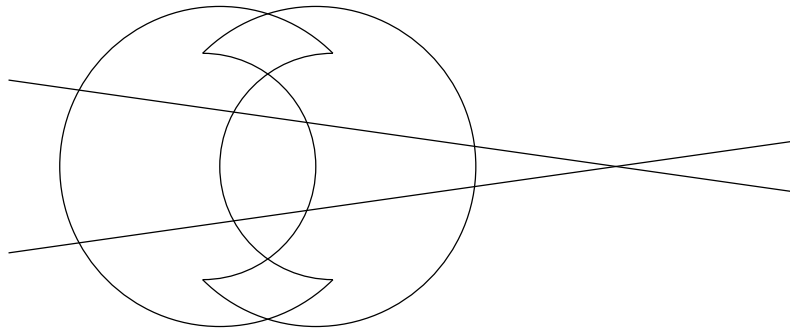


# CORRESPONDANCE NATURELLE ENTRE BASES ET RÉORIENTATIONS DES MATROÏDES ORIENTÉS

Emeric Gioan



THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1  
spécialité  
INFORMATIQUE  
mention  
MATHÉMATIQUES DISCRÈTES

soutenue le 18 décembre 2002

JURY

Examineurs :	M. Pierre Cartier	(président)
	M. Robert Cori	(rapporteur)
	M. Bruno Courcelle	
	M. Jean Fonlupt	
	M. Michel Jambu	
	M. Michel Las Vergnas	
Rapporteurs :	M. Raul Cordovil	
	M. Komei Fukuda	
	M. Günter Ziegler	



## Remerciements

Pour l'honneur et le plaisir qu'ils m'ont fait en s'intéressant à mon travail, en participant à mon jury, et même simplement en me consacrant du temps, je tiens à exprimer toute ma gratitude et tous mes remerciements à Messieurs les Professeurs Pierre Cartier, Raul Cordovil, Robert Cori, Jean Fonlupt, Komei Fukuda, Michel Jambu, et Günter Ziegler.

Merci aussi tout particulièrement à M. le Professeur Bruno Courcelle, codirecteur de cette thèse, qui m'a accueilli chaleureusement dans son laboratoire, et m'a fait découvrir l'interface passionnante entre l'Informatique et les Mathématiques.

Un grand merci enfin à mon bienveillant mentor et directeur de thèse M. le Professeur Michel Las Vergnas, qui m'a soutenu et aidé toujours avec générosité et bonne humeur.



*à mes parents,  
à mes grands-parents,  
à ma soeur,  
à ma mie,  
aux autres aussi,  
au dual.*



## Résumé

L'objet de cette thèse est de définir et d'étudier, de façon intrinsèque et de façon constructive, une application naturelle qui à un matroïde orienté ordonné associe une de ses bases. Pour un matroïde orienté ordonné donné, elle induit une correspondance, déterminée par certaines conditions, entre l'ensemble de ses réorientations et celui de ses bases.

Une condition fondamentale à satisfaire est que les activités soient conservées. Les activités d'une base dans un matroïde ordonné, définies par Tutte, sont deux paramètres entiers duaux, de même que les activités d'un matroïde orienté ordonné, définies par Las Vergnas. En très bref, elles situent ces objets par rapport aux bases minimales et maximales pour l'ordre lexicographique. La correspondance est appelée ainsi *correspondance active canonique du matroïde orienté ordonné*, et constitue une preuve bijective de propriétés énumératives connues du polynôme de Tutte.

Une autre condition est qu'elle soit invariante par passage au dual : la dualité est utilisée partout ici de façon essentielle, dans les caractéristiques fondamentales comme dans les algorithmes.

La correspondance a des propriétés géométriques remarquables, et peut-être construite inductivement soit en utilisant les mineurs relativement au plus grand élément, soit en utilisant une décomposition des activités qui réduit le problème aux activités  $(1,0)$ . En termes de bases, cette décomposition donne une nouvelle expression du polynôme de Tutte utilisant les invariants bêta de certains mineurs. En termes de réorientations, cette décomposition conduit à une notion de *classes d'activités de réorientations*, lesquelles sont en *bijection active* avec les bases. En outre, cette bijection peut-être raffinée en une bijection active entre tous les sous-ensembles d'éléments, qui induit une bijection active entre les régions du matroïde orienté et les parties sans circuit brisé du matroïde (faces du complexe NBC).

Dans le cas d'un graphe, on obtient notamment une *bijection active* entre les arbres couvrants internes et les orientations acycliques ayant un unique puits fixé ; ainsi qu'une bijection entre arbres couvrants d'activités  $(1,0)$  et les orientations acycliques ayant un unique puits et une unique source adjacents fixés.

Dans le cas d'un arrangement d'hyperplans, on obtient notamment une *bijection active* entre les simplexes internes et les classes d'activités de régions, ainsi qu'une bijection entre les simplexes d'activités  $(1,0)$  et les régions bornées. Si les hyperplans sont en position générale, cette dernière bijection s'obtient en appliquant le même programme linéaire simultanément à toutes les régions bornées, de chaque côté d'un hyperplan distingué, noyau de la forme linéaire à optimiser.

L'application générale revient ainsi à une extension de la version combinatoire dans les matroïdes orientés de la programmation linéaire : d'une part chaque réorientation se décompose en régions bornées dans des mineurs du matroïde orienté et de son dual, et d'autre part pour chaque région bornée, au lieu d'un sommet pour une fonction objective, *on optimise une suite de faces emboîtées pour une suite de fonctions objectives*.

Cette application apparaît naturellement dès que l'on considère un ordre total sur les éléments des matroïdes orientés. Elle décrit, intuitivement, un phénomène d'*attraction dirigée par l'ordre des éléments*, et peut-être appelée *fonction attractive des matroïdes orientés ordonnés*.





# SOMMAIRE

Résumé .....	vii
Introduction .....	xi
Préliminaires .....	xxii
Chapitre 1 Une classe inductive de correspondances actives .....	1
Chapitre 2 Décompositions des activités .....	13
2.1 Activités des bases .....	16
2.2 Activités des réorientations .....	31
2.3 Conséquence : autre classe de correspondances actives ....	43
Chapitre 3 Bijection fondamentale pour les activités $(1, 0)$ .....	48
Des bases aux réorientations .....	48
Des réorientations aux bases .....	60
Chapitre 4 La correspondance active canonique $Oribas_M$ .....	64
4.1 Des bases aux réorientations : définition directe .....	64
4.2 Des réorientations aux bases : définition inductive .....	69
Conclusion : transformation de l'hypercube .....	79
4.3 Compléments .....	81
Bijection active induite sur l'hypercube .....	81
Complexité algorithmique .....	83
Exemple d'une autre correspondance active.....	85
4.4 Récapitulatif des propriétés .....	87
Intermède récréatif .....	92
Chapitre 5 Extensions de la programmation linéaire combinatoire.....	93
5.1 Lien entre la fonction attractive $Oribas$ et la programmation linéaire dans les matroïdes orientés .....	97
5.2 Multiprogrammation et programmation en drapeaux ....	102
Conclusion : lien entre structure et optimisation .....	109
Chapitre 6 Cas particuliers .....	110
6.1 Matroïdes orientés uniformes .....	110
6.2 Graphes .....	118
6.3 Arrangements hyperrésolubles .....	127
6.4 Matroïdes orientés acycliques de rang 3 .....	136
Petit jeu sur les arrangements de pseudodroites .....	143
Références .....	144
Index des définitions .....	147
Lexique des notations .....	148
Liste des figures .....	149
Annexe 1 Quelques exemples de rang 3 .....	pages Ex1-Ex13
Annexe 2 Petit récapitulatif sur les matroïdes orientés .....	pages A1-A26
Annexe 3 Récréation .....	pages 1/5-5/5
Abstract, keywords, AMS classification .....	fin



# Introduction

L'objet de cette thèse est de définir et d'étudier une application naturelle qui à tout matroïde orienté ordonné associe une de ses bases, qui induit pour un matroïde orienté donné une correspondance naturelle entre l'ensemble de ses réorientations et celui de ses bases. Cette application sera notée *Oribas*, et sa restriction aux réorientations d'un matroïde orienté ordonné  $M$  sera notée  $Oribas_M$ .

Le sujet central de cette thèse est l'étude des propriétés qui apparaissent lorsque l'on se donne un ordre total sur les éléments d'un matroïde orienté.

La théorie des matroïdes orientés(\*) est née dans les années 1970, issue de diverses directions toujours d'actualité (théorie des graphes, programmation linéaire, arrangements d'hyperplans...) et qui ont chacune leur importance dans cette thèse. Les matroïdes orientés sont des objets à la fois combinatoires, géométriques, topologiques et algébriques. Il s'agit en bref d'axiomatiques des positions relatives de points ou d'hyperplans dans l'espace, ou bien des directions des arêtes des cycles et cocycles dans le cas particulier d'un graphe orienté, ou bien en général des positions relatives de pseudodroites dans le plan ou de pseudohyperplans dans l'espace. Un résultat fondamental est le théorème de représentation topologique, selon lequel les matroïdes orientés décrivent en général les arrangements de pseudosphères dans une sphère réelle à transformation continue près. La vingtaine d'axiomatiques issues de directions diverses qui existent à ce jour, ainsi qu'une notion omniprésente de dualité, confirment le caractère très naturel de cette structure, devenue aujourd'hui un outil fondamental de géométrie discrète et algorithmique.

Partant de l'égalité de deux expressions du polynôme de Tutte d'un matroïde orienté ordonné, l'une comme série génératrice des activités des bases (Tutte 1954), l'autre comme série génératrice (à des puissances de 2 près) des activités des réorientations (Las Vergnas 1984), la problématique de cette thèse était de prouver cette identité numérique en établissant une correspondance explicite entre ces objets, dans une démarche classique de *combinatoire énumérative*.

Dans le cas particulier d'un graphe, on obtient ce que l'on a appelé des *bijections actives* entre arbres couvrants et orientations, qui font intervenir par exemple toutes les orientations acycliques ayant un unique puits fixé, ou bien ayant un unique puits adjacent à une unique source fixée, ou bien, plus généralement, les *classes d'activité* d'orientations, qui sont les parties d'une partition naturelle de l'ensemble des orientations, fonction de l'ordre des arêtes. Ces bijections sont caractérisées indépendamment par des propriétés et des algorithmes, remarquables dans le sens où ils exploitent systématiquement la dualité entre cycles et cocycles (sans que le graphe soit nécessairement planaire).

Dans le cas particulier d'un arrangement d'hyperplans en position générale

---

(\*) On pourra consulter l'Annexe 2 pour un court récapitulatif sur la théorie des matroïdes et des matroïdes orientés, prérequis nécessaire à cette thèse.

(matroïde uniforme), on obtient une bijection qui revient à associer à une région son sommet le plus proche d'un hyperplan distingué et le plus éloigné d'un autre, c'est-à-dire à associer à une région bornée son sommet *optimal*, l'hyperplan distingué étant considéré comme l'infini et l'autre hyperplan comme le noyau d'une forme linéaire à maximiser.

La correspondance générale revient alors à une extension de la version combinatoire dans les matroïdes orientés de la *programmation linéaire* : d'une part chaque réorientation se décompose en régions bornées dans des mineurs du matroïde orienté et de son dual, et d'autre part, pour chaque région bornée, au lieu de rechercher un sommet optimal pour une fonction objective, on cherche une *suite de faces optimale pour une suite de fonctions objectives*.

Elle peut-être vue comme une application naturelle qui à tout matroïde orienté ordonné associe sa base 'optimale' pour un 'programme de matroïde orienté ordonné' dans lequel l'ordre total des éléments fait s'inscrire la notion d'optimalité naturellement dans la structure.

En outre cette application a des constructions inductives efficaces, et de fortes propriétés géométriques.

Intuitivement, selon le point de vue adopté, cette *correspondance active canonique* repose sur un *découpage ordonné* de l'espace ou de l'ensemble des parties signées du matroïde orienté, sur des propriétés d'*adjacence* entre suites de faces et régions devant être satisfaites à la fois de façon *primale et duale*, soit sur un phénomène d'*attraction* dirigée par l'ordre des éléments, soit encore sur une *symétrisation* d'une partition de l'hypercube...

On reprend maintenant plus en détails cette introduction de l'introduction.

La première propriété fondamentale que doit satisfaire la correspondance cherchée et qui est à l'origine de ce travail, est qu'elle conserve les activités. Les activités d'une base dans un matroïde ordonné, définies par Tutte, sont des paramètres duaux, de même que les activités d'un matroïde orienté ordonné, définies par Las Vergnas. En très bref, elles situent ces objets par rapport aux bases minimales et maximales pour l'ordre lexicographique.

Le polynôme de Tutte d'un matroïde est à un changement de variables près la série génératrice du cardinal et du rang des parties du matroïde. C'est aussi, quel que soit un ordre total sur l'ensemble des éléments du matroïde, la série génératrice des activités de ses bases :

$$t(M; x, y) = \sum_{i,j} b_{i,j} x^i y^j$$

où  $b_{i,j}$  est le nombre de bases telles que  $i$  éléments de la base sont minimaux dans leur cocircuit fondamental, et  $j$  éléments de son complémentaire sont minimaux dans leur circuit fondamental. Par exemple la base minimale pour l'ordre lexicographique a tous ses éléments minimaux dans leur cocircuit fondamental (algorithme glouton des matroïdes), elle correspond au binôme de plus haut degré en  $x$ , et la base maximale a tous les éléments de son complémentaire minimaux dans leur circuit fondamental, elle correspond au binôme de plus haut degré en  $y$ .

Il est important et motivant de noter que la notion d'activités apparaît naturellement dès que l'on se donne un ordre sur les éléments, alors qu'en même temps certaines propriétés des activités sont indépendantes de l'ordre choisi.

Ce polynôme a été introduit dans le contexte des graphes par Tutte en 1954 dans [Tu 54] sous le nom de 'polynôme dichromatique', comme une généralisation du polynôme chromatique à deux variables duales : à un changement de variables près et en fixant une des deux variables on retrouve le polynôme chromatique qui compte pour un entier donné le nombre de coloriages du graphe avec ce nombre de couleurs ; et en fixant l'autre on retrouve le polynôme des flots, 'dual' du polynôme chromatique, qui compte pour un entier donné le nombre de flots du graphe dans un groupe abélien ayant ce nombre pour cardinal. Ce polynôme se généralise naturellement aux matroïdes. Il contient de nombreuses informations structurelles et énumératives (nombre de bases ou d'arbres couvrants, d'indépendants, d'orientations acycliques, mais aussi par exemple de cliques de taille donnée [Le 98]...), mais est, en contrepartie, difficile à évaluer du point de vue complexité, sauf en huit points particuliers pour des classes succinctes de matroïdes [JaVeWe 90].

Il se retrouve dans des domaines très variés : il détermine le polynôme de Jones en théorie des nœuds [Th 87], il permet de retrouver la formule de McWilliams des codes linéaires simplement par sa propriété de dualité [Gr 76], il compte par l'intermédiaire des activités externes les configurations de niveau donné dans le modèle du tas de sable [CoLB 01] (voir aussi [BePe 97] pour le cas particulier du graphe complet et des fonctions de parking), et se retrouve dans divers autres modèles physiques (par exemple les zéros du polynôme chromatique ont des interprétations en physique des transitions de phase, ou dans le modèle de Potts [So 01])... Pour un descriptif des horizons ouverts par ce polynôme, voir [We 93]. Pour un récapitulatif des travaux effectués sur ce polynôme dans le contexte des matroïdes voir [BrOx 92].

Par ailleurs les activités des bases d'un matroïde sont, via les circuits brisés (circuit moins son plus petit élément 'broken circuit'), en liaison étroite avec d'autres domaines tels que l'algèbre d'Orlik-Solomon, l'homologie des matroïdes, ou la 'shellabilité' des polyèdres [Bj 87].

Historiquement, le premier résultat énumératif ouvrant la voie à cette thèse date de 1973. Stanley a montré dans [St 73] que le nombre d'orientations acycliques d'un graphe  $G$  est l'évaluation en  $-1$  du polynôme chromatique. Ce résultat a été généralisé par Zaslavsky aux arrangements d'hyperplans [Za 75] et par Las Vergnas aux matroïdes orientés [LV 75] (voir aussi [Ca 80] et [LV 80]). Enfin, en 1984, ce dernier proposait un modèle d'état du polynôme de Tutte fondé sur les activités des réorientations d'un matroïde orienté [LV 84] :

$$t(M; x, y) = \sum_{i,j} o_{i,j} 2^{-i-j} x^i y^j$$

où  $o_{i,j}$  est le nombre de réorientations du matroïde orienté ordonné  $M$  ayant  $i$  éléments minimaux dans au moins un cocircuit positif et  $j$  éléments minimaux dans au moins un circuit positif. Dans une représentation topologique du matroïde orienté comme arrangement de pseudosphères, les régions adjacentes à tous les fermés qui apparaissent dans la construction de la base minimale par l'algorithme glouton correspondent au binôme de plus haut degré en  $x$ , celles qui ont la même propriété dans le dual correspondent au binôme de plus haut degré en  $y$ .

En comparant ces deux expressions du polynôme de Tutte on obtient

$$o_{i,j} = 2^{i+j} b_{i,j}$$

pour tout  $i, j$ . La question fondamentale - sujet de cette thèse - se pose alors d'une preuve bijective de cette formule : on cherche une application telle que toute base d'activité  $(i, j)$  soit l'image de  $2^{i+j}$  réorientations de mêmes activités. On dira d'une telle application qu'elle définit une 'correspondance active' du matroïde orienté ordonné. En outre, bien sûr, on souhaite une correspondance active la plus naturelle possible, c'est-à-dire qui soit consistante avec les constructions fondamentales des matroïdes orientés, qui ait une définition simple et qui soit si possible déterminée par des propriétés agréables.

L'application particulière  $Oribas_M$  que l'on va définir répond à cette question : il se trouve qu'imposer à une correspondance compatible avec les activités des conditions naturelles diverses conduit à plusieurs constructions mais toujours de cette même application, que l'on nomme *correspondance active canonique du matroïde orienté ordonné*. En particulier elle conservera non seulement les activités mais aussi les éléments actifs (précisant l'égalité numérique ci-dessus, corollaire 1.7), ainsi que les 'partitions actives', raffinement introduit pour se ramener aux activités  $(1, 0)$ .

Une première façon de construire  $Oribas$  est de se ramener au cas des activités  $(1, 0)$ , c'est-à-dire à une preuve bijective de l'égalité

$$o_{1,0} = 2b_{1,0}$$

On retrouve le résultat de Greene et Zaslavsky [GrZa 83], généralisé aux matroïdes orientés par Las Vergnas [LV 77] : le nombre de régions d'un côté donné d'un hyperplan donné qui ne touchent pas cet hyperplan, dans un arrangement d'hyperplans définissant un matroïde orienté  $M$  est  $b_{1,0} = \beta(M)$  (indépendamment de l'hyperplan choisi), appelé aussi invariant bêta du matroïde par Crapo [Cr 67]. Dans un graphe, le nombre  $b_{1,0}$  est le nombre d'orientations acycliques ayant un unique puits donné adjacent à une unique source donnée (indépendamment de l'arête choisie). Elles apparaissent régulièrement dans des algorithmes de graphes [FrMeRo 95]. On les met ici en bijection explicite avec les arbres couvrants d'activités  $(1, 0)$ .

Au passage à la réorientation opposée près, la correspondance pour les activités  $(1, 0)$  est alors une bijection. Elle est définie par deux algorithmes duaux équivalents (proposition 3.2), qui expriment qu'une propriété d'adjacence doit être satisfaite à la fois de façon primale et de façon duale. Le fait que l'application ainsi définie est une bijection est utilisé indirectement dans la plupart des constructions ultérieures (théorème fondamental 3.6).

