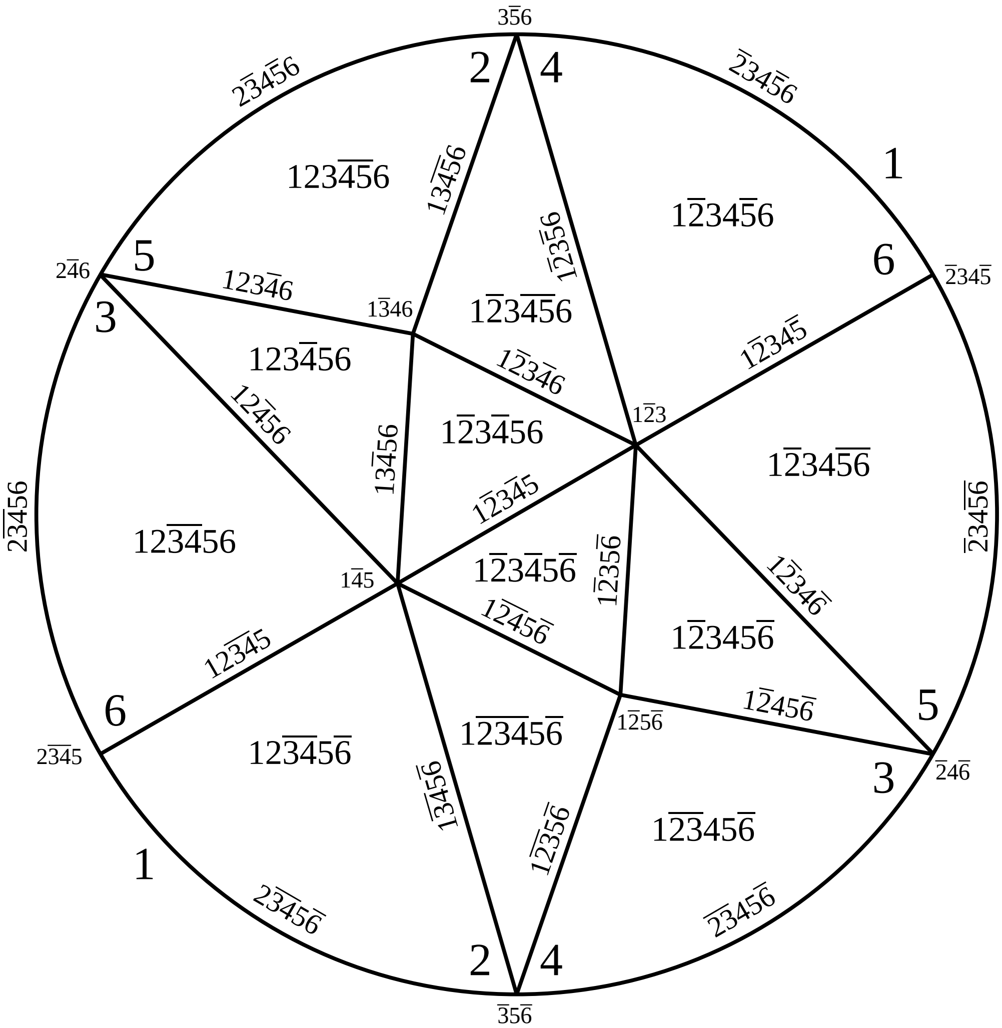

Figure A.5 : vecteurs de K_4

sont les parties signées maximales orthogonales à tous les covecteurs de l'arrangement donné.

Dans une définition topologique, on définit d'abord les covecteurs, pour leur interprétation géométrique, et on définit alors les vecteurs à partir de l'orthogonalité. Cependant ces deux ensembles d'objets sont fondamentaux ainsi que leur dualité. Les circuits et les vecteurs sont aussi naturels pour le matroïdee orienté que les cocircuits et les covecteurs, et ils ont des interprétations géométriques complémentaires.

Dans un matroïde orienté vectoriel, les supports des circuits sont les dépendants minimaux au sens de la dépendance linéaire, et les signes dans un circuit sont simplement les signes des éléments dans la relation de dépendance linéaire liant les vecteurs (bien sûr on trouve deux parties signées opposées).

