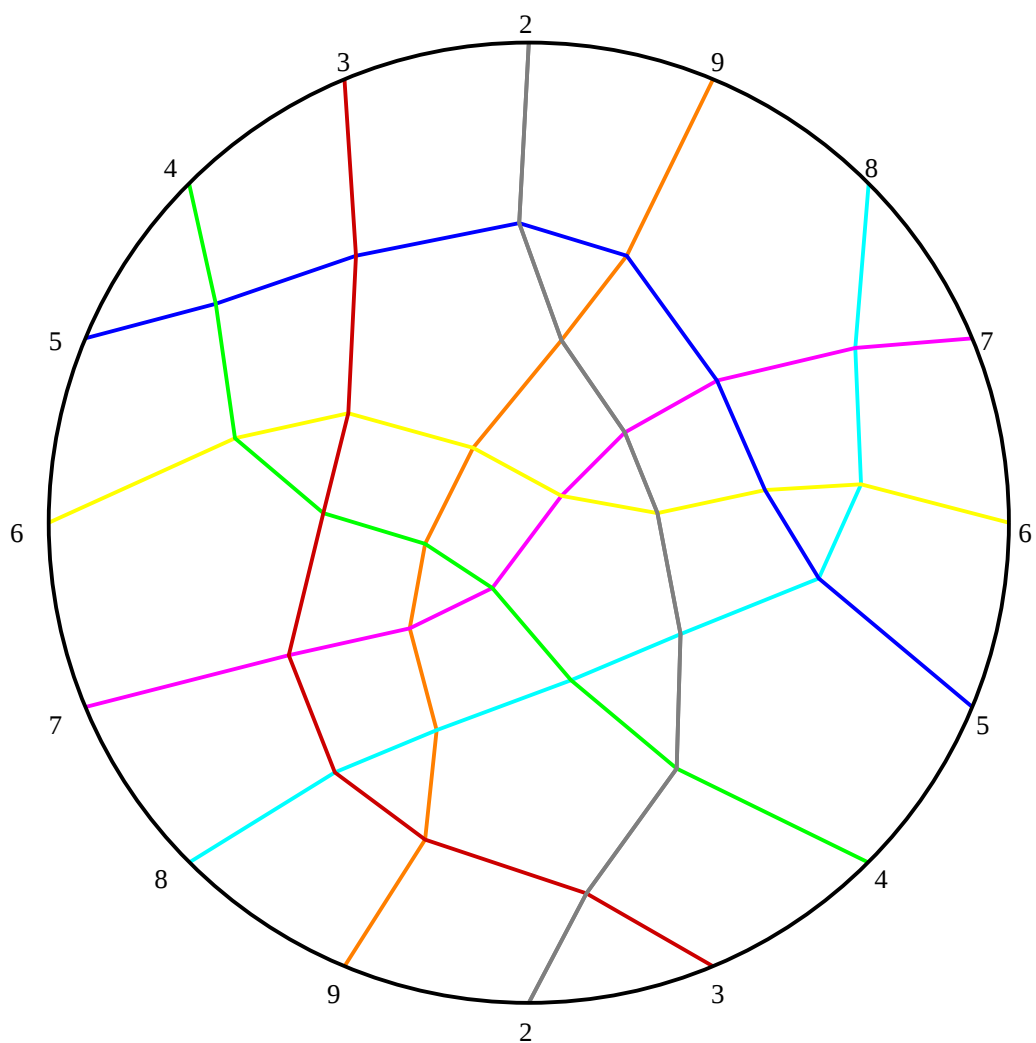


Récréation

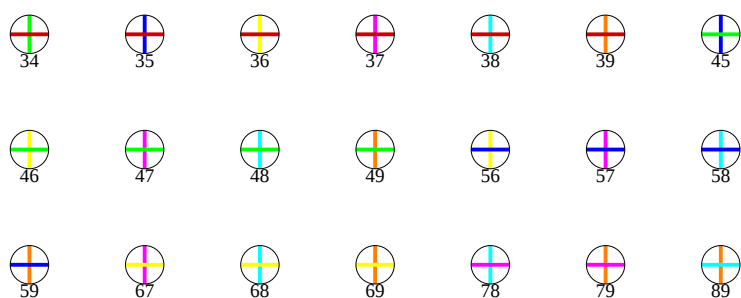
Emeric Gioan

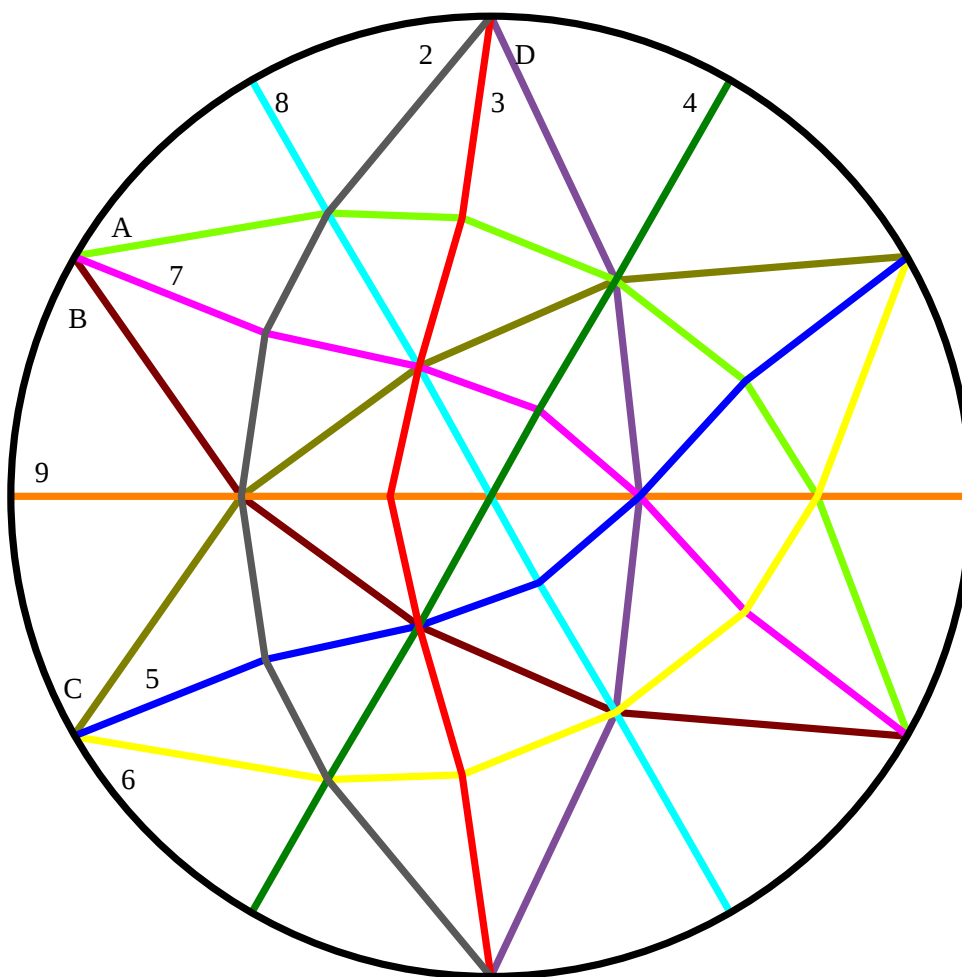
Les deux petits jeux suivants, ainsi que leurs solutions, ne nécessitent aucune connaissance mathématique préalable(*).

(*) Ils sont extraits de ma thèse sur les matroïdes orientés, et illustrent une bijection *attractive* dirigée par l'ordre des éléments, entre les régions et les $\mathcal{NBC}$.



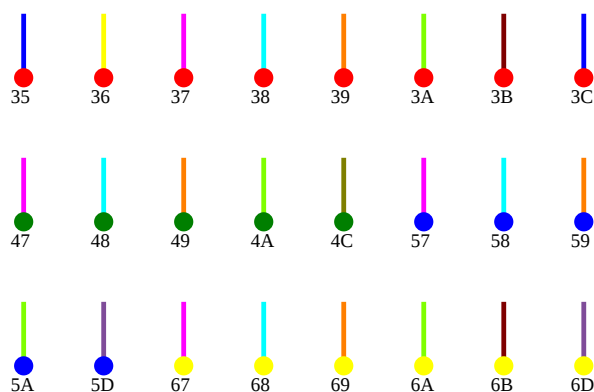
Il faut disposer les 21 pièces ci-dessous dans les 21 régions ne touchant pas le cerclé noir ci-dessus, de sorte que les couleurs de la pièce soient celles de deux bords qui se croisent de la région.





Il faut disposer les 24 pièces ci-dessous dans les 24 régions ne touchant pas le cerclce noir ci-dessus, de sorte que :

- la couleur du segment de la pièce soit la couleur d'un bord de la région ;
- la couleur du point de la pièce soit une couleur passant par une extrémité de ce bord.



Solution

Ces deux petits jeux ne sont pas des casse-têtes : la solution est qu'il y a toujours une pièce qui n'a qu'une seule région où aller.

Plus précisément, une pièce peut a priori aller dans quatre régions au maximum. Cependant, à cause des régions qui touchent le cercle noir qui sont interdites, certaines ont moins de possibilités. On peut même en trouver une qui n'a qu'une seule région possible, et une fois que la pièce est posée et que cette région est interdite pour les autres pièces, on peut encore trouver une autre pièce qui n'a qu'une seule région où aller, et ainsi de suite... on finit en ayant posé toutes les pièces comme il faut.