La façon de construire la correspondance générale à partir de cette bijection (théorème d'extension 2.3.1) utilisera des décompositions similaires - mais indépendantes - des activités de l'ensemble des bases d'une part (théorème 2.1.1) et de l'ensemble des réorientations d'autres part (théorème 2.2.5), intéressantes indépendamment du problème de départ. Il s'agit d'un raffinement des activités, au delà des ensemble d'éléments actifs, par des *partitions actives* de l'ensemble sur lequel est défini le matroïde orienté, définies à partir de *suites décomposantes* de

parties de cet ensemble. Pour les bases, tout repose sur des décompositions des graphes bipartis indiquant les échanges possibles d'éléments à partir d'une base donnée. La décomposition active des bases conduit numériquement à une formulation du polynôme de Tutte d'un matroïde n'utilisant que les invariants bêta de certains mineurs (corollaire 2.1.15) :

$$t(M; x, y) = \sum_{\substack{\emptyset = F_\varepsilon^* \subset \dots \subset F_0^* = F_c \\ F_c = F_0 \subset \dots \subset F_t = E \\ \text{suite décomposante}}} \left( \prod_{1 \leq k \leq t} \beta(M(F_k)/F_{k-1}) \right) \left( \prod_{1 \leq k \leq \varepsilon} \beta(M(F_{k-1}^*)/F_k^*) \right) x^t y^\varepsilon$$

Pour les réorientations, chaque élément est associé à un élément actif, qui est précisément le plus grand plus petit élément d'un circuit ou cocircuit positif le contenant dans cette réorientation. La décomposition active des réorientations conduit à une notion de *classes d'activités* des réorientations des matroïdes orientés, qui forment une partition remarquable de l'ensemble des réorientations. Celle-ci signifie géométriquement dans un arrangement de pseudosphères, ou d'hyperplans, que l'on regroupe entre elles les régions ayant une même situation face à l'ordre total des pseudosphères, ou des hyperplans (par exemple : les régions correspondant au binôme de plus haut degré en  $x$ , dont il est question plus haut, forment une de ces classes d'activités ; autre exemple : deux régions opposées qui ne touchent pas la plus petite pseudosphère forment elles aussi une classe d'activités).

Dans un graphe, pour certains ordres sur les arêtes, il y aura notamment une et une seule orientation acyclique ayant un unique puits donné dans chacune de ces classes pour les orientations acycliques (proposition 6.2.2), ce qui donnera une bijection entre arbres couvrants d'activité externe nulle et ces orientations ( $j = 0$ ), conservant l'autre activité  $i$ . Une autre bijection entre ces mêmes objets a été décrite récemment dans [GeSa 00] mais elle ne conserve pas les activités. D'autre part, une énumération de ces orientations de graphes par les mêmes coefficients du polynôme de Tutte avait été faite par Viennot [Vie 86] en définissant des 'composantes' de ces orientations acycliques, à partir cette fois-là d'un ordre sur les sommets. Ici, le point de vue des matroïdes orientés qui ne s'occupe que des arêtes permet de prendre en compte - via la dualité - toutes les orientations.

La bijection en question ci-dessus est d'autre part liée à la programmation linéaire dans les matroïdes orientés, dont elle permet de définir une extension pour laquelle la notion d'optimalité est naturellement inscrite dans la structure, via l'ordre total des éléments (proposition 5.1).

Le problème fondamental de la programmation linéaire : optimiser une forme linéaire réelle sur une région de l'espace délimitée par des hyperplans, a une traduction purement combinatoire dans le matroïde orienté défini par ces hyperplans, et peut-être résolu dans ce cadre. On peut notamment y généraliser les algorithmes du type 'méthode du simplexe' (parcourir le squelette en suivant des arêtes croissantes jusqu'au sommet), qui présentent a priori la difficulté majeure de pouvoir boucler (alors que ce n'est pas possible dans le cas réalisable). Ceci a été fait notamment par Bland, Edmonds, Fukuda. De nombreuses recherches ont été, et sont encore, consacrées à ce sujet qui fait l'objet du livre [BaKe 92] et de tout le chapitre 10 du livre de référence sur les matroïdes orientés [OM].

Dans un arrangement de pseudohyperplans représentant le matroïde orienté, un

hyperplan (le minimal) étant considéré comme l'infini et un autre (le second minimal) comme le noyau d'une forme linéaire à optimiser, l'application *Oribas* restreinte aux activités  $(1, 0)$  calcule déjà pour une région bornée un sommet optimal pour ce programme linéaire combinatoire. De plus elle calcule toujours un seul sommet optimal (et non une face optimale parallèle au noyau de la fonction objective) car l'optimisation se fait selon une *suite de fonctions objectives indépendantes* (*multiprogrammation*). Cette multiprogrammation conduit à définir un *graphe actif des cocircuits* consistant à orienter d'une façon utile et dépendant de l'ordre (mais invariante par réorientation) le graphe des cocircuits, qui est lui-même un sujet d'étude classique en théorie des matroïdes orientés (voir par exemple [CoFuGO 00]). Le sommet optimal d'une région sera l'unique puits de ce graphe restreint à la région (théorème 5.2.3). Encore plus généralement, ce n'est pas seulement un sommet optimal qui est calculé, mais une base ou autrement dit, compte tenu de l'ordre, *une suite optimale de faces emboîtées* (*programmation en drapeaux*). Ceci revient à considérer un 'programme étendu' prenant en compte l'ordre tout entier (au lieu des seuls deux éléments distingués : l'infini et la fonction objective). D'un point de vue algorithmique, la *base optimale* d'une région bornée peut-être calculée par induction relativement au plus grand élément (théorème 3.8).

Lorsque les hyperplans sont en position générale elle consiste effectivement à associer à une région bornée son sommet optimal, celui qui est le 'plus proche de l'infini' dans la région, au regard de l'hyperplan 'sol' noyau de la forme linéaire à optimiser. Elle définit de plus une bijection entre ces régions et ces sommets. Et par ailleurs on montre que dans le cas réalisable cette bijection est l'unique façon d'associer bijectivement les régions bornées à ces sommets de façon que le sommet associé à une région touche cette région. En termes physiques, le sommet associé à une région est l'endroit de la région où finirait un point mobile dans la région 'attiré' par l'infini depuis le sol. Ce qui est curieux c'est que l'on obtienne ainsi une bijection et que tout ceci se généralise en considérant des 'suites de faces élémentaires' mobiles attirées d'une façon définie par l'ordre des éléments. Intuitivement, et de façon générale, la correspondance active canonique *Oribas<sub>M</sub>* décrit un phénomène d'*attraction dirigée par l'ordre des éléments*, qui crée de façon remarquable une bijection entre bases et classes d'activités des réorientations.

Pour toutes les raisons précédentes, on appelle l'application *Oribas* la *fonction attractive des matroïdes orientés ordonnés*.

La correspondance active canonique ne dépend que de la classe de réorientations, et elle est d'autre part invariante par passage au dual. La dualité est une notion fondamentale de la théorie des matroïdes et des matroïdes orientés, et elle est exploitée de façon essentielle dans toutes les constructions de ce travail.

Notamment l'application *Oribas* possède une propriété de dualité forte (propriété 4.3.1), qui peut servir à la caractériser, avec laquelle on retrouve, et on étend, le fait que passer au programme linéaire dual revient à passer au matroïde orienté dual et à l'échange d'éléments qui jouent des rôles duaux.

Par ailleurs, en termes géométriques, la dualité dans la décomposition des activités des réorientations permet par exemple de représenter toutes les parties du matroïde comme des produits de covecteurs d'un mineur du matroïde et d'un mineur



de son dual, c'est-à-dire comme des couples de régions de représentations d'un mineur du matroïde et d'un mineur de son dual (corollaire 2.2.2). Ceci donne une structure originale et utile à l'hypercube des réorientations.

Puisque les constructions de *Oribas* s'appliquent en particulier aux graphes, la dualité a dans ce cas un relief particulier. En effet les graphes n'ont pas en général de notion de dual. On pourrait presque dire que la dualité est l'«avantage» de la théorie des matroïdes orientés sur celle des graphes. D'ailleurs des problèmes sur les graphes où l'on pressent une certaine dualité bloquent parfois finalement sur des interrogations du type «qu'est ce que le dual d'un sommet?». Ici la dualité omniprésente permet de passer outre ce type de questions et de construire, même dans un graphe, la correspondance à chaque fois d'une façon «primale» ou de façon duale. Par exemple, la bijection entre arbres couvrants d'activités  $(1, 0)$  et les orientations acycliques ayant un unique puits adjacent à une unique source donnés, sur laquelle est fondée la définition de *Oribas* par décomposition des activités, peut se faire soit par un algorithme sur les cycles du graphe, soit par un algorithme similaire sur les cocycles (proposition 3.2).

Enfin une propriété de construction inductive fournit un autre point de vue pour construire *Oribas* que les décompositions précédentes qui ramènent au cas  $(1, 0)$  : on peut inductivement définir à la fois la correspondance et les décompositions en utilisant récursivement les mineurs  $M/\omega$  et  $M \setminus \omega$  où  $\omega$  est le plus grand élément du matroïde  $M$  (théorème 4.2.1). Ceci étend et précise la définition inductive classique du polynôme de Tutte. En termes de programmation linéaire et d'un point de vue algorithmique, ceci permet une construction de la solution optimale qui n'est pas plus efficace que la méthode du simplexe lorsque l'on s'intéresse à une seule région, mais qui est très efficace si l'on s'intéresse à toutes les régions à la fois, et ce pour le problème général. Autrement dit, on a une méthode pour calculer l'image de toutes les réorientations beaucoup plus efficace que de les considérer une par une : la construction inductive revient à calculer la correspondance pour toutes les réorientations dans tous les mineurs obtenus en supprimant ou en contractant à chaque fois le plus grand élément, ce qui est finalement d'une part économique (si le matroïde a  $n$  éléments, on calcule la correspondance des  $2^n$  réorientations en  $n$  niveaux de  $2^n$  réorientations), et surtout d'autre part structurellement instructif.

On y retrouve par ailleurs l'omniprésence de la dualité : on peut choisir à chaque étape de la construction inductive soit un point de vue «primal» soit un point de vue «dual».

Il apparaît ainsi que la correspondance  $Oribas_M$  revient à une transformation de l'hypercube des parties du matroïde : d'un côté celui des bases (les activités des bases induisent une partition classique de l'hypercube) et de l'autre celui des réorientations (les classes d'activités forment une partition, en bijection avec la précédente). Par exemple pour les activités  $(1, 0)$ , une base correspond à deux parties dans le premier hypercube ayant leurs premières coordonnées différentes, et à deux parties opposées (complémentaires) dans le second. En choisissant une réorientation de référence, la bijection entre parties de ces deux partitions de l'hypercube se précise en une bijection active entre ces deux hypercubes, qui, restreinte aux réorientations acycliques, est une bijection active entre les parties sans circuit brisé du matroïde («no broken circuit

complexe'  $\mathcal{NBC}$ ) et les régions du matroïde orienté.

Cette transformation est une sorte de *symétrisation d'une partition de l'hypercube*, autre façon de voir cette correspondance naturelle.

Dans le chapitre 0 'Preliminaires', on définit précisément les notions fondamentales de cette thèse et on rappelle ou établit quelques résultats couramment utilisés par la suite.

Dans le chapitre 1 'Une classe inductive de correspondances actives', on donne une construction inductive que doit satisfaire toute correspondance candidate à certaines propriétés naturelles. La construction reprend de façon ensembliste la définition inductive classique du polynôme de Tutte par suppressions et contractions, prouvant à nouveau, et étendant, l'égalité numérique de départ. On déduira en effet qu'une telle correspondance ne conserve pas seulement les activités mais en plus les éléments actifs. Cependant les propriétés imposées ne suffiront pas à déterminer une seule correspondance, un 'choix arbitraire' étant parfois possible dans la construction. Ce chapitre peut être considéré comme une introduction au vif du sujet. Il montre comment construire techniquement en général des correspondances actives. Ses résultats inspireront les constructions des réorientations vers les bases dans les chapitres 3 et 4 mais sans y être utilisés.

Dans le chapitre 2 'Décompositions des activités', on introduit la notion de partitions actives, raffinement des notions d'activités et d'ensemble d'éléments actifs. Ceci permettra de définir dans une première partie une décomposition de l'ensemble des bases en bases d'activités  $(1, 0)$ , et dans une deuxième partie, indépendamment, une décomposition similaire des réorientations. On pourra ainsi étendre naturellement n'importe quelle bijection pour le cas  $(1, 0)$  en une correspondance générale, d'où une autre classe de correspondances actives.

Dans le chapitre 3 'Bijection fondamentale pour les activités  $(1, 0)$ ', on définit une application particulière des bases vers les réorientations pour le cas des activités  $(1, 0)$ . La clé de voûte des constructions de la correspondance est que cette application est une bijection. On construit alors l'application réciproque, des réorientations vers les bases, en utilisant inductivement les mineurs relativement au plus grand élément.

Dans le chapitre 4 'La correspondance active canonique  $Oribas_M$ ', on étend la bijection du chapitre précédent grâce aux résultats du chapitre 2. On donne alors les deux algorithmes réciproques qui définissent la correspondance active canonique : de façon directe des bases vers les réorientations, et de façon inductive en supprimant ou en contractant le plus grand élément pour l'application  $Oribas_M$  des réorientations vers les bases, ce qui revient à spécifier le choix qui restait arbitraire dans le chapitre 1. Ensuite on établira quelques constructions complémentaires dont une bijection active induite entre les parties sans circuit brisé (faces du complexe NBC) et les réorientations acycliques. Enfin on récapitulera les propriétés fondamentales et caractéristiques de cette correspondance.

Dans le chapitre 5 'Extensions de la programmation linéaire combinatoire', on explicitera les liens entre les résultats connus d'optimisation et la fonction attractive  $Oribas$ , qui peut se formuler entièrement en termes de signes dans les tableaux fondamentaux des bases, et que l'on transportera pour obtenir un programme linéaire combinatoire étendu. Premièrement l'optimisation se fait via  $Oribas$  par

rapport à une suite de formes linéaires au lieu d'une seule (multiprogrammation), et deuxièmement, c'est une suite de faces optimales que l'on cherche au lieu d'un sommet (programmation en drapeaux).

Le chapitre 6 présente des cas particuliers qui illustrent plutôt telle ou telle partie de la construction générale. Celle-ci sera redéfinie à chaque fois sans référence aux définitions antérieures, conduisant à des résultats plus spécifiques.

Le cas des matroïdes uniformes (pseudosphères en position générale) est intéressant car il permet de mettre l'accent sur ce qui est dû à l'orientation du matroïde : les matroïdes (non orientés) uniformes sont des objets triviaux, alors que les matroïdes orientés uniformes sont loin de l'être [GiLV1].

Dans le cas graphique, une correspondance entre bases (arbres couvrant) et orientations conservant les activités, distincte de *Oribas*, a déjà été définie par Las Vergnas [LV 92], mais cette correspondance ne se généralise pas que l'on sache au delà des matroïdes réguliers, et ne satisfait pas les propriétés naturelles qui caractérisent *Oribas* [GiLV2].

Ces deux cas particuliers font bien apparaître deux aspects complémentaires : dans le cas d'un matroïde orienté uniforme (qui ne peut pas être graphique dès que l'on a plus de cinq éléments) les activités jouent un rôle très simple alors que l'aspect optimisation s'illustre bien ; dans le cas graphique ce dernier aspect est simplifié par la structure des graphes ('loin' de l'uniformité) alors que les activités, leurs décompositions, les problèmes qu'elles posent dans les constructions et les preuves relatives sont presque aussi compliquées que dans le cas général.

Dans le cas des arrangements hyperrésolubles d'hyperplans, le point de vue géométrique met en relation très étroite la correspondance et le graphe d'adjacence des régions, l'adjacence entre régions étant aussi une notion sous-jacente importante de l'application *Oribas*.

Enfin, le cas des matroïdes orientés acycliques de rang 3 (arrangements de pseudodroites) est facile à décrire complètement et est un bon support pour l'intuition [GiLV1].

En Annexe 1 se trouvent les dessins de la correspondance pour les réorientations acycliques de divers matroïdes orientés de rang 3.

L'Annexe 2 est un récapitulatif de théorie des matroïdes et matroïdes orientés, axé principalement sur l'aspect géométrique et l'application aux graphes, comprenant les définitions et résultats supposés connus au cours de cette thèse.

La Récréation donnée en Annexe 3 pose et résout, de façon ludique, le problème en rang 3 restreint aux activités  $(1, 0)$ , problème qui est traité en détails dans le chapitre 6.

### Notice.

Le chapitre 1 (classe inductive de correspondances), la partie 1 du chapitre 2 (décomposition des activités des bases), la partie 2 du chapitre 2 (décomposition des activités des réorientations), et le chapitre 3 (bijection pour les activités  $(1, 0)$ ) sont indépendants.

La partie 3 du chapitre 2 est la conséquence des deux premières.

La partie 1 du chapitre 4 (définition directe des bases aux réorientations) fait le lien entre le chapitre 3 et la partie 3 du chapitre 2.

La partie 2 du chapitre 4 (définition inductive des réorientations aux bases) relie tout ce qui précède.

Le chapitre 5 (programmation linéaire) peut-être lu indépendamment des autres. Il ne dépend pour l'essentiel que des résultats du chapitre 3.

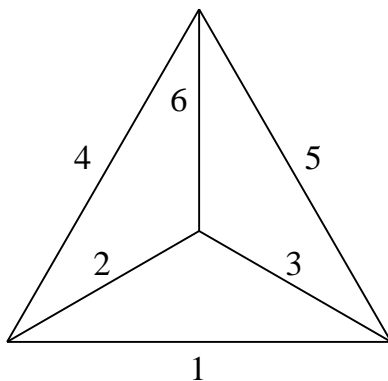
La chapitre 6 (cas particuliers) peut-être lu directement après le chapitre 0 (préliminaires).

La Récréation peut-être lue sans aucun préliminaire, et sans aucune connaissance mathématique préalable.

Hormis dans les 4 parties indépendantes, des liens sont mentionnés entre toutes les parties.

Au cours du texte des *interprétations géométriques* seront faites régulièrement, elles font référence à la représentation topologique des matroïdes orientés comme arrangements de pseudosphères.

Un exemple reviendra fréquemment : celui du graphe  $K_4$ . Il servira à la fois d'exemple graphique et géométrique via sa représentation par un arrangement de pseudodroites, et on utilisera toujours la même numérotation de ses arêtes (figures  $K_4$  graphique et  $K_4$  géométrique ci-dessous). Ces figures représentent  $K_4$  de façon non-orientée, c'est-à-dire qu'on n'a pas choisi d'orientation de référence définissant le matroïde orienté associé. En effet la correspondance que l'on va construire ne dépend pas d'une orientation de référence, elle concerne la classe de réorientation d'un matroïde orienté donné.

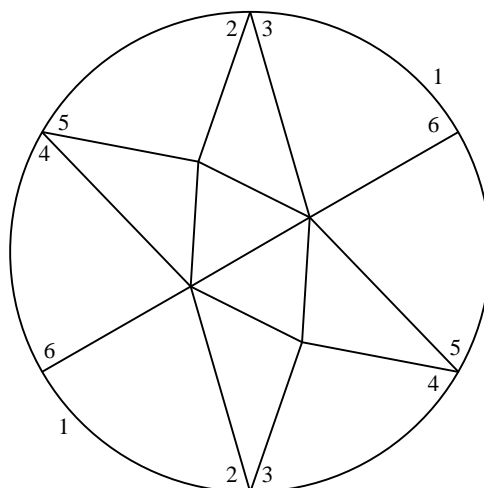


**Figure  $K_4$  graphique**

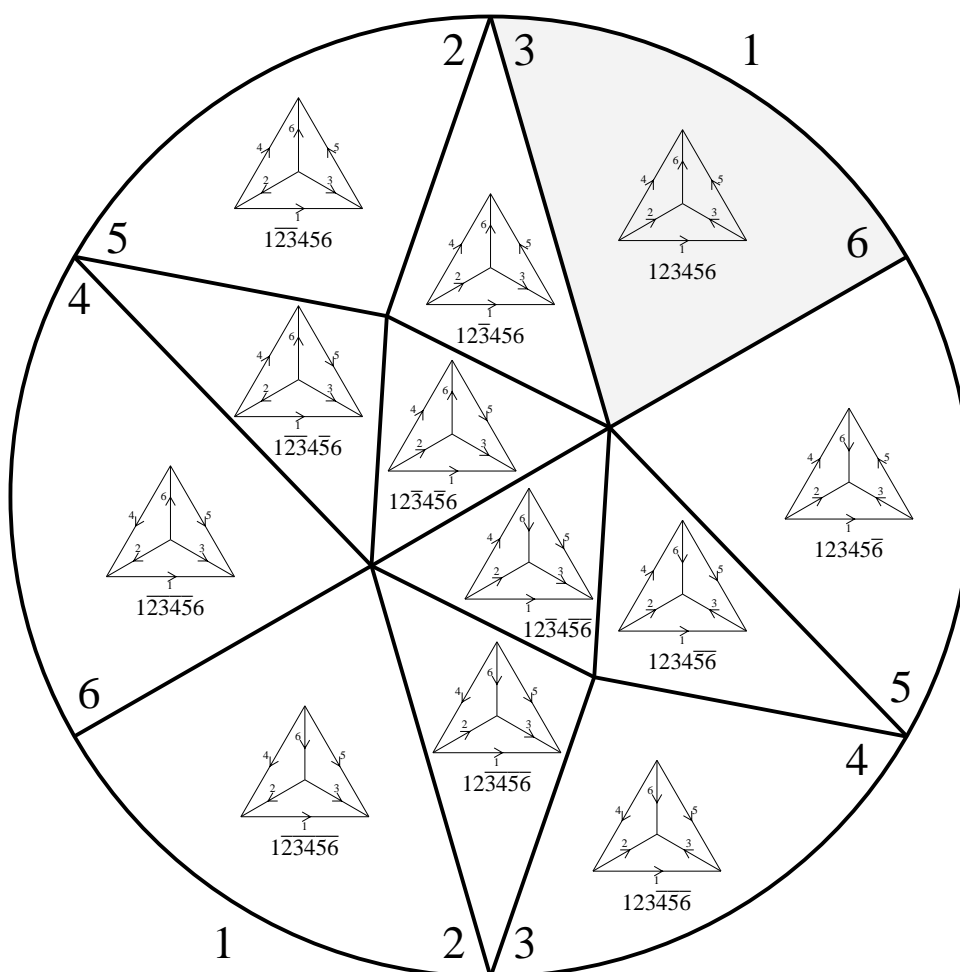
Lorsque l'on aura besoin pour un exemple d'un matroïde orienté précis, on prendra parfois le matroïde orienté défini par une orientation choisie de  $K_4$ , ce sera celui de la figure suivante (l'orientation de référence qui correspond au covecteur maximal positif du matroïde orienté est grisée).