Dans un arrangement de pseudosphères, les supports des circuits apparaissent géométriquement ainsi : les dépendants sont les intersections de dimensions k contenues dans strictement plus de $r-k-1$ pseudosphères, et les supports des circuits sont les dépendants minimaux. Le matroïde dual d'un matroïde se définit ainsi facilement à partir du matroïde. Par contre dans le cas orienté, la prise en compte des signes oblige à considérer ces conditions d'orthogonalité pour connaître les signes des circuits à partir des cocircuits, et il n'est pas évident de déduire géométriquement l'arrangement dual d'un arrangement donné.

Pour un graphe planaire, le matroïde orienté du dual du graphe est le dual du matroïde orienté du graphe.

Exemple. La Figure A.4 représente le dual du graphe orienté K_4 de la Figure A.1, et la Figure A.5 représente les covecteurs de ce graphe, qui sont les vecteurs du graphe de la Figure A.1 : c'est l'ensemble des parties signées orthogonales à toutes les parties signées de la Figure A.2.

5. Constructions dans les matroïdes orientés

• Mineurs d'un matroïde orienté.

Dans un matroïde graphique, les notions de mineurs coïncident avec celles des graphes.

Géométriquement, la suppression revient à supprimer les pseudosphères correspondantes. L'arrangement obtenu n'est peut-être alors plus essentiel (par exemple supprimer un isthme fait perdre 1 au rang).

La contraction revient à considérer l'arrangement induit sur l'intersection des pseudosphères contractées, celles qui contenaient cette intersection étant transformées en boucles, certaines pseudosphères peuvent se retrouver 'superposées' : leur paire forme un circuit dans le contracté.

Les mineurs d'un matroïde orientés ont pour matroïde sous jacent les mineurs correspondant du matroïde sous-jacent. Les signes des éléments restant des circuits et des cocircuits obtenus sont inchangés.

Proposition A.5.1.

Soit M un matroïde orienté sur E, et $A \subseteq E$.

Les cocircuits de M/A (resp. circuits de $M \setminus A$) sont les cocircuits de M (resp. circuits de M) d'intersection vide avec A.

Les circuits de M/A (resp. cocircuits de $M \setminus A$) sont les parties minimales dans l'ensemble des circuits de M (resp. cocircuits de M) auxquels on enlève A.

$$(M/A)^* = M^* \setminus A$$

ou bien

$$(M \setminus A)^* = M^*/A$$

Soient A et B deux parties disjointes de E, alors

$$M/A \setminus B = M \setminus B/A$$

• Isthmes, boucles, et connexité.

Les *boucles* de M sont les *isthmes* de M^*. Une boucle est un circuit réduit à un élément, elle n'appartient à aucun covecteur. Un isthme est un cocircuit réduit à un élément, il n'appartient à aucun vecteur. Les isthmes et les boucles d'un matroïde orienté sont ceux du matroïde sous-jacent.

Géométriquement, les matroïdes orientés représentés par des arrangements de pseudosphères sont sans boucles. On peut ajouter des boucles, qui sont simplement des éléments de E appartenant à toutes les bases, formant des circuits à eux tout seuls. Ils sont alors représentés dans le matroïde dual puisque ce sont des isthmes du dual. De plus, lorsque l'on contracte un élément, les élement qui lui sont parallèles deviennent des boucles.

Topologiquement, les isthmes sont des éléments qui lorsqu'on les supprimme font que l'arrangement n'est plus essentiel, et font donc perdre une dimension à la sphère pour pouvoir être essentielle.

La *somme directe* de deux matroïdes orientés respectivement sur E et F avec $E \cap F = \emptyset$ est le matroïde orienté défini sur $E \cup F$ dont l'ensemble des cocircuits est la réunion de celui des deux matroïdes orientés.

Un matroïde orienté est *connexe* si il n'est pas la somme directe de deux matroïdes orientés. En particulier, un matroïde connexe n'a pas d'isthme ni de boucle.

• <u>Elimination modulaire</u>.

Une paire de cocircuits est *modulaire* si l'union de leurs supports est le complémentaire d'un fermé de rang $r-2$ du matroïde. Géométriquement les sommets correspondant sont sur une même pseudodroite. L'*élimination modulaire* d'un élément entre deux cocircuits modulaires est l'unique cocircuit obtenu par élimination qui soit modulaire avec les deux cocircuits. Géométriquement, le sommet correspondant est sur la même pseudodroite, à l'intersection avec l'élément éliminé.

• <u>Extension par un élément</u>.

La proposition suivante est fréquemment utilisée techniquement, surtout par son corollaire, et est facilement visualisable géométriquement.