Maintenant on peut se poser les questions : plutôt que d'essayer les pièces une par une jusqu'à en trouver une qui n'a qu'une région possible, comment savoir quelle région va être la seule région possible pour une des pièces, et pour quelle pièce? ou encore : comment savoir directement où mettre une pièce donnée?

Pour le premier jeu : la réponse est qu'il suffit de chercher sur le dessin un croisement qui touche trois régions interdites. La région restante est alors forcément associée à la pièce qui porte ce croisement si elle existe. Les pièces portent tous les croisements possibles sans la couleur 2.

Réciproquement, une façon directe de trouver la région dans laquelle doit aller une pièce donnée est la suivante : pour chacune des deux pseudodroites dont les couleurs sont données par la pièce, il y a un seul côté qui coupe la pseudodroite de couleur 2, la région associée est celle qui est entre ces deux côtés.

Indication pour le deuxième jeu : cela ressemble au premier mais cette fois la numérotation joue un rôle...

En termes mathématiques, la bijection établie dans ces jeux est une restriction (régions bornées) d'un cas très particulier (dimension 2) de la *correspondance naturelle entre bases et réorientation des matroïdes orientés ordonnés* qui est l'objet de ma thèse(*). Cette correspondance peut être caractérisée et construite en général de différentes façons.

Par exemple la règle du jeu, selon laquelle une pièce ne peut aller dans une région que si une certaine propriété d'adjacence est satisfaite, permet ici de déterminer la bijection. Cette propriété d'adjacence se généralise en dimension supérieure, mais n'y est plus suffisante.

(*) Le premier jeu illustre la partie 1 du chapitre 6. Le deuxième jeu est traité en détails dans la partie 4 du chapitre 6. Intuitivement, la disposition des pièces dans les régions se fait selon un *phénomène d'attraction dirigée par l'ordre des éléments*, voir chapitres 3 et 5.