La représentation géométrique détaillée de ce matroïde orienté  $K_4$ , avec mention de ses covecteurs, de ses réorientations acycliques et de ses vecteurs se trouve dans l'Annexe 2 Figures A.1, A.2, A.3, A.4, A.5.

D'autres exemples seront donnés et illustrés pour des points plus spécifiques,

Figure  $K_4$  géométrique

notamment pour chaque cas particulier du chapitre 6 que l'on proposera parfois de consulter au cours du texte.

Figure  $K_4$  matroïde orienté

# Chapitre 0

## Préliminaires

Dans ce chapitre on introduit les notations employées par la suite, on définit précisément les notions mentionnées dans l'introduction, et on pose ou rappelle quelques résultats qui seront utilisés fréquemment par la suite.

- Généralités.

Soit  $E$  un ensemble fini.

Tout au long de cette étude, comme de coutume, on se permettra la notation  $abc\dots$  pour le sous-ensemble  $\{a, b, c, \dots\}$  de l'ensemble  $E$ . Pour une partie signée de  $E$ , les éléments négatifs seront surlignés, par exemple  $\overline{abcd}$  désignera la partie signée  $A$  telle que  $A^+ = \{a, d\}$  et  $A^- = \{b, c\}$ . Sauf ambiguïté, on pourra utiliser la même notation pour une partie signée  $A = (A^+, A^-)$  et son support  $A = A^+ \cup A^-$ . On notera parfois  $\sigma_A(e)$  le signe de  $e$  appartenant à  $\{+, -, 0\}$  dans la partie signée  $A$  ( $\sigma_A(e) = 0$  si  $e \notin A$ ).

Si  $E$  est totalement ordonné, pour  $A \subseteq E$  on notera  $\min(A)$  le plus petit élément de  $A$ , on pourra l'appeler l'*élément actif* de  $A$  ; et pour un ensemble  $\mathcal{P}$  de parties de  $E$ , on notera  $A\mathcal{P}$  l'ensemble des  $\min(A)$ ,  $A \in \mathcal{P}$ .

Le plus grand élément de  $E$ ,  $\max(E)$ , sera généralement noté  $\omega$  lorsque  $E$  sera l'ensemble sur lequel est défini un matroïde. Enfin  $\subseteq$  symbolisera l'inclusion au sens large,  $\subset$  l'inclusion stricte,  $+$  ou  $\uplus$  l'union disjointe et  $\triangle$  la différence symétrique de deux ensembles.

Soit  $M$  un matroïde sur un ensemble  $E$ .

L'ensemble des bases de  $M$  sera noté  $\mathcal{B}_M$  (ou simplement  $\mathcal{B}$ ) ; sa fonction rang sera notée  $r_M$  (ou simplement  $r$ ), et le rang  $r(E)$  du matroïde sera noté  $r$  ; la fermeture dans  $M$  sera notée  $cl_M$  (ou simplement  $cl$ , venant de 'closure' en anglais). De manière générale, des notations abrégées pourront être employées lorsqu'il n'y aura pas de risque d'ambiguïté.

On rappelle que  $cl_M(\emptyset)$ , ensemble des  $e \in E$  tels que  $r(e) = 0$ , est l'ensemble des *boucles* de  $M$ , que  $cl_{M^*}(\emptyset)$ , ensemble des  $e \in E$  tels que  $r(M) = r(M \setminus e) + 1$ , est l'ensemble des *isthmes* de  $M$ , et que, pour un élément  $e$  non boucle,  $cl_M(e)$  est la *classe parallèle* de  $e$  dans  $M$  c'est-à-dire l'ensemble des  $f \in E$  tels que  $ef$  soit un circuit de  $M$ . Un matroïde sans boucle dont les classes parallèles sont réduites à un élément est dit *simple* (ou de manière équivalente, c'est un matroïde dont les circuits sont de cardinal au moins 3). Enfin la contraction d'une partie  $A$  dans  $M$  sera notée  $M/A$  et sa suppression  $M \setminus A$ .

• Circuits et cocircuits fondamentaux.

Soit  $B$  une base de  $M$ .

On note  $C_M(B; e)$  (ou simplement  $C(B; e)$ ) le *circuit fondamental* de  $e \in E \setminus B$  par rapport à  $B$ . C'est l'unique circuit de  $M$  contenu dans  $B \cup e$ . Autrement dit  $C(B; e)$  est l'ensemble des  $b \in E$  tels que  $B - b \cup e \in \mathcal{B}$ .

On note  $C_M^*(B; b)$  (ou simplement  $C^*(B; b)$ ) le *cocircuit fondamental* de  $b \in B$  par rapport  $B$ . C'est l'unique cocircuit de  $M$  contenu dans  $(E \setminus B) \cup b$ . C'est aussi le complémentaire de l'hyperplan (fermé de rang  $r - 1$ ) engendré par  $B - b$  :  $C^*(B; b) = E \setminus (cl_M(B - b))$ . Autrement dit  $C^*(B; b)$  est l'ensemble des  $e \in E$  tels que  $B - b \cup e \in \mathcal{B}$ .

**Convention de notation.** Si  $M$  est un matroïde orienté, on note  $C^*(B; b)$ , resp.  $C(B; e)$ , le cocircuit, resp. le circuit, de  $M$ , de support  $C^*(B; b)$ , resp.  $C(B; e)$ , dans le matroïde sous-jacent, pour lequel  $b$ , resp.  $e$ , est signé  $+$ .

Notons de suite qu'évidemment

$$e \in C^*(B; b)$$

si et seulement si

$$b \in C(B; e)$$

et que  $C_M(B; e) = C_{M^*}^*(E \setminus B; e)$  pour tout  $e \notin B$ .

Le *graphe fondamental*  $\mathcal{G}_M(B)$  de  $B$  est le graphe biparti ayant pour ensemble de sommets  $E$ , et dont les arêtes sont les  $(b, e)$  avec  $b \in B$ ,  $e \notin B$  et  $e \in C^*(B; b)$  (ou  $b \in C(B; e)$ ). Ainsi

$$\mathcal{G}_{M^*}(E \setminus B) = \mathcal{G}_M(B)$$

Dans le chapitre 5, on utilisera une autre représentation du graphe fondamental d'une base d'un matroïde orienté, plus proche du formalisme matriciel de la programmation linéaire, celle de 'tableau fondamental' : les circuits et cocircuits fondamentaux (signés) d'une base sont représentés respectivement par les colonnes et les lignes d'une matrice.

*Remarque.* On déduit facilement le graphe fondamental d'une base  $B$  d'un matroïde de l'ensemble  $\mathcal{B}$  des bases de ce matroïde puisque

$$e \in C^*(f, B) \Leftrightarrow B - f \cup e \in \mathcal{B} \Leftrightarrow f \in C(e, B)$$

et d'ailleurs dans ce cas  $C^*(f, B) = C^*(e, B \setminus f \cup e)$  et  $C(e, B) = C(f, B \setminus f \cup e)$ .

En d'autres termes, dans le graphe ayant  $\mathcal{B}$  pour ensemble de sommets et où deux bases sont reliées par une arête lorsqu'on passe de l'une à l'autre par l'échange de deux éléments, le graphe fondamental d'une base est une information 'locale' : il indique quelles sont les bases voisines de cette base dans ce graphe.

*Interprétation géométrique.* Les cocircuits fondamentaux d'une base correspondent géométriquement aux sommets (faces de dimension 0) intersections d'éléments de la base. Le cocircuit fondamental de  $b \in B$  est l'ensemble des éléments ne passant pas par l'intersection des  $B - b$ . Le circuit fondamental de  $e \notin B$  est  $e$  union l'ensemble des  $b \in B$  pour lesquels  $e$  ne passe pas par l'intersection des  $B - b$ .

*Exemple.* Dans un graphe, le cocircuit fondamental de  $b \in B$  par rapport à l'arbre couvrant  $B$  est aussi l'ensemble des arêtes joignant les deux composantes connexes de  $B - b$ . Par exemple la base 256 de  $K_4$  (Figure 0.1) a pour cocircuits fondamentaux  $C^*(256; 2) = 124$ ,  $C^*(256; 5) = 135$ ,  $C^*(256; 6) = 1346$  et pour circuits fondamentaux  $C(256; 1) = 1256$ ,  $C(256; 3) = 356$ ,  $C(256; 4) = 246$ .

**Propriété 0.1.**

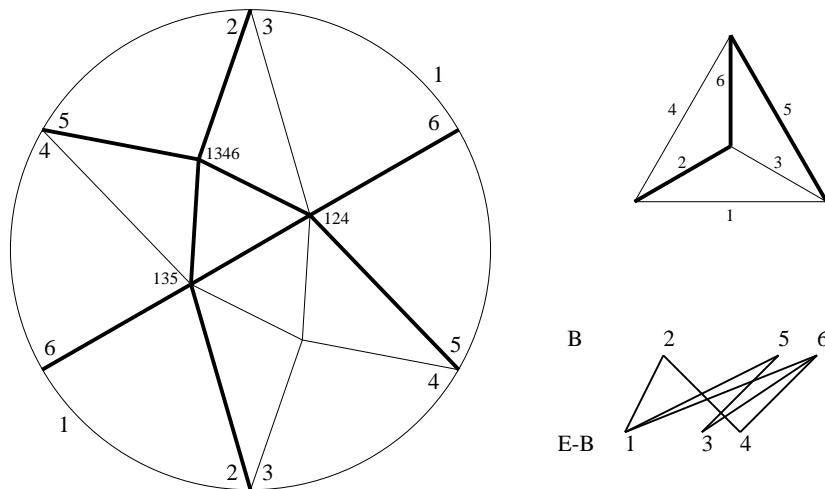
*Soit  $B$  une base de  $M$ . Pour tout  $e \notin B$  et  $b \in B$ ,*

$$C_M^*(B; b) \setminus e = C_{M \setminus e}^*(B; b)$$

$$C_M(B; e) \setminus b = C_{M/b}(B; e)$$

*Preuve.*

Si  $b \in B$ , les cocircuits fondamentaux des autres éléments de  $B$  sont inchangés lorsqu'on passe à  $M/b$ , donc les circuits fondamentaux sont les mêmes moins éventuellement l'élément  $b$ ; et si  $e \notin B$ ,  $B$  est encore une base de  $M \setminus e$  et les cocircuits fondamentaux sont obtenus en supprimant  $e$  de ceux auxquels il appartenait (les circuits fondamentaux des éléments autres que  $e$  sont inchangés).  $\square$



**Figure 0.1 : base 256 de  $K_4$**



• Activités des bases.

On appellera *matroïde ordonné* un matroïde sur un ensemble totalement ordonné. Soit  $M$  un matroïde ordonné sur  $E$ . Soit une base  $B$  de  $M$ .

Si  $b \in B$  est le plus petit élément de son cocircuit fondamental par rapport à  $B$  :

$$b = \min C^*(B; b)$$

il sera dit *intérieurement actif* par rapport à  $B$ . L'ensemble des éléments intérieurement actifs de  $B$  sera noté  $Int_M(B)$  (ou simplement  $Int(B)$ ). Le cardinal de  $Int(B)$  est appelé l'*activité interne* de  $B$ , notée  $\iota_M(B)$  (ou simplement  $\iota(B)$ ).

Si  $e \notin B$  est le plus petit élément de son circuit fondamental par rapport à  $B$  :

$$e = \min C(B; e)$$

il sera dit *extérieurement actif* par rapport à  $B$ . L'ensemble des éléments extérieurement actifs de  $B$  sera noté  $Ext_M(B)$  (ou simplement  $Ext(B)$ ). Le cardinal de  $Ext(B)$  est appelé l'*activité externe* de  $B$ , notée  $\varepsilon_M(B)$  (ou simplement  $\varepsilon(B)$ ).

Il faut remarquer que l'activité interne et l'activité externe sont des notions duales :

$$Int_M(B) = Ext_{M^*}(E \setminus B)$$

Puisque  $Int(B) \subseteq B$  et  $Ext(B) \subseteq E \setminus B$ , on a bien sûr  $Int(B) \cap Ext(B) = \emptyset$ .

Une base d'activité externe (resp. interne) nulle sera appelée *base interne* (resp. *base externe*). On appellera *base d'activités*  $(i, j)$  une base d'activité interne  $i$  et externe  $j$ .

**Propriétés 0.2.** (évidentes)

*Un isthme (resp. une boucle) est intérieurement actif (resp. extérieurement actif) dans toutes les bases.*

*Avec  $f_1$  le plus petit élément non boucle de  $E$ , pour une base  $B$  quelconque, si  $f_1 \in B$  alors  $f_1 \in Int(B)$  et si  $f_1 \notin B$  alors  $f_1 \in Ext(B)$ .  $\square$*

*Exemple.* Pour la base 256 de  $K_4$  (Figure 0.1), aucun élément de la base n'est le plus petit de son cocircuit fondamental, et les éléments 1 et 3 sont les seuls du complémentaire à être les plus petits de leur circuit fondamental. Ainsi  $Int(256) = \emptyset$ ,  $\iota(256) = 0$ ,  $Ext(256) = 13$  et  $\varepsilon(256) = 2$ .

Les bases de  $K_4$  et leurs activités (pour l'ordre choisi Figure  $K_4$  fin de l'introduction) sont données par le tableau de la Figure 0.2.

Base	Int	Ext	Base	Int	Ext
124	124	$\emptyset$	234	4	1
125	12	$\emptyset$	235	$\emptyset$	1
126	12	$\emptyset$	236	$\emptyset$	1
134	14	$\emptyset$	245	2	1
135	1	$\emptyset$	256	$\emptyset$	13
136	1	$\emptyset$	345	$\emptyset$	12
146	1	2	346	$\emptyset$	12
156	1	3	456	$\emptyset$	123

**Figure 0.2 :** tableau des activités des bases de  $K_4$

Intuitivement, les activités des bases mesurent une sorte de ‘distance’ aux bases minimales et maximales pour l’ordre lexicographique (précisément on peut définir un ordre sur les bases à partir de leurs activités, plus faible que l’ordre lexicographique, ayant les mêmes extrêmes et qui s’avère être un treillis voir [LV 00]).

- Polynôme de Tutte.

Le *polynôme de Tutte* de  $M$  est équivalent à la série génératrice du cardinal et du rang des parties du matroïde, il est défini par

$$t(M; x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x - 1)^{r(E) - r(A)} (y - 1)^{|A| - r(A)}$$

Ainsi  $t(M; 1, 1)$  est le nombre de bases de  $M$ ,  $t(M; 1, 2)$  est le nombre de parties génératrices de  $M$ ,  $t(M; 2, 1)$  est le nombre d’indépendants de  $M$  et  $t(M; 2, 2) = 2^{|E|}$ .

Etant donné un ordre total quelconque sur  $E$ , le théorème fondamental est le suivant.

**Théorème 0.3.** (dénombrement des activités des bases [Tu 54])

*Soit  $M$  un matroïde ordonné.*

$$t(M; x, y) = \sum_{B \in \mathcal{B}} x^{\iota(B)} y^{\varepsilon(B)}$$

Les activités des bases constituent donc un modèle d’état du polynôme de Tutte, et par la suite on notera

$$t(M; x, y) = \sum_{i,j} b_{i,j} x^i y^j$$

de sorte que  $b_{i,j}$  est le nombre de bases de  $M$  d’activité interne  $i$  et externe  $j$ .

Il faut noter de suite une propriété essentielle :

$$t(M; x, y) = t(M^*; y, x)$$

Le polynôme de Tutte peut-être défini aussi de manière inductive, que l'on appelle la définition par suppression/contraction :

$t(\emptyset; x, y) = 1$  et pour tout  $e \in E$

si  $e$  n'est ni un isthme ni une boucle de  $M$  alors

$$t(M; x, y) = t(M \setminus e; x, y) + t(M/e; x, y)$$

si  $e$  est un isthme de  $M$  alors  $t(M; x, y) = xt(M/e; x, y) = xt(M \setminus e; x, y)$

si  $e$  est une boucle de  $M$  alors  $t(M; x, y) = yt(M/e; x, y) = yt(M \setminus e; x, y)$

Pour un récapitulatif des travaux effectués avant 1992 sur ce polynôme dans le contexte des matroïdes (dont toutes les propriétés énoncées ici) voir [BrOx 92].

Pour l'anecdote, et pour reprendre un exemple donné par Tutte lui-même [Tu 01] le polynôme de Tutte du graphe complet  $K_3$  est  $t(K_3; x, y) = x^2 + x + y$ . Lorsqu'il avait défini ce polynôme, d'abord sans notion d'activité des bases, il s'était aperçu du fait que  $t(G; 1, 1)$  était le nombre d'arbres couvrants du graphe  $G$ , et c'est la symétrie de  $K_3$  confrontée à l'asymétrie de  $t(K_3; x, y)$  qui lui a suggéré l'idée d'introduire un ordre total sur l'ensemble des arêtes du graphe afin de distinguer les arbres couvrants. C'est ainsi qu'il découvrit les activités.

**Proposition 0.4.**

*Le plus petit  $i$  tel qu'il existe une base d'activité externe  $i$  (resp. d'activité interne  $i$ ) est le nombre de boucles (resp. d'isthmes) de  $M$ .*

*Le plus petit  $i$  tel qu'il existe une base d'activité externe nulle et interne  $i$  (resp. interne nulle et externe  $i$ ) est le nombre de composantes connexes de  $M$ .*

*En particulier  $b_{0,1} = b_{1,0}$  et cette valeur est non nulle si et seulement si  $M$  est connexe.*

□

Cette dernière valeur est appelée l'*invariant beta* du matroïde [Cr 67] :

$$\beta(M) = b_{0,1} = b_{1,0}$$

On note en passant l'équivalence entre 'il existe une base interne de  $M$ ', ' $M$  n'a pas de boucle', et ' $cl_M(\emptyset) = \emptyset$ '; et dualement entre 'il existe une base externe de  $M$ ', ' $M$  n'a pas d'isthme', et ' $cl_{M^*}(\emptyset) = \emptyset$ '.

*Exemple.* Le polynôme de Tutte de  $K_4$  est

$$t(K_4; x, y) = x^3 + 3x^2 + 2x + 4xy + 2y + 3y^2 + y^3$$

et

$$\beta(K_4) = 2$$

Puisque  $K_4$  est isomorphe à son dual, son polynôme de Tutte est symétrique en  $x$  et en  $y$ .

• Base minimale.

Une propriété fondamentale des matroïdes est que pour tout ordre total sur  $E$ , la base de poids minimal peut-être construite à partir de l'ensemble vide en ajoutant successivement l'élément de poids minimal pour lequel la partie construite reste un indépendant. Réciproquement, un ensemble de parties satisfaisant cette propriété pour tout ordre total doit satisfaire les axiomes des indépendants d'un matroïde. En d'autre termes, la structure de matroïde est celle sur laquelle on peut définir un *algorithme glouton* donnant une unique partie optimale (voir [Ox 92]). Une propriété similaire d'existence d'une base minimale pour tout ordre donné est à l'origine de la définition plus générale des matroïdes de Coxeter (voir [Vin 00]). La base de poids minimal est la base minimale pour l'ordre lexicographique, cette base étant formée des seuls éléments susceptibles d'être intérieurement actifs elle sera de prime importance ici.