Proposition A.5.2. ([OM, proposition 7.1.4 page 284])
(i)

Soit $\widetilde{M}$ un matroïde orienté tel que $M = \widetilde{M} \setminus \omega$ où ω n'est pas un isthme ($\widetilde{M}$ est appelé 'extension à un élément' de M, 'single element extension' en anglais).

Alors pour tout cocircuit $Y \in \mathcal{C}^*$, il existe une unique façon d'étendre Y à un cocircuit de $\widetilde{M}$: il y a une unique fonction

$$\sigma : \mathcal{C}^* \to \{+,-,0\}$$

telle que

$$\{(Y, \sigma(Y)) : Y \in \mathcal{C}^*\} \subseteq \widetilde{\mathcal{C}}^*$$

(ii)

$\widetilde{M}$ est uniquement déterminé par σ avec :

$$\widetilde{\mathcal{C}}^* = \{(Y, \sigma(Y)) : Y \in \mathcal{C}^*\} \uplus \{(Y_1 \circ Y_2, 0) \mid Y_1, Y_2 \in \mathcal{C}^*, \sigma(Y_1) = -\sigma(Y_2) \neq 0, Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ conformes et modulaires } \}$$

Corollaire A.5.3.

Soit M un matroïde orienté sur E et $\omega \in E$. Si $e \in E \backslash \omega$ appartient à un cocircuit positif (resp. circuit positif) C de M, alors e appartient à un cocircuit positif (resp. circuit positif) D de $M \setminus \omega$ (resp. M/ω) avec $D \subseteq C$.

6. Programmation linéaire dans les matoïdes orientés

Le problème fondamental de la programmation linéaire peut-être vu comme suit : étant donnée une région d'un espace (affine) délimitée par des hyperplans (affines), maximiser une forme linéaire (de l'espace vectoriel sous-jacent) sur cette région.

En termes classiques cela s'écrit :

$$max \;\; c^t x - d$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

où A est une matrice réelle de taille $m \times n$, m étant le nombre d'inégalités, n la dimension du problème, x (la variable) et c sont des vecteurs de l'espace réel de dimension n, b un vecteur de l'espace réel de dimension m et d une constante réelle. Les inégalités à vérifier définissent des demi-espaces (affines) et leur intersection est une région délimitée par des hyperplans.

On sait que l'ensemble des solutions d'un tel problème si il est non vide est une face de la région (un sommet s'il y a une unique solution). Ce problème peut alors être modélisé de façon purement combinatoire dans les matroïdes orientés : les hyperplans considérés définissent un matroïde orienté M, les régions en étant les réorientations acycliques. On ajoute à ce matroïde orienté un élément g qui représente le 'plan à l'infini', on peut le voir comme une sphère à l'infini de l'espace affine sur laquelle les parallèles se coupent. Les régions bornées sont alors représentées par celles qui ne touchent pas g. On ajoute un autre élément f qui représente la forme linéaire à optimiser, il représente le noyau de cette forme linéaire (hyperplan vectoriel) passant par un point quelconque de l'espace affine (donnant un hyperplan affine), et un demi-espace affine délimité par f est celui dans lequel f croît.

Si deux sommets sont sur une même arête, elle est portée par une pseudodroite (face de dimension 1 ou fermé de rang $r-2$ du matroïde) qui coupe f. Un des deux sommets est alors 'plus loin' que l'autre de f (et plus près de l'élément 'infini' g), il augmente la fonction à maximiser. Ceci s'exprime dans le matroïde orienté avec les signes des covecteurs portés par cette pseudodroite.

Ceci permet de généraliser aux matroïdes orientés la 'méthode du simplexe' qui consiste à passer d'un sommet de la région à un autre adjacent de valeur supérieure pour la forme linéaire si elle doit être maximisée, et ce jusqu'à trouver un optimum. Une grande partie des travaux effectués en programmation linéaire dans le cadre des matroïdes orientés a été de définir des méthodes similaires (voir [OM] ou [BaKe92]). Un problème majeur qui se pose est que, contrairement au problème usuel dans l'espace vectoriel réel, le parcours des arêtes de la région peut tourner en rond : il peut y avoir des cycles de sommets 'croissants'. Cependant on montre qu'il existe malgré ceci une face optimale ('parallèle' à f) pour toute région bornée.

• Programme de matroïde orienté.