Soit  $B^{min}$ , appelée *base minimale* de  $M$ , la plus petite base de  $M$  pour l'ordre lexicographique :

$$B^{min} = f_1 < \dots < f_r = \min(\mathcal{B}, <_{lex})$$

**Proposition 0.5.** (algorithme glouton et activités de la base minimale)

*Les éléments de  $B^{min}$  sont définis par la récurrence suivante :*

$$F_0^{min} = cl_M(\emptyset)$$

et pour  $1 \leq i \leq r$

$$f_i = \min(E \setminus F_{i-1}^{min})$$

et

$$F_i^{min} = cl_M(F_{i-1}^{min} \cup \{f_i\})$$

*Les éléments de  $B^{min}$  sont les seuls susceptibles d'être intérieurement actifs dans une base de  $M$ . Précisément, si  $D$  est un cocircuit de  $M$ ,  $\min(D) = f_{i+1}$  où  $i$  est le grand possible tel que  $F_i^{min} \subseteq E \setminus D$ .*

Enfin

$$Int(B^{min}) = B^{min}$$

et

$$Ext(B^{min}) = cl(\emptyset)$$

□

*Preuve.*

Si une base  $B' = f'_1 < \dots < f'_r$  était plus petite que la base  $f_1 < \dots < f_r$  construite par la récurrence précédente pour l'ordre lexicographique,  $k$  étant le plus petit possible tel que  $f'_k \neq f_k$  on aurait  $f'_k < f_k$  donc  $f'_k \in W_{k-1}$  et donc  $f'_1 \dots f'_k$  serait un indépendant de cardinal  $k$  inclus dans un fermé de rang  $k-1$  ce qui est impossible. Donc  $f_1 < \dots < f_r$  est bien la base minimale pour l'ordre lexicographique. Si  $D$  est un cocircuit, c'est le complémentaire de l'hyperplan  $E \setminus D$  (fermé de rang  $r-1$ ) du matroïde. Soit  $i$  le grand possible tel que  $F_i^{\min} \subseteq E \setminus D$ , on a alors  $f_{i+1} \notin E \setminus D$  sinon  $F_{i+1}^{\min} = cl(F_i^{\min} \cup f_{i+1}) \subseteq cl(E \setminus D) = E \setminus D$ , donc  $f_{i+1} \in D$ . Or  $f_{i+1} = \min(E \setminus F_i^{\min}) \leq \min(D)$  donc  $\min(D) = f_{i+1}$ . Enfin pour tout  $1 \leq k \leq r$ ,  $C^*(B^{\min}; f_k) = E \setminus cl(B^{\min} \setminus f_k) \supseteq F_{k-1}^{\min}$  donc  $\min(C^*(B^{\min}; f_k)) = f_k$ , c'est-à-dire  $f_k \in \text{Int}(B^{\min})$ . Et pour  $e \notin B^{\min}$ , si  $f_k \in C(B^{\min}; e)$  alors  $e \in C^*(B^{\min}; f_k)$  et  $e > f_k$ , donc  $e$  est extérieurement actif si et seulement si  $C(B^{\min}; e) = e$ , c'est-à-dire si et seulement si  $e$  est une boucle.  $\square$

Pour  $E = e_1 < e_2 < \dots < e_n$  on a alors : si  $M$  est sans boucle, alors  $f_1 = e_1$  ; et si  $M$  est simple alors  $f_1 = e_1$  et  $f_2 = e_2$ .

Il est facile de voir que la base minimale de  $M^*$  pour l'ordre lexicographique est le complémentaire dans  $E$  de la base maximale pour l'ordre lexicographique. Soit  $B^{\max}$ , appelée *base maximale* de  $M$  la plus grande base de  $M$  pour l'ordre lexicographique

$$B^{\max} = \max(\mathcal{B}, <_{lex})$$

Elle vérifie donc  $\text{Int}(B^{\max}) = cl_{M^*}(\emptyset)$  et  $\text{Ext}(B^{\max}) = E \setminus B^{\max}$  et son complémentaire est donc constitué des seuls éléments susceptibles d'être extérieurement actifs dans une base de  $M$ . Comme on se ramènera en général par la suite à étudier uniquement les activités internes, elle sera beaucoup moins utilisée.

La base  $B^{\min}$  est l'unique base d'activité interne  $r$ , et  $B^{\max}$  est l'unique base d'activité externe  $n-r$ , elles correspondent aux coefficients du polynôme de Tutte  $b_{r,l} = 1$  et  $b_{i,n-r} = 1$ , où  $l$  est le nombre de boucles de  $M$  et  $i$  le nombre d'isthmes de  $M$ .

*Exemple.* Pour  $K_4$ , la base minimale est 124, la suite de fermés qui la définit est  $\emptyset \subset 1 \subset 123 \subset 123456$ . La base maximale est 456, la suite de fermés du dual qui la définit est  $\emptyset \subset 1 \subset 124 \subset 123456$

### Propriété 0.6.

Une base  $B$  est d'activités  $(1,0)$  si et seulement si  $B \setminus f_1 \cup f_2$  est une base d'activités  $(0,1)$ , où  $f_1$  est le plus petit élément non boucle et  $f_2$  le plus petit élément indépendant de  $f_1$ .

*Preuve.* Si  $f_1 \notin B$  alors  $f_1$  est le plus petit élément de  $C(B; f_1)$  et est extérieurement actif, ce qui est exclu. Donc  $f_1 \in B$  est intérieurement actif. Et si  $f_2 \in B$  alors  $f_2 = \min(E \setminus cl(f_1))$  donc  $f_2 = \min(C^*(B; f_2))$  et  $f_2$  est intérieurement actif ce qui est exclu.

D'autre part  $B' = B - f_1 \cup f_2$  est une base,  $C^*(B; f_1) = C^*(B'; f_2)$ ,  $C(B; f_2) = C(B'; f_1)$  donc  $f_1$  est extérieurement actif dans  $B'$ . Les cocircuits fondamentaux des éléments de  $B'$  s'obtiennent par élimination modulaire de  $f_2$  entre les cocircuits fondamentaux de  $B$  contenant  $f_2$  et  $C^*(B; f_1)$ . Leurs plus petits éléments sont donc soit inchangés soit remplacés par  $f_1$ , ils ne font donc jamais partie de  $B'$ , d'où  $\iota(B') = 0$ . De même les plus petits éléments des circuits fondamentaux des éléments de  $B' - f_2$  sont inchangés et appartiennent à  $B'$ , donc seul  $f_1$  est extérieurement actif dans  $B' : \varepsilon(B') = 1$ .  $\square$

L'application des bases d'activités  $(1, 0)$  dans celles d'activités  $(0, 1)$  qui à  $B$  associe  $B - f_1 \cup f_2$  est donc une bijection. On retrouve de cette façon  $b_{0,1} = b_{1,0}$ .

*Exemple.* Les deux bases d'activités  $(1, 0)$  de  $K_4$  sont 135 et 136, et les deux bases d'activités  $(0, 1)$  de  $K_4$  sont 235 et 236.

*Remarque.* Les activités des bases jouent un rôle remarquable dans l'étude de l'homologie des matroïdes, de la 'shellabilité' des polyèdres. Les bases d'activités  $(1, 0)$  jouent un rôle essentiel dans l'algèbre d'Orlik-Solomon (elles constituent une base de cette algèbre, ce qui signifie intuitivement et géométriquement que l'on peut mesurer tous les 'volumes' dans l'arrangement en connaissant ceux de ces bases) : voir [Bj 87].

Si  $M$  est un matroïde orienté, toutes les notations précédentes sont conservées et se réfèrent au matroïde sous-jacent.

- Activités des réorientations.

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné sur  $E$  de plus grand élément  $\omega$ .

*Notations :*

$\mathcal{O}(M)$  est l'ensemble des circuits positifs de  $M$ ,

$\mathcal{O}_\omega(M)$  est l'ensemble des circuits positifs de  $M$  contenant  $\omega$ ,

$A\mathcal{O}(M)$  est l'ensemble des plus petits éléments de circuits positifs de  $M$ ,

$A\mathcal{O}_\omega(M)$  celui des plus petits éléments de circuits positifs de  $M$  contenant  $\omega$ .

L'*activité* (primale) du matroïde orienté  $M$ , notée  $o(M)$ , est le cardinal de  $A\mathcal{O}(M)$ . Si  $o(M) = 0$ , le matroïde orienté n'a pas de circuit positif, il est dit *acyclique*.

$\mathcal{O}^*(M) = \mathcal{O}(M^*)$  est l'ensemble des cocircuits positifs de  $M$

$\mathcal{O}_\omega^*(M) = \mathcal{O}_\omega(M^*)$  est l'ensemble des cocircuits positifs de  $M$  contenant  $\omega$

$A\mathcal{O}^*(M) = A\mathcal{O}(M^*)$  est l'ensemble des plus petits éléments de cocircuits positifs de  $M$

$A\mathcal{O}_\omega^*(M) = A\mathcal{O}_\omega(M^*)$  est l'ensemble des plus petits éléments de cocircuits positifs de  $M$  contenant  $\omega$ .

L'*activité duale* notée  $o^*(M)$  du matroïde orienté  $M$  est le cardinal de  $A\mathcal{O}^*(M)$  :

$$o^*(M) = o(M^*)$$

Si  $o^*(M) = 0$ , le matroïde orienté n'a pas de cocircuit positif, il est dit *totale-ment cyclique*, car dans ce cas, d'après le lemme suivant, tout élément appartient à un circuit positif. Pour un graphe connexe, totalement cyclique est synonyme de *fortement connexe*.

**Propriété 0.7.** (lemme de blocage, dit de Farkás, pour les matroïdes orientés)

*Dans un matroïde orienté, tout élément appartient soit à un circuit positif soit à un cocircuit positif mais pas les deux.*

Ce résultat essentiel est une généralisation aux matroïdes orientés du lemme de Farkás sur les inéquations linéaires (cf. [OM] 3.4.6). Il montre qu'être acyclique et être totalement cyclique pour un matroïde orienté sont des propriétés duales.

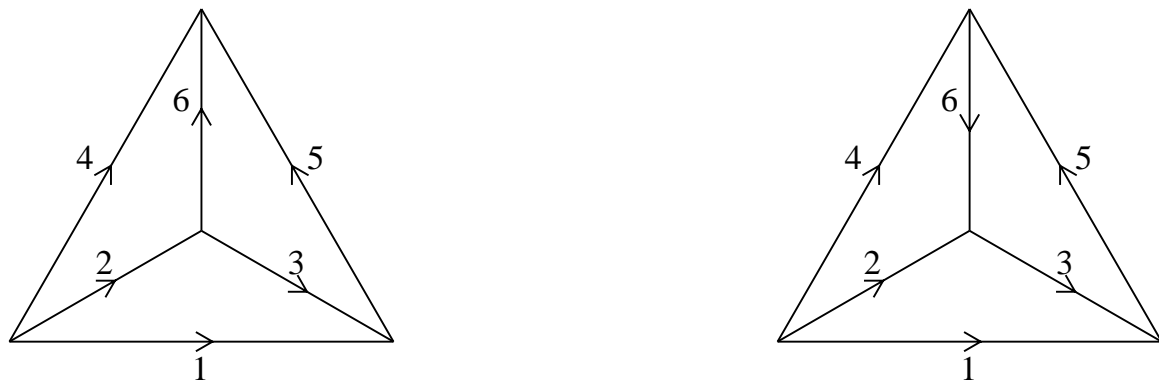
Pour  $A \subseteq E$  on appellera *réorientation* selon  $A$ , notée  $-_A$ , l'opération qui au matroïde orienté  $M$  associe le matroïde orienté  $-_A M$ . Les réorientations de  $M$  sont donc en bijection canonique avec  $2^E$ , ensemble des parties de  $E$ , et elles sont au nombre de  $2^{|E|}$ . La réorientation selon  $A$  et la réorientation selon  $E \setminus A$  sont alors appelées *réorientations opposées*. Cependant pour tout  $A \subseteq E$  on a  $-_A M = -_{E \setminus A} M$  en tant que matroïdes orientés, et on commettra alors fréquemment l'abus de langage consistant à dire la 'réorientation  $A$  de  $M$ ', ou même la 'réorientation  $-_A M$ ', ce qui dans le contexte ne posera pas de problèmes. Le fait de distinguer deux réorientations opposées alors que les matroïdes orientés obtenus sont identiques est justifié pour deux raisons essentielles : d'une part si le matroïde est défini par un graphe orienté ayant pour ensemble d'arêtes  $E$ , l'ensemble des  $2^{|E|}$  réorientations est en bijection canonique avec l'ensemble des  $2^{|E|}$  orientations du graphe, deux orientations opposées du graphe définissant le même matroïde orienté ; d'autre part, dans une représentation topologique du matroïde orienté par un arrangement de pseudosphères, les réorientations sont en bijection canonique avec les signatures de l'arrangement, c'est-à-dire pour chaque pseudosphère le choix d'une demi-sphère positive, deux signatures opposées définissant pourtant le même matroïde orienté. On peut éviter cela en se plaçant dans l'espace projectif (cf. [OM]) pour lequel les signatures opposées (ou les régions opposées) sont identifiées, mais on préfère ici ne pas passer à l'espace projectif, afin de conserver un nombre de réorientations égal au nombre de parties de  $E$ .

*Exemple.* Le matroïde orienté défini par le graphe  $K_4$  orienté comme sur la gauche de la Figure 0.3 est acyclique, et ses cocircuits positifs sont 124, 1346 et 456. Il n'a donc pas d'élément actif, et ses éléments dual-actifs sont 1 et 4 :  $o(K_4) = 0$  et  $o^*(K_4) = 2$ .

Dans la réorientation  $-_6 K_4$  de ce matroïde orienté selon 6 (Figure 0.3 droite), il y a un circuit positif 356 et un cocircuit positif 124 :  $o(-_6 K_4) = 1$  et  $o^*(-_6 K_4) = 1$ .

L'interprétation géométrique des activités des réorientations acycliques de  $K_4$  est donné un peu plus loin.

Comme mentionné dans l'introduction, le point de départ de cette thèse est le théorème suivant montré en 1984 par Las Vergnas [LV 84].

Figure 0.3 : deux orientations de  $K_4$ 

**Théorème 0.8.** (dénombrement des activités des réorientations [LV 84])

$$t(M; x, y) = \sum_{A \subseteq E} \left(\frac{x}{2}\right)^{o^*(-_A M)} \left(\frac{y}{2}\right)^{o(-_A M)}$$

La preuve de ce résultat dans [LV 84] est faite en utilisant la définition inductive du polynôme de Tutte. En outre ce résultat y est généralisé aux ‘morphisms’ de matroïdes orientés (ou ‘perspectives’ ou ‘strong maps’) via un polynôme de Tutte généralisé à trois variables. Dans le chapitre suivant, on donnera une preuve bijective de ce théorème, en utilisant une construction inductive mais d’un point de vue ensembliste et non plus seulement numérique.

Le théorème précédent s’écrit aussi

$$t(M; x, y) = \sum_{i,j} o_{i,j} \left(\frac{x}{2}\right)^i \left(\frac{y}{2}\right)^j$$

où  $o_{i,j}$  est le nombre de réorientations d’activité duale  $i$  et d’activité  $j$ , de sorte que

$$o_{i,j} = 2^{i+j} b_{i,j}$$

égalité que l’on veut retrouver par une correspondance naturelle explicite entre bases et réorientations.

On déduit notamment une généralisation aux matroïdes orientés du résultat de Stanley de 1973 [St 73] :

$t(M; 2, 0)$  est le nombre de réorientations acycliques de  $M$ .

De façon duale  $t(M; 0, 2)$  est le nombre de réorientations totalement cycliques de  $M$ .

On appellera *réorientation d’activités*  $(i, j)$  une réorientation d’activité duale  $i$  et d’activité (primale)  $j$ . De manière générale, une *correspondance active* d’un matroïde orienté ordonné sera une application de l’ensemble des réorientations dans l’ensemble



des bases telle que une base d'activités  $(i, j)$  soit l'image de  $2^{i+j}$  réorientations d'activités  $(i, j)$  (on pourra dire 'active' à la place de 'préservant les activités' pour qualifier une application).

**Propriété 0.9.**

*Un matroïde orienté ordonné  $M$  est d'activités  $(1, 0)$  si et seulement si  $-_{f_1} M$  est d'activités  $(0, 1)$ , où  $f_1$  est le plus petit élément non boucle.*

*Preuve.* Il suffit de montrer une des implications, l'autre se déduisant par dualité ( $M$  acyclique d'activité duale 1 si et seulement si  $M^*$  totalement cyclique d'activité 1).

Soit  $M$  d'activités  $(1, 0)$  :  $M$  possède un covecteur maximal positif ( $M$  acyclique) et tout cocircuit positif de  $M$  a pour plus petit élément 1 (activité duale 1). Si il existe un cocircuit positif de  $-_{f_1} M$ , alors il contient  $f_1$  sinon ce serait aussi un cocircuit positif de  $M$  ne contenant pas  $f_1$ , c'est donc un cocircuit  $D$  de  $M$  ayant pour seul élément négatif  $f_1$ . D'autre part  $M$  possède un cocircuit positif  $D'$  de plus petit élément  $f_1$ . L'élimination de  $f_1$  entre  $D$  et  $D'$  donne un cocircuit positif de  $M$  ne contenant pas  $f_1$  ce qui est contradictoire. Donc  $-_{f_1} M$  est totalement cyclique.

Par hypothèse  $-_{f_1} M$  possède un covecteur maximal ayant pour seul élément négatif  $f_1$ . Soit  $C$  un circuit positif  $C$  de  $-_{f_1} M$ , alors il contient  $f_1$  par orthogonalité avec le covecteur maximal précédent, donc  $-_{f_1} M$  est d'activité 1.  $\square$

L'application des matroïdes orientés ordonnés d'activités  $(1, 0)$  dans ceux d'activités  $(0, 1)$  qui à  $M$  associe  $-_{f_1} M$  est donc une bijection. On retrouve de cette façon  $o_{0,1} = o_{1,0}$ .

*Remarque.* Dans un graphe les orientations d'activités  $(1, 0)$  sont les orientations acycliques ayant pour unique puits et pour unique source les extrémités de la plus petite arête non boucle  $f_1$  (cf. chapitre 6 partie 2).

*Interprétation géométrique.* Les réorientations d'activité (primale) 0 sont les réorientations acycliques, qui sont en bijection canonique avec les régions de la représentation topologique du matroïde orienté par un arrangement de pseudosphères. Parmi celles-ci les réorientations d'activités  $(1, 0)$  seront très importantes pour la suite, ce sont les réorientations acycliques d'activité duale 1. Ce sont, géométriquement, les régions qui ne touchent pas la plus petite pseudosphère, celle qui correspond au plus petit élément non boucle  $f_1$ .

Plus généralement les activités duales d'une réorientation acyclique s'interprètent facilement géométriquement (précisions ci-dessous). Les activités (primales) d'orientations totalement cycliques ont donc la même interprétation dans le dual. Les autres cas apparaîtront dans le chapitre 2 comme un combiné des deux précédents dans un mineur du matroïde et un mineur de son dual.

Via le théorème de représentation topologique (Folkman et Lawrence 1978, [OM] théorème 5.2.1), un matroïde orienté  $M$  de rang  $r$  peut être représenté comme un arrangement de pseudosphères (de dimension  $r - 2$ ) dans une sphère  $S^{r-1}$  (de dimension  $r - 1$  de l'espace de dimension  $r$ ).

Les réorientations acycliques sont en bijection canonique avec les régions de cet arrangement, faces de dimension  $r - 1$  du complexe simplicial associé, et on se permettra par abus de langage de les identifier. Deux réorientations acycliques opposées correspondent à (ou ‘sont’) deux régions opposées.

Les faces sont alors les covecteurs du matroïde orienté, en particulier les cocircuits sont les faces de dimension 0 (sommets), et les covecteurs maximaux sont les régions.

Les fermés du matroïde et les supports des covecteurs du matroïde orienté sont complémentaires dans  $E$ .

La suite de fermés de  $M$  qui définit la base minimale (proposition 0.5),  $F_0^{min} \subset \dots \subset F_r^{min}$ , se traduit dans l’arrangement par la suite d’intersections des pseudosphères correspondantes (c’est une suite de fermés emboîtés au sens topologique). C’est une suite de faces du complexe simplicial *non signé* associé (qui représente lui le matroïde sous-jacent), c’est à dire une suite d’ensembles de faces du complexe simplicial des covecteurs  $\tilde{F}_r^{min} \subset \dots \subset \tilde{F}_0^{min}$ , où  $\tilde{F}_i^{min}$  est l’ensemble des covecteurs dont le support est d’intersection vide avec  $F_i^{min}$ .

On dira qu’un fermé du matroïde sous-jacent *touche* ou est *adjacent* à une région  $M$  s’il est le complémentaire du support d’un covecteur positif de  $M$ , c’est-à-dire topologiquement si l’intersection de ce fermé géométrique et de la fermeture topologique de la région est une face de même dimension que le fermé. Par extension, on dira aussi qu’un covecteur positif de  $M$ , et la face correspondante, *touchent* la région  $M$ .

Ainsi, si une face touche une région, c’est un covecteur positif pour cette réorientation, en particulier, les sommets d’une région sont les cocircuits positifs de cette réorientation.

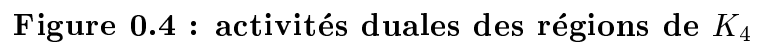
Les faces de dimension 0 contenues dans  $\tilde{F}_{i-1}^{min} \setminus \tilde{F}_i^{min}$  ont pour plus petit élément  $f_{i-1}$ . Ainsi on peut lire directement l’activité d’une région sur cette représentation : un élément  $f_i$  est actif dans la réorientation si et seulement si la région correspondante touche  $F_{i+1}^{min} \setminus F_i^{min}$ .

On déduit alors du théorème 0.8 le résultat suivant [GrZa 83] [LV 77] :

*le nombre de régions d’un côté donné d’un hyperplan donné qui ne touchent pas cet hyperplan, dans un arrangement d’hyperplans définissant un matroïde orienté  $M$  est  $\beta(M)$  (il ne dépend pas de l’hyperplan choisi).*

Dans un graphe, ce nombre est le nombre d’orientations acycliques ayant un unique puits donné adjacent à une unique source donnée (voir chapitre 6).

*Exemple.* La Figure 0.4 montre géométriquement les activités duales des réorientations acycliques de  $K_4$  (comme d’habitude un seul hémisphère est représenté). Les cocircuits correspondent aux sommets, et on a écrit sur la figure pour chacun d’eux leur plus petit élément suivi de ‘...’. Dans les régions sont écrites les activités duales des réorientations acycliques correspondantes. Dans cet exemple la suite de fermés qui définit la base minimale 123 est  $1 \subset 123 \subset 123456$ . La suite de faces d’où l’on déduit les activités duales est  $1 \supset 1 \cap 2 \supset \emptyset$  : les régions qui ne touchent pas 1 sont d’activité duale 1, celles qui touchent 1 mais pas  $1 \cap 2$  sont d’activité duale 12,



celles qui touchent  $1 \cap 2$  mais pas 1 sont d'activité duale 14 et celles qui touchent 1 et  $1 \cap 2$  sont d'activité duale 124.



# Chapitre 1

## Une classe inductive de correspondances actives

Le but de ce chapitre est de faire apparaître un ‘critère de compatibilité’ (théorème 1.6) que doit satisfaire une correspondance active cherchée pour avoir, en plus de la propriété de préservation des activités (une base d’activités  $(i, j)$  doit être associée à  $2^{i+j}$  réorientations de mêmes activités), une propriété inductive naturelle : on souhaite que la correspondance dans  $M$  induise une correspondance dans des mineurs de  $M$ , d’une façon similaire à la définition inductive du polynôme de Tutte. On obtiendra ainsi une preuve simple et constructive du théorème 0.8 :

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} x^{\iota(B)} y^{\varepsilon(B)} = \sum_{A \subseteq E} \left(\frac{x}{2}\right)^{o^*(-_A M)} \left(\frac{y}{2}\right)^{o(-_A M)}$$

La preuve de ce théorème dans [LV 84] utilisait déjà la même induction, mais de façon numérique. Elle est faite ici de façon ensembliste, ce qui permet d’obtenir, en plus d’une preuve bijective, un résultat plus fort puisque non seulement les activités seront conservées, mais aussi les éléments actifs.

Compte tenu des activités, le plus grand élément de l’ensemble sur lequel est défini le matroïde va jouer un rôle déterminant. La condition d’induction imposée à une correspondance candidate se traduit géométriquement par une propriété d’adjacence relativement au plus grand élément pour les régions dont la base associée contient ce plus grand élément. Néanmoins cela ne suffira pas à déterminer une seule correspondance et on obtiendra une classe générale de correspondances satisfaisant les conditions imposées. La correspondance active canonique définie par *Oribas* fait partie de cette classe de correspondances et satisfait des conditions supplémentaires qui sont l’objet des chapitres suivants.

Ce chapitre, dont les résultats inspireront les constructions inductives du chapitre 4 mais ne seront pas utilisés, constitue en quelque sorte une introduction au vif du sujet indépendante de la suite.

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné sur  $E$  de plus grand élément  $\omega$ . Les circuits de  $M \setminus \omega$  étant les circuits de  $M$  ne contenant pas  $\omega$ , on a déjà par définitions

$$\mathcal{O}(M) = \mathcal{O}(M \setminus \omega) \cup \mathcal{O}_\omega(M)$$

et

$$\mathcal{O}(-_\omega M) = \mathcal{O}(M \setminus \omega) \cup \mathcal{O}_\omega(-_\omega M)$$

et dualement les cocircuits de  $M/\omega$  étant les cocircuits de  $M$  ne contenant pas  $\omega$ , on a

$$\mathcal{O}^*(M) = \mathcal{O}^*(M/\omega) \cup \mathcal{O}_\omega^*(M)$$

et

$$\mathcal{O}^*(-_{\omega}M) = \mathcal{O}^*(M/\omega) \cup \mathcal{O}_{\omega}^*(-_{\omega}M)$$

**Proposition 1.1.**

*Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné sur  $E$  de plus grand élément  $\omega$ .*

*On a*

*(i)  $A\mathcal{O}(M \setminus \omega) \subseteq A\mathcal{O}(M/\omega)$  et, dualement,  $A\mathcal{O}^*(M/\omega) \subseteq A\mathcal{O}^*(M \setminus \omega)$*

*(ii) pour  $\widetilde{M} = M$  ou  $\widetilde{M} = -_{\omega}M$  on a*

$$A\mathcal{O}(\widetilde{M}) = A\mathcal{O}(M \setminus \omega)$$

$$A\mathcal{O}^*(\widetilde{M}) = A\mathcal{O}^*(M \setminus \omega)$$

$$A\mathcal{O}(-_{\omega}\widetilde{M}) = A\mathcal{O}(M/\omega)$$

$$A\mathcal{O}^*(-_{\omega}\widetilde{M}) = A\mathcal{O}^*(M/\omega)$$

*De plus, si au moins une des inclusions de (i) est stricte, alors l'autre inclusion de (i) est une égalité et une seule des deux éventualités de (ii) a lieu.*

La preuve de cette proposition repose sur les deux lemmes suivants.

**Lemme 1.2.**

*On suppose que  $\omega$  n'est pas une boucle.*

*Alors  $A\mathcal{O}_{\omega}(M) \subseteq A\mathcal{O}(M \setminus \omega)$  ou  $A\mathcal{O}_{\omega}(-_{\omega}M) \subseteq A\mathcal{O}(M \setminus \omega)$*

*Preuve.*

Puisque  $\omega$  n'est pas une boucle,  $\omega$  étant le plus grand élément de  $E$  n'est pas actif dans  $M$ . Supposons que  $A\mathcal{O}_{\omega}(M) \not\subseteq A\mathcal{O}(M \setminus \omega)$  et  $A\mathcal{O}_{\omega}(-_{\omega}M) \not\subseteq A\mathcal{O}(M \setminus \omega)$ , alors il existe un cocircuit positif de  $M$  de plus petit élément  $d \notin A\mathcal{O}(M \setminus \omega)$  et un cocircuit de  $M$  ayant pour seul élément négatif  $d' \notin A\mathcal{O}(M \setminus \omega)$ . Quitte à permuter les rôles de  $M$  et  $-_{\omega}M$  on peut supposer  $d \leq d'$ . L'élimination forte de  $\omega$  entre ces deux cocircuits conservant  $d$  donne un cocircuit positif de  $M$  ne contenant pas  $\omega$ , de plus petit élément  $d$ , ce qui contredit  $d \notin A\mathcal{O}(M \setminus \omega)$ .  $\square$

**Lemme 1.3.**

$$A\mathcal{O}(M/\omega) = A\mathcal{O}(M \setminus \omega) \cup A\mathcal{O}_{\omega}(M) \cup A\mathcal{O}_{\omega}(-_{\omega}M)$$

*Preuve.*

Un circuit de  $M/\omega$  est un circuit de  $M$  auquel on a enlevé éventuellement l'élément  $\omega$  (cf. Annexe). Autrement dit si  $C$  est un circuit positif de  $M/\omega$ , on a soit  $C$  circuit positif de  $M$ , soit  $C \cup \omega$  circuit positif de  $M$ , soit  $C \cup \omega$  circuit positif de  $-_{\omega}M$  ce qui prouve l'inclusion  $\subseteq$ . Réciproquement si  $C$  est un circuit positif de  $M$  contenant  $\omega$  alors  $C \setminus \omega$  est un circuit positif de  $M/\omega$ , donc  $A\mathcal{O}_{\omega}(M) \cup A\mathcal{O}_{\omega}(-_{\omega}M) \subseteq A\mathcal{O}(M/\omega)$ .

D'autre part un circuit positif de  $M \setminus \omega$  est une union de circuits positifs de  $M/\omega$  (plus précisément un circuit positif de  $M$  ne contenant pas  $\omega$  qui n'est pas un circuit de  $M/\omega$  s'obtient par élimination modulaire de  $\omega$  entre deux circuits de  $M$  l'un positif et l'autre ayant pour seul élément négatif  $\omega$ , cf. Annexe), donc le plus petit élément d'un circuit positif de  $M \setminus \omega$  est le plus petit élément d'un circuit de  $M/\omega$ , c'est-à-dire  $A\mathcal{O}(M \setminus \omega) \subseteq A\mathcal{O}(M/\omega)$  ce qui achève la preuve de l'inclusion  $\supseteq$ .  $\square$

*Preuve de la proposition 1.1.*

La première partie (i) de la proposition vient directement du lemme précédent 1.2. Ensuite,  $\omega$  appartenant soit à un circuit positif soit à un cocircuit positif de  $M$ , mais pas aux deux, on distingue différents cas :

*cas 1 :*  $\mathcal{O}_\omega^*(M) \neq \emptyset$  et  $\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M) \neq \emptyset$

D'après le lemme on a par exemple  $A\mathcal{O}_\omega^*(M) \subseteq A\mathcal{O}^*(M/\omega)$  d'où  $A\mathcal{O}^*(M/\omega) \cup A\mathcal{O}_\omega^*(M) = A\mathcal{O}^*(M/\omega) \cup A\mathcal{O}_\omega^*(M) \cup A\mathcal{O}_\omega^*(M) = A\mathcal{O}^*(M \setminus \omega)$  (lemme 1.2) c'est-à-dire  $A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M) = A\mathcal{O}^*(M \setminus \omega)$ . On a alors  $A\mathcal{O}_\omega^*(M) \cup A\mathcal{O}^*(M/\omega) = A\mathcal{O}^*(M/\omega)$  (lemme 1.2) c'est-à-dire  $A\mathcal{O}^*(M) = A\mathcal{O}^*(M/\omega)$ .

D'autre part  $\mathcal{O}_\omega(M) = \mathcal{O}_\omega(-_\omega M) = \emptyset$  d'où  $A\mathcal{O}(M \setminus \omega) \cup A\mathcal{O}_\omega(M) = A\mathcal{O}(M \setminus \omega)$  (lemme 1.2), c'est-à-dire  $A\mathcal{O}(M) = A\mathcal{O}(M \setminus \omega)$ . On a aussi  $A\mathcal{O}(M \setminus \omega) \cup A\mathcal{O}_\omega(-_\omega M) = A\mathcal{O}(M \setminus \omega) \cup A\mathcal{O}_\omega(-_\omega M) \cup A\mathcal{O}_\omega(M) = A\mathcal{O}(M/\omega)$  (lemme 1.2), c'est-à-dire  $A\mathcal{O}(M/\omega) \cup A\mathcal{O}_\omega(-_\omega M)$ .

On peut donc choisir  $\widetilde{M} = -_\omega M$ .

*Remarque :* de plus dans ce cas  $A\mathcal{O}(M) = A\mathcal{O}(-_\omega M)$ .

*cas 2 :*  $\mathcal{O}_\omega^*(M) \neq \emptyset$  et  $\mathcal{O}_\omega(-_\omega M) \neq \emptyset$ .

Dans ce cas  $A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M) = \emptyset$  et  $A\mathcal{O}_\omega(M) = \emptyset$ . Donc  $A\mathcal{O}_\omega^*(M) = A\mathcal{O}^*(M/\omega) \cup A\mathcal{O}_\omega^*(M) = A\mathcal{O}^*(M/\omega) \cup A\mathcal{O}_\omega^*(M) \cup A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M) = A\mathcal{O}^*(M \setminus \omega)$ , et  $A\mathcal{O}_\omega(M) = \emptyset$ . Donc  $A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M) = A\mathcal{O}^*(M/\omega) \cup A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M) = A\mathcal{O}^*(M/\omega)$ . De même  $A\mathcal{O}(M) = A\mathcal{O}(M \setminus \omega)$  et  $A\mathcal{O}(-_\omega M) = A\mathcal{O}(M/\omega)$ . On peut donc choisir  $\widetilde{M} = M$ .

*Remarque :* on peut avoir dans ce cas  $A\mathcal{O}(M) = A\mathcal{O}(-_\omega M)$  et  $A\mathcal{O}^*(M) = A\mathcal{O}^*(-_\omega M)$  (bien que l'on ait  $A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M) \subset A\mathcal{O}_\omega^*(M)$ ).

Dans les deux cas restant on fait les mêmes raisonnements de façon duale.

*cas 3 :*  $\mathcal{O}_\omega(M) \neq \emptyset$  et  $\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M) \neq \emptyset$ .

*cas 4 :*  $\mathcal{O}_\omega(M) \neq \emptyset$  et  $\mathcal{O}_\omega(-_\omega M) \neq \emptyset$ .

(ii) étant démontrée, il devient évident que si une des inclusions de (i) est stricte, le choix de  $\widetilde{M}$  est déterminé par les propriétés de (ii). Il reste à prouver que dans ce cas l'autre inclusion de (i) est une égalité. Sinon, on aurait à la fois les inclusions strictes  $A\mathcal{O}(-_\omega M) \subset A\mathcal{O}(M)$  et  $A\mathcal{O}^*(-_\omega M) \subset A\mathcal{O}^*(M)$ . Il existe un circuit positif  $C$  de  $M$  dont le plus petit élément n'est plus petit élément d'aucun circuit positif de  $-_\omega M$ . Nécessairement  $\omega \in C$ . Il existe un cocircuit positif  $D$  de  $M$  dont le plus petit élément n'est plus petit élément d'aucun cocircuit positif de  $-_\omega M$ . Nécessairement  $\omega \in D$ . Alors  $C \cap D \neq \emptyset$  contredisant la condition d'orthogonalité.  $\square$

**Corollaire 1.4.**

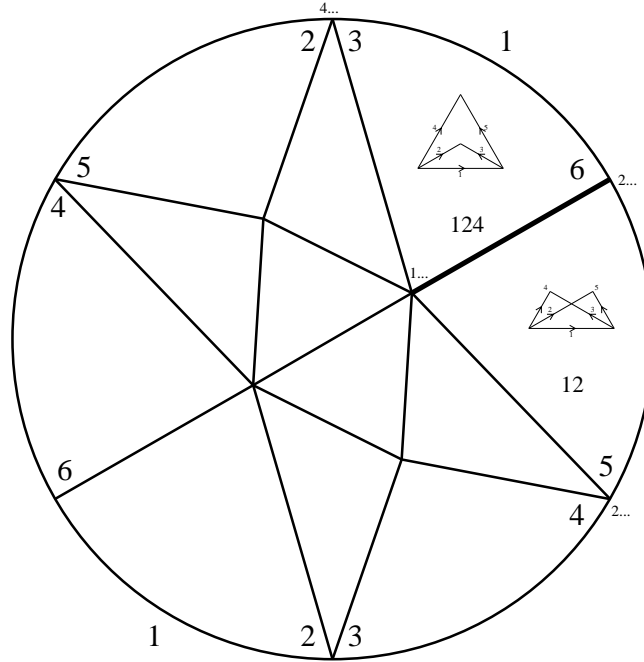
- (i)  $A\mathcal{O}(M)$  et  $A\mathcal{O}(-_\omega M)$  sont comparables pour l'inclusion,  
(ii) on ne peut avoir à la fois les deux inclusions strictes  $A\mathcal{O}(-_\omega M) \subset A\mathcal{O}(M)$  et  $A\mathcal{O}^*(-_\omega M) \subset A\mathcal{O}^*(M)$

□

*Exemples.*

(i) On reprend l'exemple de la Figure 0.3 :  $K_4$  est à gauche et  $-_6K_4$  à droite. On a déjà vu que  $A\mathcal{O}^*(K_4) = 14$ ,  $A\mathcal{O}(K_4) = \emptyset$ ,  $A\mathcal{O}^*(-_6K_4) = 1$  et  $A\mathcal{O}(-_6K_4) = 3$ . On a  $A\mathcal{O}^*(-_6K_4) \subset A\mathcal{O}^*(K_4)$ , donc avec les notations de la proposition 1.1 on doit avoir  $\widetilde{M} = K_4$ , et on vérifie facilement en effet que  $A\mathcal{O}^*(K_4 \setminus 6) = 14$ ,  $A\mathcal{O}(K_4 \setminus 6) = \emptyset$ ,  $A\mathcal{O}^*(-_6K_4 \setminus 6) = 1$  et  $A\mathcal{O}(-_6K_4/6) = 3$ .

(ii) Pour le matroïde orienté  $M$  défini par  $K_4$  et le covecteur positif 123456 de la Figure 1.1 ( $-_6M$  correspond au covecteur 123456), on a  $A\mathcal{O}(M) = A\mathcal{O}(-_6M) = \emptyset$  (ce sont des régions, i. e. des réorientations acycliques),  $A\mathcal{O}^*(M) = 124$  et  $A\mathcal{O}^*(-_6M) = 12$  (cf. Figure 0.4). On doit donc avoir  $\widetilde{M} = M$ , et on vérifie que  $M \setminus 6$  et  $M/6$  sont acycliques et que  $A\mathcal{O}^*(M \setminus 6) = 124$  et  $A\mathcal{O}^*(-_6M/6) = 12$  : en effet  $M \setminus 6$  est la région contenant la région  $M$  lorsque l'on supprime 6, et  $-_6M/6$  est la région touchant la région  $-_6M$  dans l'arrangement induit sur 6 (on peut lire leurs activités directement sur le dessin).

**Figure 1.1 : exemple pour la proposition 1.1****Lemme 1.5.**

Soit  $B$  une base de  $M$  sur  $E$  de plus grand élément  $\omega$ .

Si  $\omega \notin B$  alors  $\text{Int}_M(B) = \text{Int}_{M \setminus \omega}(B)$  ;



*si de plus  $\omega$  n'est pas une boucle alors  $Ext_M(B) = Ext_{M \setminus \omega}(B)$   
 et si  $\omega$  est une boucle alors  $Ext_M(B) = Ext_{M \setminus \omega}(B) \cup \{\omega\}$ .  
 Si  $\omega \in B$  alors  $Ext_M(B) = Ext_{M/\omega}(B \setminus \omega)$  ;  
 si de plus  $\omega$  n'est pas un isthme alors  $Int_M(B) = Int_{M/\omega}(B \setminus \omega)$   
 et si  $\omega$  est un isthme alors  $Int_M(B) = Int_{M/\omega}(B \setminus \omega) \cup \{\omega\}$ .*

*Preuve.* Les deux assertions suivantes viennent directement des définitions (propriété 0.1) : si  $\omega \notin B$  alors  $C_M^*(B; b) \setminus \omega = C_{M \setminus \omega}^*(B; b)$  pour tout  $b \in B$  ; si  $\omega \in B$  alors  $C_M(B; e) \setminus \omega = C_{M/\omega}(B; e)$  pour tout  $e \notin B$ . Par définitions des activités, on déduit facilement le lemme au cas par cas.  $\square$

**Théorème 1.6.** (critère de compatibilité)

*Il existe une application  $\psi$  associant à tout matroïde orienté ordonné  $M$  sur  $E(M)$  une base  $\psi(M)$  de  $M$  vérifiant les propriétés suivantes :*

(OB1) ‘préservation des éléments actifs’

*pour tout  $M$ , avec  $B = \psi(M)$ ,  $Int_M(B) = AO^*(M)$  et  $Ext_M(B) = AO(M)$*

(OB2) ‘correspondance numérique’

*pour tout  $M$  et pour toute base  $B$  de  $M$ , le nombre de sous-ensembles  $A \subseteq E(M)$  tels que  $\psi(-_A M) = B$  est égal à  $2^{\iota_M(B) + \epsilon_M(B)}$*

(OB3) ‘induction’

*pour tout  $M$  sur  $E(M)$  de plus grand élément  $\omega$  on a*

(OB3.1) *si  $\omega$  est un isthme de  $M$  alors  $\psi(M) = \psi(-_\omega M) = \psi(M/\omega) \cup \{\omega\}$*

(OB3.2) *si  $\omega$  est une boucle de  $M$  alors  $\psi(M) = \psi(-_\omega M) = \psi(M \setminus \omega)$*

(OB3.3) *si  $\omega$  n'est ni un isthme ni une boucle de  $M$  alors*

$$\{\psi(M), \psi(-_\omega M)\} = \{\psi(M \setminus \omega), \psi(M/\omega) \cup \{\omega\}\}$$

*De façon plus précise une application  $\psi$  vérifie (OB1) (OB2) (OB3.1-3) si et seulement si elle satisfait la construction inductive suivante :*

$\psi(\emptyset) = \emptyset$   
 Pour tout matroïde orienté  $M$  sur  $E$  de plus grand élément  $\omega$ ,  
 $\gamma$  étant une application dans  $\{0, 1\}$  telle que  

$$\gamma(M) = 0 \text{ si } \omega \notin \psi(M) \text{ et } \gamma(M) = 1 \text{ si } \omega \in \psi(M).$$
 Si  $\omega$  est un isthme de  $M$  alors  $\gamma(M) = 1$ .  
 Si  $\omega$  est une boucle de  $M$  alors  $\gamma(M) = 0$ .  
 Si  $\omega$  n'est ni un isthme ni une boucle de  $M$  et  
 si  $A\mathcal{O}(M) \subset A\mathcal{O}(-_\omega M)$  ou  $A\mathcal{O}^*(-_\omega M) \subset A\mathcal{O}^*(M)$   
 alors  $\gamma(M) = 0$   
 si  $A\mathcal{O}(-_\omega M) \subset A\mathcal{O}(M)$  ou  $A\mathcal{O}^*(M) \subset A\mathcal{O}^*(-_\omega M)$   
 alors  $\gamma(M) = 1$   
 si  $A\mathcal{O}(M) = A\mathcal{O}(-_\omega M)$  et  $A\mathcal{O}^*(-_\omega M) = A\mathcal{O}^*(M)$   
 alors  
**choix arbitraire**  

$$\gamma(M) = 1 - \gamma(-_\omega M) \quad (\text{indifféremment } \{\gamma(M), \gamma(-_\omega M)\} = \{0, 1\}).$$
**fin**  
 Si  $\gamma(M) = 0$  alors  $\psi(M) = \psi(M \setminus \omega)$ ,  
 et si  $\gamma(M) = 1$  alors  $\psi(M) = \psi(M/\omega) \cup \omega$ .