Définitions. (respectivement [OM] définitions 10.1.1, 10.1.3, 10.1.5, 10.1.7, p. 420-424)

Un *programme de matroïde orienté* est un triplet (M, g, f) où M est un matroïde orienté sur $E = E_n + \{f, g\}$, g n'est pas une boucle, f n'est pas un isthme, et $f \neq g$.

L'*espace affine* de M noté $\mathcal{A}$ est l'ensemble des covecteurs positifs sur g. Le *plan à l'infini* de M noté $\mathcal{A}^\infty$ est l'ensemble des covecteurs nuls sur g, appelés *directions*. Un covecteur Y est *admissible* si il est positif sur $Y \cap E_n$.

f est *croissant* (resp. *décroissant*, ou *constant*) dans la direction Z si le signe de f y est positif (resp. négatif, ou nul). Une direction Z est une *direction admissible pour* Y admissible si $Y \circ Z$ est admissible.

Un covecteur admissible est *optimal* si il n'a pas de direction admissible croissante.

(M, g, f) est *admissible* si il y a un cocircuit positif de $M \setminus f$ contenant g.

(M, g, f) est *borné* si il y a un circuit positif de M/g contenant f.

Résultats connus. ([OM] 10.1.13 p.427, 10.2.8 p.441)

- *'Théorème principal de la programmation linéaire dans les matroïdes orientés'.*

Si (M, g, f) est admissible et borné, alors il existe un covecteur optimal.

- *'Critère du simplexe'.*

Un cocircuit est optimal si et seulement si il est le cocircuit fondamental de g dans une base ne contenant pas f, telle que ce cocircuit est positif sur ses éléments appartenant à dans $E_n \cup g$ et le circuit fondamental de f dans cette base est négatif sur ses éléments appartenant à $E_n \cup f$.

Autrement dit un cocircuit C est optimal si et seulement si il existe une base B, $g \in B$, $f \notin B$, $C = C^*(B; g)$, la colonne g de $\mathcal{T}_M(B)$ est positive sauf éventuellement sur f, la ligne f de $\mathcal{T}_M(B)$ est négative sauf éventuellement sur g.

Remarques.

- On note qu''être 'borné' signifie bien 'ne pas toucher le plan à l'infini'.

- Géométriquement, le signe de f dans un cocircuit optimal indique simplement de quel côté de la représentation géométrique de la fonction objective f ce sommet optimal se trouve.

• Graphe du programme.

Soit (M, g, f) un programme de matroïde orienté admissible et borné sur E.

Définition. ([OM] définition 10.1.16 p. 429)

Soit $G_{(M,g,f)}$ le graphe dont les sommets sont les cocircuits de M positifs sur $E \setminus f$, et dont les arêtes sont les paires modulaires de cocircuits positifs.

Il est connu que le graphe $G_{(M,g,f)}$ est connexe.

Ce graphe est *partiellement dirigé*, on l'appelle alors *graphe du programme* (M, g, f).

Chaque arête (D_1, D_2) de $G_{(M,g,f)}$ est dirigée de la façon suivante. Soit D l'unique cocircuit obtenu par élimination de g entre D_1 et D_2. Si f est positif dans D alors l'arête est dirigée de D_1 vers D_2 (f est croissant dans la direction D). Si f est négatif dans D alors l'arête est dirigée de D_2 vers D_1 (f est décroissant dans la direction D). Si f n'appartient pas à D, l'arête est *parallèle* à f et n'est pas orientée.

Géométriquement, les segments des pseudocercles (faces de dimension 1) non parallèles à f, et non portés par g, sont dirigés de f vers g, dans le sens dit *croissant*. Les faces de dimension 1 non dirigées sont celles qui sont portées par un élément e tel que efg est un circuit du matroïde sous-jacent.

Remarque.

Un matroïde de rang r est uniforme si toute partie à r éléments de E est une base (c'est-à-dire dans le cas réalisable si les hyperplans sont en position générale). Les paires (D_1, D_2) modulaires de cocircuits sont alors celles satisfaisant $\mid D_1 \triangle D_2 \mid = 2$, et toutes les faces de dimension 1 portées ni par f ni par g sont dirigées.

Remarquons de plus que, dans le cas uniforme, ce graphe a pour degré $r - 1$: un sommet d'une région est l'intersection de $r - 1$ pseudohyperplans indépendants et il y a exactement $r - 1$ pseudodroites contenant ce sommet et touchant la région.

Résultat connu. ([OM] 10.1.15, p. 428)

Les cocircuits optimaux d'un programme de matroïde orienté admissible borné sont ceux qui n'ont pas d'arête sortante dans le graphe du programme.

Il y a une complication essentielle dans la version matroïdes orientés de la programmation linéaire : le graphe d'un programme admissible et borné a effectivement des sommets sans arête sortante, mais peut en général comporter des cycles, alors que dans le cas réalisable ceci ne peut pas arriver. Ainsi la méthode du simplexe (parcourir le graphe en suivant des arêtes dirigées jusqu'au sommet) qui est assurée de fonctionner dans le cas réalisable, peut boucler en général dans un matroïde orienté. Des adaptations efficaces de cette méthode aux matroïdes orientés ont été étudiées par Bland, Edmonds, Fukuda [OM]... Un programme de matroïde orienté (M, f_1, f_2) dont le graphe n'a pas de cycle est appelé *euclidien.* Tout programme de rang inférieur ou égal à 3 est eclidien, tout programme réalisable est euclidien. L'exemple non euclidien classique est $EFM(8)$ de rang 4 a 8 éléments (Edmonds, Fukuda, Mandel, voir [OM] 10.4 p. 461).

7. Compléments

• Dans un matroïde général, il n'y a pas de notion de sommet. Le matroïde associé à un graphe ne détermine pas ce graphe en général : un graphe peut par exemple être séparé en deux au niveau d'un point d'articulation sans que cela change le matroïde, ou bien deux arêtes qui forment une coupe du graphe peuvent être interverties sans changer le matroïde.

Le matroïde associé détermine le graphe si et seulement si celui-ci est 3-connexe.

• Il existe des matroïdes non-vectoriels : Vamós. Il s'obtient à partir de 4 droites concourantes en position générale en dimension 4, et de 2 points a_i, a'_i, $1 \leq i \leq 4$, distincts sur chaque droite, et distincts du point d'intersection des droites, en considérant que $a_1a'_1a_2a'_2$ est une base au lieu d'être un circuit. C'est donc le matroïde ayant pour ensemble de circuits $\{a_1a'_1a_3a'_3, a_1a'_1a_4a'_4, a_2a'_2a_3a'_3, a_2a'_2a_4a'_4, a_3a'_3a_4a'_4\}$ et toutes les parties à 5 éléments ne contenant pas une des parties précédentes.

• Il existe des matroïdes non-orientables : Fano. D'ailleurs, ce matroïde est vectoriel sur le corps à deux éléments (c'est l'espace vectoriel de dimension 3 moins l'origine), mais pas sur le corps des réels.

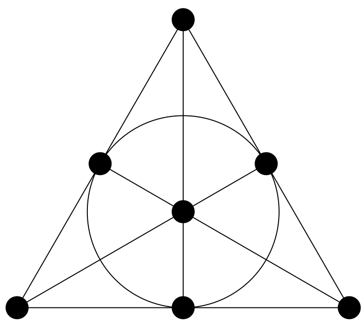

Figure A.6 : matroïde de Fano

• Il existe des matroïdes orientés non réalisables, c'est-à-dire qui ne peuvent être définis à partir d'un arrangement d'hyperplans : non-Pappus.

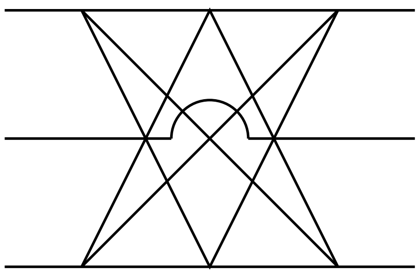

Figure A.7 : configuration de droites non-Pappus

• On peut définir aussi des matroïdes algébriques en utilisant les relations de dépendances algébriques sur un corps. Tous les matroïdes ne peuvent pas être obtenus ainsi. Ces matroïdes sont très peu connus, on ne sait pas par exemple quel est l'ensemble de leurs duaux.

• On peut caractériser des classes de matroïdes par des mineurs exclus. Ainsi, par exemple, $U_{2,4}$ est l'unique mineur exclu pour les matroïdes binaires (i. e. les matroïdes réalisables dans le corps à deux éléments, dont font partie les matroïdes graphiques).

• Il existe aussi des signes pour les bases des matroïdes orientés, appelés parfois 'chirotopes', qui correspondent à l''orientation' d'un repère dans l'espace, et qui viennent des relations de Grassmann-Plücker sur les déterminants. Mais il n'en est jamais question ici.