Il faut noter avant tout que la construction inductive précédente définit en même temps  $\gamma(M)$  et  $\gamma(-_\omega M)$ , et donc  $\psi(M)$  et  $\psi(-_\omega M)$  (on a  $\gamma(-_\omega M) = 1 - \gamma(M)$  dès que  $\omega$  n'est ni un isthme ni une boucle de  $M$ ).

*Preuve.*

Premièrement, le corollaire 1.4 assure que l'algorithme inductif donné est bien défini : si  $\omega$  n'est ni un isthme ni une boucle, un et un seul des trois cas est vérifié par  $M$ . On montre alors le théorème par induction. On suppose qu'il est vrai pour tous les matroïdes orientés sur  $E$ ,  $|E| < n$ , et que l'on a construit une application  $\psi$  satisfaisante pour les matroïdes  $M \setminus \omega$  et  $M/\omega$ .

Si  $\omega$  est un isthme (resp. une boucle) de  $M$ , c'est aussi bien sûr un isthme (resp. une boucle) de  $-_\omega M$ , et la condition (OB3.1) (resp. (OB3.2)) est équivalente à celle de l'algorithme. Le lemme 1.5 et l'hypothèse d'induction assurent alors la condition (OB2). L'activité interne (resp. externe) de toute base  $B$  de  $M$  vaut 1 de plus que la base  $B \setminus \omega$  (resp.  $B$ ) induite dans  $M/\omega = M \setminus \omega$ , l'autre activité étant inchangée, et dans les deux constructions on a  $\psi(M) = \psi(-_\omega M)$ , de sorte que la condition (OB2) est satisfaite par  $\psi$  par hypothèse d'induction.

Si  $\omega$  n'est ni un isthme ni une boucle de  $M$ , alors la condition (OB3.3) impose un choix  $\gamma(M), \gamma(-_\omega M) = \{0, 1\}$  : si  $B' = \psi(M \setminus \omega)$  et  $B'' = \psi(M/\omega)$ , on doit avoir  $B' = \psi(\widetilde{M})$  et  $B'' \cup \omega = \psi(-_\omega \widetilde{M})$  pour  $\{\widetilde{M}, -_\omega \widetilde{M}\} = \{M, -_\omega M\}$ . Par hypothèse d'induction, on a  $Int(B') = A\mathcal{O}^*(M \setminus \omega)$ ,  $Int(B'') = A\mathcal{O}^*(M/\omega)$ ,  $Ext(B') = A\mathcal{O}(M \setminus \omega)$  et  $Ext(B'') = A\mathcal{O}(M/\omega)$ . Via le lemme 1.5, les conditions (OB1) pour  $M$  et  $-_\omega M$ , équivalent aux conditions (ii) de la proposition 1.1 pour  $\widetilde{M}$ .

Si on est dans un cas d'inclusion stricte de (i) de la proposition 1.1, les conditions (OB1) imposent alors le même choix de  $\widetilde{M}$  que dans la proposition 1.1, qui est le même que dans la construction algorithmique. Si on est dans le cas de deux égalités pour le (i) de la proposition 1.1, c'est le troisième cas de la construction algorithmique et on peut choisir indifféremment  $\widetilde{M} = M$  ou  $\widetilde{M} = -_{\omega}M$ , les conditions (OB1) seront satisfaites. Dans tous les cas, les activités des bases obtenues sont les mêmes que celles des bases induites dans  $M/\omega$  et  $M \setminus \omega$ , de sorte que la condition (OB2) est satisfaite par hypothèse d'induction.  $\square$

Lorsqu'on parlera par la suite du 'choix dans le critère de compatibilité', il s'agira de l'égalité  $\{\gamma(M), \gamma(-_{\omega}M)\} = \{0, 1\}$  sur laquelle repose toute la définition et qui est arbitraire lorsqu'elle n'est pas déterminée.

*Remarque.* Au cours de la construction inductive partant du matroïde vide, le facteur 2 apparaît chaque fois que le nouvel élément  $\omega$  est un isthme (pour l'activité interne et l'activité duale) ou une boucle (pour l'activité externe et l'activité). En quelque sorte, les activités sont, comme dans la définition inductive du polynôme de Tutte, l'*empreinte* des isthmes et des boucles dans l'*arbre généalogique* du matroïde orienté (voir chapitre 4 paragraphe 'complexité algorithmique').

Les propriétés (OB1) et (OB2) d'une application  $\psi$  du théorème précédent prouvent le résultat suivant, qui est plus fort que  $o_{i,j} = 2^{i+j}b_{i,j}$  du théorème 0.8 'dénombrement des activités'.

**Corollaire 1.7.** (dénombrement des éléments actifs)

*Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné sur  $E$ .*

*Pour  $I, J \subseteq E$ , si  $o_{I,J}$  est le nombre de réorientations de  $M$  ayant pour ensemble d'éléments dual-actifs  $I$  et actifs  $J$ , et  $b_{I,J}$  le nombre de bases de  $M$  ayant pour ensemble d'éléments intérieurement actifs  $I$  et extérieurement actifs  $J$ , alors*

$$o_{I,J} = 2^{|I|+|J|}b_{I,J}$$

$\square$

Attention : ces nombres  $b_{I,J}$  pour  $I, J \subseteq E$ , dépendent de l'ordre sur  $E$  contrairement aux  $b_{i,j}$  pour  $i, j \in E$ . Ce ne sont pas des invariants du matroïde.

Une application  $\psi$  définie par le théorème précédent induit une application  $\psi_M$  sur les réorientations de  $M$  définie par

$$\psi_M(A) = \psi(-_A M)$$

pour  $A \subseteq E$ . Ainsi pour tout  $A, A' \subseteq E$ ,  $\psi_{-AM}(A') = \psi_M(A \triangle A')$ . Cette correspondance entre réorientations et bases de  $M$  vérifie alors par définition la propriété naturelle suivante :

‘passage à l’opposé’ pour tout  $M$  et tout  $A \subseteq E$ ,  $\psi_M(A) = \psi_M(E \setminus A)$ .

Deux réorientations opposées sont associées à la même base. Ainsi, selon la propriété (OB2), la restriction de  $\psi_M$  aux réorientation acycliques d’activité duale 1, notée  $\psi_M^{(1,0)}$ , induit une bijection entre les paires de réorientations opposées acycliques d’activité duale 1 et les bases internes de  $M$  d’activité interne 1 :

$(OB2^{(1,0)})$  ‘bijektivité du cas  $(1,0)$ ’

pour tout  $M$ ,  $\psi_M^{(1,0)}$  induit une bijection entre bases d’activités  $(1,0)$  et les paires de réorientations opposées d’activités  $(1,0)$ .

Si on se restreint au cas d’activité  $(1,0)$ , le théorème 1.6 ‘critère de compatibilité’ donne la construction suivante (dans cette restriction, les matroïdes considérés n’ont pas de boucle, qui serait active, et n’ont pas d’isthmes, qui serait dual-actif, à moins d’être réduit à ce seul isthme). Comme d’habitude,  $U_{1,1}$  désigne le matroïde uniforme de rang 1 à 1 élément : c’est le matroïde réduit à un isthme.

**Corollaire 1.8.** (critère de compatibilité $^{(1,0)}$ )

Il existe une application  $\psi^{(1,0)}$  associant à tout matroïde orienté ordonné  $M$  d’activités  $(1,0)$  une base  $B = \psi^{(1,0)}(M)$  de  $M$  vérifiant les propriétés suivantes :  
 $(OB1^{(1,0)})$  ‘préservation des éléments actifs $^{(1,0)}$ ’,

Pour tout  $M$  d’activités  $(1,0)$ ,  $B = \psi^{(1,0)}(M)$  est une base de  $M$  d’activités  $(1,0)$ .

$(OB2^{(1,0)})$  ‘bijektivité $^{(1,0)}$ ’,

Pour tout  $M$  d’activités  $(1,0)$ ,  $\psi(1,0)$  induit une bijection entre bases d’activités  $(1,0)$  et les paires de réorientations de  $M$  opposées d’activités  $(1,0)$ .

$(OB3^{(1,0)})$  ‘induction $^{(1,0)}$ ’,

Pour tout  $M$  d’activités  $(1,0)$  avec  $\omega = \max(E(M))$  :  
 $\omega \in \psi(M)$  implique  $M/\omega$  d’activités  $(1,0)$  et  $\psi(M/\omega) = \psi(M) \setminus \omega$ ,  
 $\omega \notin \psi(M)$  implique  $M \setminus \omega$  d’activités  $(1,0)$  et  $\psi(M/\omega) = \psi(M)$ .

Plus précisément une telle application satisfait ces conditions si et seulement si elle satisfait la construction inductive suivante :

Soit  $M$  un matroïde orienté sur  $E$  avec  
 $o^*(M) = 1$ ,  $o(M) = 0$ ,  $\max(E) = \omega$ .

Si  $M = U_{1,1}$  alors  $\psi^{(1,0)}(M) = \omega$ .

Si  $M \neq U_{1,1}$  alors :

- si  $o^*(-_\omega M) = 0$  alors  $\gamma(M) := 0$  ;
- si  $o^*(-_\omega M) > 1$  alors  $\gamma(M) := 1$  ;
- si  $o^*(-_\omega M) = 1$  alors

**choix arbitraire**

$$\gamma(M) = 1 - \gamma(-_\omega M) \quad (\text{indifféremment } \{\gamma(M), \gamma(-_\omega M)\} = \{0, 1\}).$$

**fin**

Si  $\gamma(M) = 0$  alors

$$\psi^{(1,0)}(M) := \psi^{(1,0)}(M \setminus \omega)$$

si  $\gamma(M) = 1$  alors

$$\psi^{(1,0)}(M) := \psi^{(1,0)}(M/\omega) \cup \omega$$

*Preuve.*

Dans cette preuve on note simplement  $\psi$  pour  $\psi^{(1,0)}$ . La condition (OB3<sup>(1,0)</sup>) implique évidemment les conditions (OB3.1) et (OB3.2) pour tout matroïde orienté acyclique d'activité duale 1. Pour montrer (OB3.3) supposons que  $\omega \in \psi(M)$  et  $\omega \in \psi(-_\omega M)$ , alors  $\psi(M) = \psi(M/\omega) \cup \omega = \psi(-_\omega M)$ , donc  $\{\emptyset, \omega, E, E \setminus \omega\} \subseteq \psi_M^{-1}(\psi(M))$  ce qui contredit (OB4<sup>(1,0)</sup>) à moins d'avoir  $E = \omega$  auquel cas  $M = U_{1,1}$  et  $\psi(M) = \omega$ . De même on ne peut pas avoir  $\omega \notin \psi(M)$  et  $\omega \notin \psi(-_\omega M)$ . Ainsi on doit avoir  $\{\psi(M), \psi(-_\omega M)\} = \{\psi(M/\omega), \psi(M \setminus \omega)\}$  si  $M$  et  $-_\omega M$  sont acycliques d'activité duale 1 et on poursuit la preuve comme dans le théorème 1.6.  $\square$

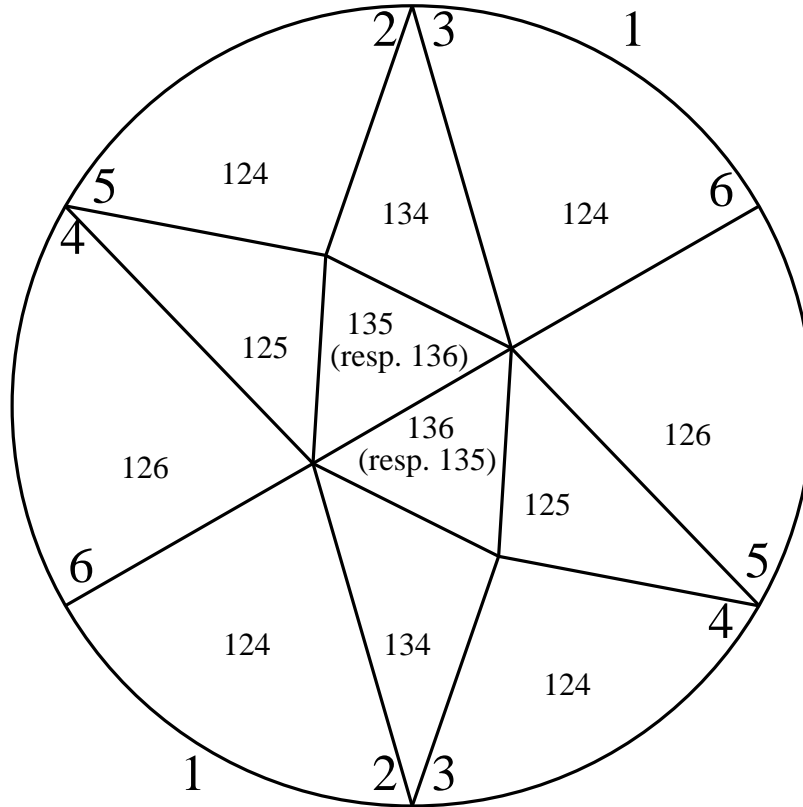
*Interprétation géométrique.* Géométriquement, dans un arrangement de pseudosphères, ce 'critère de compatibilité' signifie que l'on peut définir une correspondance entre réorientations et bases de la façon suivante : si  $\omega$  coupe une région  $M$ , la région qui a la strictement plus grande activité interne est associée à la même base que la région correspondante dans  $M \setminus \omega$  et la région  $-_\omega M$  opposée par rapport à  $\omega$  est alors associée à la même base (union  $\omega$ ) que la région correspondante dans  $M/\omega$  ; si les activités sont égales, le choix est arbitraire ; et si  $\omega$  ne coupe pas la région, le choix est déterminé de même (puisque dans la région l'activité externe est nulle, alors que dans la réorientation obtenue en retournant  $\omega$ , elle ne l'est pas). L'élément  $\omega$  est donc naturellement adjacent à la région associée à la base contenant  $\omega$ . La propriété (OB3) peut se reformuler géométriquement ainsi :

*(OB3<sub>géom</sub>) pour toute région associée à une base  $B$  contenant  $\omega$ ,  $\omega$  est frontière de cette région ; et la région opposée par rapport à  $\omega$  est associée à une base ne contenant pas  $\omega$  (sauf si  $\omega$  est un isthme).*



à 134 (celle du haut sur la Figure 1.2), et celle de droite obtenue par réorientation de 6 n'est pas une région, elle sera associée à la base 156 par la condition (OB1) 'préservation des éléments actifs' ; dans l'exemple (ii) (Figure 1.1) on a vu aussi que le choix était déterminé.

On en déduit deux correspondances possibles pour les réorientations acycliques de  $K_4$  (Figure 1.3). Cependant il faut noter que l'on obtient très vite un grand nombre de correspondances satisfaisantes lorsque la taille du matroïde orienté croît. Sur cet exemple il suffit d'ajouter une pseudodroite 7 coupant la région d'éléments actifs 12 et les deux régions d'élément actif 1 pour obtenir  $2^4 = 16$  nouvelles possibilités par correspondance déjà autorisée (sans tenir compte des choix pour les réorientations non acycliques).



**Figure 1.3 : deux correspondances satisfaisant le critère 1.6 pour  $K_4$**

Remarquons qu'on ne peut pas, selon le 'critère de compatibilité', permuter les bases 125 et 126 dans leurs régions associées (alors que les éléments actifs sont les mêmes). Cela contredirait la propriété (OB3<sub>géom</sub>).

Avec les résultats de ce chapitre, on peut donc construire différentes correspondances actives entre réorientations et bases (à cause du choix arbitraire) vérifiant la propriété naturelle d'induction.

Le problème est maintenant de déterminer ce choix, toujours de façon 'naturelle', pour tous les cas. On va par la suite construire une certaine correspondance, satisfaisant les conditions du lemme précédent. Elle sera définie dans le chapitre 4

partie 1, indépendamment de la définition inductive précédente, à l'aide des chapitres 2 et 3. En bref, il s'agira premièrement de raffiner encore la notion d'activités en ne s'intéressant plus aux ensemble d'éléments actifs mais à des 'partitions actives' (chapitre 2), et deuxièmement de généraliser la propriété  $(OB3^{geom})$  à la suite de fermés définie par une base ordonnée pour qu'elle soit adjacente à la région associée tout en conservant une propriété de dualité (chapitre 3). On reviendra sur la définition inductive précédente à la fin du chapitre 3 pour les activités  $(1, 0)$ , et dans le chapitre 4 partie 2 pour le cas général, où l'on verra à quel choix correspond la construction effectuée.



## Chapitre 2

### Décompositions des activités

Le but de ce chapitre est de définir une décomposition des bases et, indépendamment, une décomposition des réorientations, par l'intermédiaire de mineurs pour lesquels les seules bases ou réorientations considérées sont d'activités  $(1, 0)$  ou  $(0, 1)$ . On obtient des résultats analogues dans les deux cas, permettant de ramener le problème de départ (établir une correspondance) au cas particulier des activités  $(1, 0)$ . Ce chapitre développe et approfondit des idées de [LV 83] et [EtLV 98].

Plus précisément, on introduit la notion de 'suites décomposantes' d'un matroïde, qui sont des suites croissantes particulières de parties du matroïde (définition ci-dessous) et on obtient des résultats structurels et constructifs sur l'ensemble des bases et sur celui des réorientations, résultats intéressants en eux-mêmes. Dans la première partie on définit une *décomposition active des bases* d'un matroïde ordonné en décomposant de façon unique une base en bases d'activités  $(1, 0)$  ou  $(0, 1)$  dans des mineurs. On en déduit une formulation du polynôme de Tutte d'un matroïde n'utilisant que les invariants bêta de certains mineurs (corollaire final). Les mineurs qui interviennent sont définis à partir d'une suite décomposante associée à la base, et font apparaître par différences successives une 'partition active' de l'ensemble des éléments du matroïde. La notion de partitions actives affine la notion d'activités plus loin que les ensembles d'éléments actifs. Dans la deuxième partie, de façon similaire, on définit une *décomposition active des réorientations* d'un matroïde orienté ordonné. Dans ce cas les  $2^{i+j}$  réorientations obtenues en réorientant des parties quelconques de la partition active associée à une réorientation d'activités  $(i, j)$  forment une *classe d'activités de réorientations*, dont tous les éléments ont même partition active, et dont l'ensemble constitue une partition remarquable de l'ensemble des réorientations du matroïde orienté ordonné.

Le plus curieux, et le plus utile ici, est la similarité avec laquelle l'ensemble des suites décomposantes intervient dans ces deux constructions a priori indépendantes. La troisième partie exploitera ce lien pour construire une classe générale de correspondances préservant les partitions actives (et donc les activités) par extension à partir des correspondances restreintes aux activités  $(1, 0)$ .

*Définition.* Une *suite décomposante* d'un matroïde ordonné  $M$  sur  $E$

$$\emptyset = F_\epsilon^* \subset \dots \subset F_0^* = F_c = F_0 \subset \dots \subset F_\iota = E$$

est une suite croissante de parties de  $E$  vérifiant :

- $F_c$  est un fermé cyclique de  $M$  (i. e.  $F_c$  fermé de  $M$  et  $E \setminus F_c$  fermé de  $M^*$ ) ;
- pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq \iota$ ,  $F_k$  est un fermé de  $M$ , et  $F_c = F_0 \subset \dots \subset F_\iota = E$  ;
- pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq \epsilon$ ,  $E \setminus F_k^*$  est un fermé de  $M^*$ , et  $\emptyset = F_\epsilon^* \subset \dots \subset F_0^* = F_c$  ;

- la suite des  $\min(F_k \setminus F_{k-1})$ ,  $1 \leq k \leq \iota$ , est croissante ;
- la suite des  $\min(F_{k-1}^* \setminus F_k^*)$ ,  $1 \leq k \leq \epsilon$ , est croissante ;
- les  $M(F_k)/F_{k-1}$ ,  $1 \leq k \leq \iota$ , et  $M(F_{k-1}^*)/F_k^*$ ,  $1 \leq k \leq \epsilon$ , sont connexes (i. e. leurs invariants  $\beta$  sont non nuls).

Un fermé de  $M^*$  est le complémentaire d'une union de circuits de  $M$ . Un *fermé cyclique*  $F_c$  de  $M$  est un fermé de  $M$  tel que  $E \setminus F_c$  soit un fermé de  $M^*$ . De façon équivalente, un fermé cyclique est un fermé qui soit union de circuits, ou encore un fermé tel que le matroïde restreint à ce fermé soit sans isthme. Ainsi,  $F_c$  étant un fermé cyclique, les boucles de  $M$  sont dans  $F_c$  et les isthmes dans  $E \setminus F_c$ .

### Propriétés 2.0.

*Une suite décomposante de  $M^*$  est la suite des complémentaires dans  $E$  d'une suite décomposante de  $M$ .*

*Une suite*

$$\emptyset = F_\epsilon^* \subset \dots \subset F_0^* = F_c = F_0 \subset \dots \subset F_\iota = E$$

*est une suite décomposante d'un matroïde ordonné  $M$  sur  $E$  (pour le fermé cyclique  $F_c$ ) si et seulement si les suites*

$$\emptyset = F_\epsilon' \subset \dots \subset F_0' = F_c' = F_c$$

*et*

$$\emptyset = F_c'' = F_0 \setminus F_c \subset \dots \subset F_\iota \setminus F_c = E \setminus F_c$$

*sont des suites décomposantes respectivement de  $M(F_c)$  (pour le fermé cyclique  $F_c' = F_c$ ) et de  $M/F_c$  (pour le fermé cyclique  $F_c'' = \emptyset$ ).*

*Preuve.* La première propriété est évidente par définition puisque  $F_{k-1}^* \setminus F_k^* = (E \setminus F_k^*) \setminus (E \setminus F_{k-1}^*)$ . Pour la seconde propriété il suffit de vérifier que  $F$  fermé de  $M$  contenant  $F_c$  si et seulement si  $F \setminus F_c$  fermé de  $M/F_c$  (c'est vrai car les circuits de  $M/F_c$  s'obtiennent en supprimant  $F_c$  des circuits de  $M$ ), ce qui donne par dualité  $E \setminus F^*$  fermé de  $M^*$  inclus dans  $F_c$  si et seulement si  $E \setminus F^*$  fermé de  $(M(F_c))^*$ .  $\square$

*Définition.* Une suite décomposante induit par différences successives une partition de  $E$ , que l'on appellera *partition active* de  $E$  pour cette suite décomposante :

$$E = F_{\epsilon-1}^* \setminus F_\epsilon^* + \dots + F_0^* \setminus F_1^* + F_1 \setminus F_0 + \dots + F_\iota \setminus F_{\iota-1}$$

Une telle partition sera ultérieurement représentée par une fonction qui à un élément  $e$  de  $E$  associera le plus petit élément de la partie contenant  $e$  dans la partition active de  $E$  :

$$\alpha(e) = \min(F_{k-1}^* \setminus F_k^*)$$

si  $e \in F_{k-1}^* \setminus F_k^*$ ,  $1 \leq k \leq \epsilon$ , et

$$\alpha(e) = \min(F_k \setminus F_{k-1})$$

si  $e \in F_k \setminus F_{k-1}$ ,  $1 \leq k \leq \iota$ .

La partition active est donc la partition  $\alpha^{-1}$  de  $E$  ( $\alpha^{-1}(a) \neq \emptyset$  si et seulement si  $a$  est le plus petit élément d'une partie de la partition active). Si  $\alpha(e) = a$  on dira alors que  $e$  est *associé* à  $a$  dans la partition active.

Il faut remarquer qu'une partition active ne détermine pas la suite décomposante dont elle est issue. Par exemple, les deux suites décomposantes  $\emptyset = F_0^* = F_c = F_0 \subset F_1 = E$  et  $\emptyset = F_1^* \subset F_0^* = F_c = F_0 = E$  pour un matroïde sans isthme ni boucle, induisent la même partition de  $E$  ayant pour unique partie  $E$ . Par contre connaissant une partition active et le fermé cyclique  $F_c$ , on peut reconstruire immédiatement la suite décomposante définissant cette partition. En effet les parties contenue dans  $F_c = F_0^*$  sont ordonnées selon leurs plus petits éléments : avec  $a_k^* = \min(F_{k-1}^* \setminus F_k^*)$ ,  $1 \leq k \leq \varepsilon$ ,

$$\alpha(E) \cap F_c = a_1^* < \dots < a_\varepsilon^*$$

et donnent les  $F_k^*$ ,  $1 \leq k \leq \varepsilon$ , par unions successives :

$$F_k^* = \bigcup_{\substack{a > a_k^* \\ a \in F_c}} \alpha^{-1}(a)$$

pour tout  $1 \leq k \leq \varepsilon$  ; et les parties contenues dans  $E \setminus F_c = E \setminus F_0$  sont ordonnées selon leurs plus petits éléments : avec  $a_k = \min(F_k^* \setminus F_{k-1}^*)$ ,  $1 \leq k \leq \iota$ ,

$$\alpha(E) \setminus F_c = a_1 < \dots < a_\iota$$

et donnent les  $F_k$ ,  $1 \leq k \leq \iota$  par unions successives :

$$F_k = E \setminus \bigcup_{\substack{a > a_k \\ a \notin F_c}} \alpha^{-1}(a)$$

pour tout  $1 \leq k \leq \iota$ .

Ainsi la notion de partition active associée à un fermé cyclique est équivalente à celle de suite décomposante. On introduit cependant les deux définitions : dans ce chapitre on manipulera les suites décomposantes afin d'établir clairement les théorèmes de décompositions, par contre dans les chapitres suivants on utilisera surtout les partitions actives, car ce sont surtout elles qui interviennent pratiquement, leur fonction représentative associée évitant de plus de surcharger l'écriture.

Les plus petits éléments des parties de la partition active associée à une base ou une réorientation en seront les éléments actifs. La notion de 'partition active' est cependant plus forte que celle d'ensemble d'éléments actifs : deux bases ou deux réorientations peuvent avoir les même éléments actifs mais pas la même suite décomposante associée.

## 2.1 Activités des bases

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant et de calculer explicitement l'unique suite décomposante associée à une base donnée. Le pendant numérique de ce théorème est l'expression du polynôme de Tutte d'un matroïde à partir des invariants bêta de certains de ses mineurs (corollaire final).

**Théorème 2.1.1.** (décomposition active des bases)

*Soit  $M$  un matroïde ordonné sur  $E$ , et  $\mathcal{B}$  l'ensemble des bases de  $M$ .*

$$\mathcal{B} = \bigsqcup_{\substack{\emptyset = F_\epsilon^* \subset \dots \subset F_0^* = F_c \\ F_c = F_0 \subset \dots \subset F_\iota = E \\ \text{décomposante}}} \{B_1^* + \dots + B_\epsilon^* + B_1 + \dots + B_\iota \mid$$

$$\forall 1 \leq k \leq \epsilon, B_k^* \text{ base d'activités } (0, 1) \text{ de } M(F_{k-1}^*)/F_k^*,$$

$$\forall 1 \leq k \leq \iota, B_k \text{ base d'activités } (1, 0) \text{ de } M(F_k)/F_{k-1}\}$$

Avec  $B = B_1^* + \dots + B_\epsilon^* + B_1 + \dots + B_\iota$  on a alors

$$Int(B) = \cup_{1 \leq k \leq \iota} min(F_k \setminus F_{k-1}) = \cup_{1 \leq k \leq \iota} Int(B_k)$$

$$Ext(B) = \cup_{1 \leq k \leq \epsilon} min(F_{k-1}^* \setminus F_k^*) = \cup_{1 \leq k \leq \epsilon} Ext(B_k^*)$$

La *décomposition en éléments internes et externes de  $E$  relative à une base*, qui revient à ne s'occuper que du fermé cyclique  $F_c$  dans la suite décomposante :  $B = B \cap F_c + B \setminus F_c$ , ainsi que la décomposition de l'ensemble des bases qui s'en déduit, sont déjà connues et apparues d'abord dans [EtLV 98] (reprises depuis par exemple dans [KoReSt 99]). La *décomposition d'une base en bases d'activité 1*, plus profonde :  $B = B_1^* + \dots + B_\epsilon^* + B_1 + \dots + B_\iota$ , était annoncée dans [EtLV 98] et dans [LV 83]. La notion de 'suite décomposante' et la décomposition de l'ensemble des bases par l'ensemble des suites décomposantes sont nouvelles. Les résultats et constructions de cette partie sont essentiellement des approfondissements de ceux de [EtLV 98] (que l'on remonte du même coup).

*Exemple.* Le tableau de la Figure 2.1 recense les suites décomposantes de  $K_4$  (le fermé cyclique apparaît en gras) et les bases correspondantes via le théorème de décomposition active des bases 2.1.1. Les éléments actifs sont les plus petits éléments des parties de la partition active.

Quelques exemples détaillés : la base 125 interne d'éléments intérieurement actifs 12 est la réunion de la base 15 d'activités (1, 0) de  $K_4(145)$  et de la base 2 d'activités (1, 0) de  $K_4/145$  ; la base 234 d'élément intérieurement actif 4 et extérieurement actif 1 est la réunion de la base 23 d'activités (0, 1) de  $K_4(123)$  et de la base 4 d'activités (1, 0) de  $K_4/123$  ; la base 256 (Figure 0.1) externe d'éléments extérieurement actifs 13 est la réunion de la base 56 d'activités (0, 1) de  $K_4(356)$  et de la base 2 d'activités (0, 1) de  $K_4/356$ .

En revanche, par exemple, la suite de parties  $\emptyset \subset 2 \subset 246 \subset E$  n'est pas une suite décomposante, car elle ne satisfait pas la condition de croissance des plus petits éléments des différences successives de la définition, ni pour  $F_c = \emptyset$ , ni pour  $F_c = 246$ , ni pour  $F_c = E$ .

Suites décomposantes	Partitions actives	Bases
$\emptyset \subset 1 \subset 123 \subset E$	$1 + 23 + 456$	124
$\emptyset \subset 1 \subset E$	$1 + 23456$	126
$\emptyset \subset 145 \subset E$	$145 + 236$	125
$\emptyset \subset 123 \subset E$	$123 + 456$	134
$\emptyset \subset E$	123456	135
$\emptyset \subset E$	123456	136
$\emptyset \subset \mathbf{123} \subset E$	$123 + 456$	234
$\emptyset \subset \mathbf{145} \subset E$	$145 + 236$	245
$\emptyset \subset \mathbf{246} \subset E$	$246 + 135$	146
$\emptyset \subset \mathbf{356} \subset E$	$356 + 124$	156
$\emptyset \subset \mathbf{E}$	123456	235
$\emptyset \subset \mathbf{E}$	123456	236
$\emptyset \subset 246 \subset \mathbf{E}$	$135 + 246$	346
$\emptyset \subset 356 \subset \mathbf{E}$	$124 + 356$	256
$\emptyset \subset 23456 \subset \mathbf{E}$	$1 + 23456$	345
$\emptyset \subset 356 \subset 23456 \subset \mathbf{E}$	$1 + 24 + 356$	456

**Figure 2.1 : tableau de décomposition des bases de  $K_4$**

Ce qui va être fait repose entièrement sur le ‘graphe fondamental’ de la base : graphe biparti entre les éléments de la base et ceux de son complémentaire, où une arête joint deux éléments si et seulement si ils appartiennent à un même circuit ou cocircuit fondamental (cf. Introduction).

Dans l’ordre, on va d’abord réécrire brièvement pour un graphe biparti quelconque dont l’ensemble des sommets est totalement ordonné les définitions des notions liées aux activités. Puis on définira une application  $\hat{A}$  sur les parties de l’ensemble des sommets du graphe, dont l’idée est de permettre de séparer le graphe en deux sous-graphes, qui se partageront les éléments actifs du graphe de départ sans en faire apparaître de nouveaux. Ceci est exprimé dans le ‘lemme de décomposition des activités d’un graphe biparti’, duquel s’obtiennent facilement toutes les constructions de cette partie. Premièrement en appliquant  $\hat{A}$  à l’ensemble des éléments intérieurement actifs, on peut séparer les activités internes et externes. Deuxièmement pour un graphe

‘interne’ ou ‘externe’, en appliquant inductivement  $\hat{A}$  au plus grand élément actif et en supprimant le sous-graphe obtenu, on obtient une décomposition en sous-graphes d’activité 1. En effectuant ces constructions pour le graphe biparti fondamental d’une base donnée d’un matroïde, on obtient des formulations en termes d’activités des bases et de fermés du matroïde, qui aboutissent, lorsque l’on considère l’ensemble de toutes les bases, aux suites décomposantes et au théorème 2.1.1. Hormis pour les deux premiers lemmes, les résultats seront énoncés dans le langage des matroïdes, mais ceux qui concernent une base donnée peuvent être formulés plus généralement en termes de graphes bipartis.

En effet, comme dans [EtLV 98], les décompositions faites peuvent être définies plus généralement pour tout graphe biparti dont les sommets sont totalement ordonnés. Ceci clarifie la construction pratique (algorithmique) de la décomposition d’une base et permet d’insister sur le fait qu’elle ne dépend que du graphe fondamental de cette base, et non de tout le matroïde.

*Définitions.* Soit  $E$  un ensemble fini totalement ordonné,  $B \subseteq E$ , et  $(G, B)$ , abrégé en  $G$  (les définitions relatives à  $G$  dépendent de  $B$ ), un graphe biparti entre  $B$  et  $E \setminus B$ .

Par analogie, pour  $e \in B$  (resp.  $e \notin B$ ), on note  $C^*(B; e)$  (resp.  $C(B; e)$ ) l’ensemble formé de  $e$  et des sommets reliés à  $e$  dans  $G$ , ainsi  $e \in C^*(B; b)$  si et seulement si  $b \in C(B; e)$ , et on dit que  $e$  est intérieurement actif (resp. extérieurement actif) si il est le plus petit élément de  $C^*(B; e)$  (resp.  $C(B; e)$ ). On note  $Int(G)$  (resp.  $Ext(G)$ ) l’ensemble des éléments intérieurement actifs (resp. extérieurement actifs) de  $G$ . Evidemment, par définitions, pour une base  $B$  d’un matroïde  $M$  on a  $Int_M(B) = Int(\mathcal{G}_M(B))$  et  $Ext_M(B) = Ext(\mathcal{G}_M(B))$ .

Pour  $A \subseteq E$ , on note  $(G - A, B \setminus A)$ , abrégé en  $G - A$ , le graphe obtenu en supprimant de  $G$  les sommets de  $A$  et leurs arêtes incidentes.

Pour  $b \in B$ , soit

$$C^*(B; b)^< = \{e \in C^*(B; b) \mid e < b\}$$

Pour  $X \subseteq E$  soit

$$A_G(X) = X \cup \left( \bigcup_{b \in X \cap B} C^*(B; b) \right) \cup \{b \in B \mid \emptyset \subset C^*(B; b)^< \subseteq X\}$$

et enfin soit

$$\hat{A}_G = \cup_{i \geq 1} A_G^i$$

qui pourra être abrégé en  $\hat{A}$  et qui s’appliquera en pratique à un ensemble d’éléments intérieurement actifs de  $\mathcal{G}$ .

*Remarque.* Les parties  $B$  et  $E \setminus B$  jouent un rôle symétrique, de même que ‘intérieurement’ et ‘extérieurement’, et que ‘ $C^*(...)$ ’ et ‘ $C(...)$ ’.

**Propriétés 2.1.2.** (construction de  $\hat{A}$ )

Avec les notations ci-dessus et  $X$  un ensemble d'éléments intérieurement actifs.

(i)  $\hat{A}(X)$  est la plus petite partie de  $E$  vérifiant pour tout  $b \in B$

$$b \in X \Rightarrow C^*(B; b) \subseteq \hat{A}(X)$$

$$\emptyset \subset C^*(B; b)^< \subseteq \hat{A}(X) \Rightarrow C^*(B; b) \subseteq \hat{A}(X)$$

(ii)  $\hat{A}(X)$  est donné par l'algorithme (linéaire) suivant.

Au départ  $\hat{A}(X) = \emptyset$ .

Pour  $e$  parcourant l'ensemble totalement ordonné  $E$  en partant du plus petit élément faire :

si  $e \in X$  alors  $e \in \hat{A}(X)$  ;

si  $e \notin B$  et s'il existe  $c \in C(B; e)$ ,  $c < e$ , avec  $c \in \hat{A}(X)$  alors  $e \in \hat{A}(X)$  ;

si  $e \in B$  n'est pas intérieurement actif

et si tout  $c \in C^*(B; e)$ ,  $c < e$ , vérifie  $c \in \hat{A}(X)$  alors  $e \in \hat{A}(X)$ .

(iii) Pour tout  $x \in X$

$$\hat{A}_G(X) = \hat{A}_{G-\hat{A}_G(X \setminus x)}(x) \cup \hat{A}_G(X \setminus x)$$

Ces propriétés sont surtout utiles pour la construction effective des décompositions. L'algorithme (ii) permet de calculer  $\hat{A}$  en parcourant une seule fois l'ensemble  $E$ . La partie (iii) signifie que l'on peut calculer l'image par  $\hat{A}$  d'un ensemble d'éléments intérieurement actifs de  $B$  en considérant ces éléments un par un (dans n'importe quel ordre) et en supprimant à chaque fois de  $G$  l'image par  $\hat{A}$  de l'élément considéré : pour  $X \subseteq \text{Int}(G)$ ,  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ ,

$$\begin{aligned} \hat{A}_G(X) &= (\hat{A}_G(x_1 \dots x_k) \setminus \hat{A}_G(x_1 \dots x_{k-1})) \uplus \dots \uplus (\hat{A}_G(x_1 x_2) \setminus \hat{A}_G(x_1)) \uplus \hat{A}_G(x_1) \\ &= \hat{A}_{G-\hat{A}_G(x_1 \dots x_{k-1})}(x_k) \uplus \dots \uplus \hat{A}_{G-\hat{A}_G(x_1)}(x_2) \uplus \hat{A}_G(x_1) \end{aligned}$$

*Preuve.* (i) est une reformulation directe de la définition.

Pour (ii), d'abord,  $b \in B$  appartient à  $A^i(X)$  par définition si et seulement si  $b \in X$  ou  $C^*(B; b)^< \subseteq A^i(X)$ , donc  $b \in B$  appartient à  $\hat{A}(X)$  par définition si et seulement si  $b \in X$  ou  $C^*(B; b)^< \subseteq \hat{A}(X)$ . D'autre part soit  $e \notin B$ . Si  $e \in A(X)$  alors  $e \in C^*(B; b)$  pour  $b \in X$  qui est intérieurement actif donc  $b < e$ . Si  $e \in \hat{A}(X) \setminus A(X)$  alors soit  $i$  le plus petit possible tel que  $e \in A^i(X) \setminus A^{i-1}(X)$ . On a alors  $e \in C^*(B; b)$  pour  $b \in A^{i-1}(X)$ , et  $b < e$  sinon  $e \in A^{i-1}(X)$ . Donc  $e \notin B$  appartient à  $\hat{A}(X)$  si et seulement si il appartient à  $C^*(B; b)$  pour  $b \in \hat{A}(X)$  avec  $b < e$ , c'est-à-dire si et seulement si il existe  $b \in C(B; e) \cap \hat{A}(X)$ ,  $b < e$ . Les conditions précédentes font que l'appartenance ou non d'un élément à  $\hat{A}(X)$  ne dépend que de l'appartenance ou non à  $\hat{A}(X)$  d'éléments strictement inférieurs, d'où cet algorithme linéaire.

On montre (iii) par récurrence : avec  $E = e_1 < \dots < e_n$  on suppose que  $\hat{A}_G(X) \cap \{e_1, \dots, e_{k-1}\} = (\hat{A}_{G-\hat{A}_G(X \setminus x)}(x) \cup \hat{A}_G(X \setminus x)) \cap \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$  pour  $k > 0$  et on veut montrer  $\hat{A}_G(X) \cap \{e_1, \dots, e_k\} = (\hat{A}_{G-\hat{A}_G(X \setminus x)}(x) \cup \hat{A}_G(X \setminus x)) \cap \{e_1, \dots, e_k\}$ . Par l'algorithme (ii) on sait immédiatement que  $\text{Int}(G) \cap \hat{A}_G(X) = X$ . Puisque  $x \in \text{Int}(G)$ , on a donc  $x \notin \hat{A} - G(X \setminus x)$ , d'où  $x = \min(C^*(B; x) \setminus \hat{A}_G(X \setminus x))$  et  $x \in \text{Int}(G - \hat{A}_G(X \setminus x))$ .

Si  $e_k \in \hat{A}_G(X) \setminus \hat{A}_G(X \setminus x)$  et  $e \in B$  alors on a soit  $e = x$  et alors  $e \in \hat{A}_{G-\hat{A}_G(X \setminus x)}(x)$ , soit  $\emptyset \subset C^*(B; e_k)^< \setminus \hat{A}_G(X \setminus x)$  (sinon  $e_k \in \hat{A}(X \setminus x)$  par définition) et  $C^*(B; e_k)^< \setminus \hat{A}_G(X \setminus x) \subseteq \hat{A}_G(X) \setminus \hat{A}_G(X \setminus x)$  (sinon  $e_k \notin \hat{A}(X)$ ), donc  $\emptyset \subset C^*(B; e_k)^< \setminus \hat{A}_G(X \setminus x)$  (sinon  $e_k \in \hat{A}_G(X \setminus x)$  par définition) et  $C^*(B; e_k)^< \setminus \hat{A}_G(X \setminus x) \subseteq \hat{A}_{G-\hat{A}_G(X \setminus x)}(x)$  par hypothèse de récurrence, et  $e_k \in \hat{A}_{G-\hat{A}_G(X \setminus x)}(x)$  par définition.

Si  $e_k \in \hat{A}_G(X) \setminus \hat{A}_G(X \setminus x)$  et  $e_k \notin B$  alors, par l'algorithme (ii), il existe  $c < e_k$  dans  $C(B; e_k)$  avec  $c \in \hat{A}_G(X)$  et  $c \notin \hat{A}(\setminus x)$  (sinon  $e_k \in \hat{A}_G(X \setminus x)$ ). Donc  $c \in \hat{A}_{G-\hat{A}_G(X \setminus x)}(x)$  par hypothèse de récurrence, et  $e_k \in \hat{A}_{G-\hat{A}_G(X \setminus x)}(x)$  par l'algorithme (ii) dans  $G - \hat{A}_G(X \setminus x)$ .

Si  $e_k \notin \hat{A}_G(X)$  alors  $e_k \notin \hat{A}_G(X \setminus x)$  ( $\hat{A}$  est évidemment croissant). Dans ce cas si  $e \in B$  alors il existe  $c \in C^*(B; e_k)^<$  avec  $c \notin \hat{A}_G(X)$ , donc  $c \in C^*(B; e_k)^< \setminus \hat{A}_G(X \setminus x)$  et  $c \notin \hat{A}_{G-\hat{A}_G(X \setminus x)}(x)$  (par hypothèse de récurrence), donc  $e \notin \hat{A}_{G-\hat{A}_G(X \setminus x)}(x)$  (par définition). Et si  $e \notin B$  alors il n'existe pas  $c < e$  dans  $C(B; e)$  avec  $c \in \hat{A}_G(X)$ , donc il n'existe pas  $c < e$  dans  $C(B; e) \setminus \hat{A}_G(X \setminus x)$  avec  $c \in \hat{A}_{G-\hat{A}_G(X \setminus x)}(x)$  (par hypothèse de récurrence), donc  $e \notin \hat{A}_{G-\hat{A}_G(X \setminus x)}(x)$  (par l'algorithme (ii) dans  $\hat{A}_{G-\hat{A}_G(X \setminus x)}(x)$ ).  $\square$

**Lemme 2.1.3.** (décomposition des 'activités' d'un graphe biparti)

Avec les notations ci-dessus, soit  $X \subseteq \text{Int}(G)$ .

La partie  $\hat{A}(X)$  est l'unique partie  $A$  de  $E$  vérifiant les propriétés suivantes:

- (i)  $C(B; e) \subseteq E \setminus A$  pour tout  $e \notin A$ ,  $e \notin B$ ,
- (ii)  $\text{Int}(G - A) = \text{Int}(G) \setminus X$ ,
- (iii)  $\text{Ext}(G - A) = \text{Ext}(G)$ ,
- (iv)  $\text{Int}(G - E \setminus A) = X$ ,
- (v)  $\text{Ext}(G - E \setminus A) = \emptyset$ .

*Preuve.* On montre d'abord que  $\hat{A}(X)$  (abrégé ici en  $\hat{A}$ ) satisfait ces propriétés.

(i) Soit  $e \notin \hat{A} \cup B$  et  $b \in B \cap C^*(B; e)$  (s'il existe), si  $b \in \hat{A}$  alors  $C^*(B; b) \subseteq \hat{A}$  par définition, donc  $e \in \hat{A}$  qui est contradictoire.

(ii) Pour  $b \notin \hat{A}$ , si  $b = \min(C^*(B; b) \setminus \hat{A})$  alors  $C^*(B; b)^< \subseteq \hat{A}$ , donc  $C^*(B; b) = \emptyset$  sinon  $b \in \hat{A}$  par définition de  $\hat{A}$ . Réciproquement si  $b \notin X$  et  $b = \min(C^*(B; b))$  alors  $b \notin \hat{A}$  et  $b = \min(C^*(B; b) \setminus \hat{A})$  donc  $b \in \text{Int}(G - \hat{A})$ .

(iii) Pour  $e \notin \hat{A}$ , si  $e = \min(C(B; e) \setminus \hat{A})$  alors il n'existe pas  $c \in C(B; e) \cap \hat{A}$ ,  $c < e$ , sinon  $e \in \hat{A}$  (algorithme (ii) de la propriété 2.1.2), donc  $e = \min C(B; e)$ . Réciproquement si  $e = \min C(B; e)$  alors  $e \notin \hat{A}$  (algorithme 2.1.2 (ii)) donc



$e = \min C(B; e) \setminus \hat{A}$ , c'est-à-dire  $e \in \text{Ext}(G - \hat{A})$ .

(iv) Si  $b \in X$  alors  $b$  est par hypothèse intérieurement actif dans  $G$  et  $b \in \hat{A}$ , donc  $b = \min C^*(B; b) = \min(C^*(B; b) \cap \hat{A})$  donc  $b \in \text{Int}(G - E \setminus \hat{A})$ . Réciproquement si  $b \in \text{Int}(G - E \setminus \hat{A})$  alors  $b = \min(C^*(B; b) \cap \hat{A})$ , ce qui n'est possible par l'algorithme 2.1.2 (ii) que si  $b \in X$ .

(v) Enfin  $e \in \hat{A}$  implique l'existence de  $c < e$  dans  $C(B; e)$  par l'algorithme 2.1.2 (ii) donc  $e = \min(C(B; e) \cap \hat{A})$  est impossible.

Soit  $A \subseteq E$  vérifiant ces propriétés. On montre que  $A$  satisfait la définition de  $\hat{A}(X)$  de la propriété 2.1.2 (i).

La propriété (iv) implique  $X \subseteq A$ . La propriété (i) pour tout  $e \notin B$ ,  $e \notin A \Rightarrow C(B; e) \subseteq E \setminus A$  s'écrit en passant à la contre apposée  $C(B; e) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow e \in A$ , c'est-à-dire si  $e \in C^*(B; b)$  pour  $b \in A$  alors  $e \in A$ , c'est-à-dire pour tout  $b \in B$ ,  $b \in A \Rightarrow C^*(B; b) \subseteq A$ . Si il existe  $b \in B$  tel que  $\emptyset \subset C^*(B; e)^< \subseteq A$  et  $b \notin A$ , alors  $b = \min C^*(B; b) \setminus A$  donc  $b \in \text{Int}(G - A) \setminus \text{Int}(G)$  ce qui contredit la propriété (ii). Ainsi  $\hat{A}(X) \subseteq A$  par la propriété 2.1.2 (i).

On suppose qu'il existe  $e \in A \setminus \hat{A}(X)$ . Si  $e \in B$  alors  $C^*(B; e) \subseteq A$ . On a alors soit  $e = \min C^*(B; e)$  mais alors  $e \in \text{Int}(G - E \setminus A) \setminus X$  ce qui contredit la propriété (iv), soit il existe  $f < e$  dans  $C^*(B; e) \setminus \hat{A}(X)$  (sinon  $e \in \hat{A}(X)$  par définition) donc  $f \in A \setminus \hat{A}(X)$ . D'autre part si  $e \notin B$  alors d'après la propriété (v) il existe  $f < e$  dans  $C(B; e) \cap A$  (sinon  $e$  est extérieurement actif dans  $G - E \setminus A$ ). Or d'après la propriété (i) pour  $\hat{A}(X)$  on a aussi  $C(B; e) \subseteq E \setminus \hat{A}(X)$ , donc  $f \in A \setminus \hat{A}(X)$ .

Dans tous les cas l'existence de  $e$  dans  $A \setminus \hat{A}(X)$  implique l'existence de  $f < e$  dans  $A \setminus \hat{A}(X)$ , ce qui est impossible.  $\square$

**Propriété 2.1.4.** (reformulation de la propriété 0.1)

Soit  $B$  une base de  $M$ .

Si  $b \in B$  alors

$$\mathcal{G}_M(B) - b = \mathcal{G}_{M/b}(B - b)$$

Si  $e \notin B$  alors

$$\mathcal{G}_M(B) - e = \mathcal{G}_{M \setminus e}(B)$$

$\square$

**Propriété 2.1.5.**

Soit une base  $B$  de  $M$  et un fermé  $F$  de  $M$ .

Si  $B \cap F$  est une base de  $M(F)$  alors  $B \setminus F$  est une base de  $M/F$ , et

$$\mathcal{G}_M(B) - F = \mathcal{G}_{M/F}(B \setminus F)$$

$$\mathcal{G}_M(B) - (E \setminus F) = \mathcal{G}_{M(F)}(B \cap F)$$

*Preuve.* Dans  $M/(F \cap B)$ ,  $B$  étant une base de  $M(F)$ , les éléments de  $F \setminus B$  sont des boucles. Donc  $B \setminus F$  est un indépendant maximal de  $M/F$ , c'est-à-dire une base

de  $M/F$ . Il revient au même de supprimer ou de contracter des boucles. Avec la propriété 2.1.4 (et la propriété  $M/A \setminus A' = M \setminus A'/A$  pour tout  $A, A' \subseteq E$ ), on en déduit  $\mathcal{G}_M(B) - F = \mathcal{G}_{M/F}(B \setminus F)$ .

Si on supprime dans  $M$  les éléments de  $(E \setminus F) \setminus B$ , les éléments de  $(E \setminus F) \cap B$  deviennent des isthmes et on conclut pareillement.  $\square$

Cette dernière propriété sera très souvent utilisée techniquement, sans qu'il y soit fait forcément référence, pour relier les cocircuits et circuits fondamentaux d'une base dans  $M$  et de la base induite dans le mineur  $M(F)$  ou  $M/F$ .

**Lemme 2.1.6.** (lemme de décomposition)

*Soit  $M$  un matroïde ordonné. Soit  $B$  une base de  $M$  et  $X \subseteq \text{Int}_M(B)$ .*

*La partie  $E \setminus \hat{A}_{\mathcal{G}_B^M}(X) = F$  est l'unique fermé de  $M$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- (i)  $B \cap F$  est une base de  $M(F)$ ,
- (ii)  $\text{Int}_{M(F)}(B \cap F) = \text{Int}_M(B) \setminus X$ ,
- (iii)  $\text{Ext}_{M(F)}(B \cap F) = \text{Ext}_M(B)$ ,
- (iv)  $\text{Int}_{M/F}(B \setminus F) = X$ ,
- (v)  $\text{Ext}_{M/F}(B \setminus F) = \emptyset$ .

*Preuve.*

Ce lemme est essentiellement une reformulation du lemme de 'décomposition des activités d'un graphe biparti' 2.1.3 en langage des matroïdes, via la propriété 2.1.5.

Un fermé  $F$  vérifie la propriété (i) si et seulement si pour tout  $e \in F \setminus B$  on a  $C(B; e) \subseteq F$ , qui est la propriété (i) du lemme 2.1.3 avec  $A = E \setminus F$  et  $G = \mathcal{G}_M(B)$ . Avec la propriété 2.1.5 qui suppose que  $F$  vérifie la propriété (i), les propriétés (i), (ii), (iii), (iv), et (v) sont donc équivalentes aux propriétés (i), (ii), (iii), (iv), et (v) du lemme 2.1.3 avec  $A = E \setminus F$  et  $G = \mathcal{G}_M(B)$ . Donc  $F = E \setminus \hat{A}(X)$  est nécessaire pour vérifier ces propriétés. Réciproquement  $\hat{A}(X) = \cup_{b \in \hat{A}(X)} C^*(B; b)$  (conséquence immédiate de la définition) donc  $E \setminus \hat{A}(X)$  est bien un fermé de  $M$  (union de cocircuits) et  $F = E \setminus \hat{A}(X)$  est suffisant.  $\square$

**Proposition 2.1.7.** (décomposition en éléments internes et externes [EtLV 98])

*Soit  $M$  un matroïde ordonné sur  $E$  et  $B$  une base de  $M$ .*

*Il existe un unique fermé cyclique  $F_c$  tel que  $B \cap F_c$  est une base externe de  $M(F_c)$  et  $B \setminus F_c$  est une base interne de  $M/F_c$  :*

$$F_c = E \setminus \hat{A}_{\mathcal{G}_M(B)}(\text{Int}_M(B))$$

*De plus, on a*

$$\text{Ext}_M(B) = \text{Ext}_{M(F_c)}(B \cap F_c)$$

*et*

$$\text{Int}_M(B) = \text{Int}_{M/F_c}(B \setminus F_c)$$

L'ensemble  $F_c$  est alors appelé ensemble des éléments *externes* par rapport à  $B$ , et  $E \setminus F_c$  ensemble des éléments *internes* par rapport à  $B$ .

*Preuve.* En appliquant le lemme de décomposition 2.1.6 avec  $X = \text{Int}(B)$ , il vient pour unique fermé satisfaisant les propriétés voulues  $F_c = E \setminus \hat{A}_{\mathcal{G}_M(B)}(\text{Int}_M(B))$ . En outre  $F_c$  est un fermé cyclique car si  $M(F_c)$  possédait un isthme alors cet isthme est intérieurement actif dans  $B \cap F_c$  dans  $M(F_c)$ , ce qui contredirait que cette base soit externe.  $\square$

*Remarques.*

- Cette décomposition est invariante par passage au dual à permutation près de  $F_c$  et  $E \setminus F_c$  et peut se calculer dans  $M^*$  :

$$F_c = \hat{A}_{\mathcal{G}_{M^*}(E \setminus B)}(Ext_M(B))$$

- Cette décomposition ne dépend que du graphe fondamental, c'est à dire des cocircuits (ou des circuits) fondamentaux de  $B$ , mais pas de tout le matroïde.

- La décomposition interne|externe est donnée aussi par l'algorithme suivant (il se déduit immédiatement de l'algorithme de décomposition par récurrence que l'on verra plus loin, conséquence de la propriété 2.1.2 (i)) :

Soit  $B$  une base.

Pour  $e$  parcourant  $E$  en partant du plus petit élément faire

pour  $e \in B$  : si il existe  $c < e$  externe dans  $C^*(B; e)$  alors  $e$  est externe  
sinon  $e$  est interne

pour  $e \notin B$  : s'il existe  $c < e$  interne dans  $C(B; e)$  alors  $e$  est interne,  
sinon  $e$  est externe

**Théorème 2.1.8.** ([EtLV 98])

Soit  $M$  un matroïde sur un ensemble totalement ordonné ayant pour ensemble de bases  $\mathcal{B}$ .

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\substack{F_c \text{ fermé} \\ \text{cyclique de } M}} \{B^* + B \mid B^* \text{ base externe de } M(F_c), B \text{ base interne de } M/F_c\}$$

*Preuve.* Avec la proposition précédente 2.1.7 associant à toute base un fermé cyclique, il suffit de vérifier réciproquement que : si  $F$  est un fermé cyclique alors il existe une base externe de  $M(F)$  (c'est vrai puisque la base maximale est externe car il n'y a pas d'isthme dans  $M(F)$ ) et dualement il existe une base interne de  $M/F$  ; si  $B^*$  est une base de  $M(F_c)$  et  $B$  une base de  $M/F_c$  alors  $B^* \cup B$  est une base de  $M$  (c'est vrai car  $F_c$  est un fermé) dont la décomposition en bases internes et externes redonne  $B^* \cup B$  (c'est vrai par unicité dans la proposition 2.1.7).  $\square$

**Proposition 2.1.9.** (décomposition d'une base interne en activités (1, 0))

Soit  $M$  un matroïde ordonné sur  $E$  et soit  $B$  une base interne de  $M$  avec  $\text{Int}(B) = a_1 < \dots < a_\iota$ .

Il existe une unique suite de fermés

$$\emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{\iota-1} \subset F_\iota = E$$

telle que pour tout  $k$ ,  $1 \leq k \leq \iota$ ,

$$B_k = B \cap (F_k \setminus F_{k-1})$$

soit une base interne de  $M(F_k)/F_{k-1}$  ayant un seul élément intérieurement actif  $a_k$ .

Elle est définie, pour  $1 \geq k \geq \iota$ , par

$$F_k = E \setminus \hat{A}_{\mathcal{G}_M(B)}(\{a_{k+1}, \dots, a_\iota\})$$

ou par

$$F_{k-1} = F_k \setminus \hat{A}_{\mathcal{G}_{M(F_k)}(B \cap F_k)}(a_k)$$

Ainsi

$$\text{Int}(B) = \uplus_{1 \leq k \leq \iota} \text{Int}(B_k)$$

*Preuve.* On montre cette proposition par récurrence sur  $\iota$ , elle est évidente pour  $\iota = 1$ . D'après le lemme de décomposition 2.1.6 appliqué avec  $X = a_\iota$ ,  $F_{\iota-1} = E \setminus \hat{A}_{\mathcal{G}_M(B)}(a_\iota)$  est l'unique fermé tel que  $a_\iota \notin F_{\iota-1}$ ,  $B \setminus F_{\iota-1}$  est une base interne de  $M/F_{\iota-1}$  ayant pour seul élément intérieurement actif  $a_\iota$ , et  $B \cap F_{\iota-1}$  est une base de  $M(F_{\iota-1})$  ayant pour éléments intérieurement actifs  $a_1 < \dots < a_{\iota-1}$ . Soit  $\emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{\iota-1}$  l'unique suite de fermés de  $M(F_{\iota-1})$  définie par hypothèse de récurrence pour la base  $B \cap F_{\iota-1}$ . La suite  $\emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{\iota-1} \subset F_\iota = E$  de fermés de  $M$  vérifie alors les propriétés voulues et est déterminée de façon unique.

Elle est donc définie par récurrence, pour  $1 \geq k \geq \iota$ , par  $F_k \setminus F_{k-1} = \hat{A}_{\mathcal{G}_{M(F_k)}(B \cap F_k)}(a_k)$ , c'est-à-dire d'après le lemme 2.1.5 (iii) (propriétés constructives de  $\hat{A}$ ) par  $F_k = E \setminus \hat{A}_{\mathcal{G}_M(B)}(\{a_{k+1}, \dots, a_\iota\})$ , pour  $1 \geq k \geq \iota$ .

La suite de fermés peut-être calculée soit directement dans  $M$  comme dans la première formule de l'énoncé, soit dans les mineurs considérés successivement, pour  $1 \geq k \geq \iota$  :  $F_k \setminus F_{k-1} = \hat{A}_{\mathcal{G}_{M(F_k)}(B \cap F_k)}(a_k)$  (propriété 2.1.2 (iii)).  $\square$

*Remarque.* En passant au dual on définit la décomposition d'une base externe en bases d'activité (0, 1).

**Théorème 2.1.10.**

Soit  $M$  un matroïde ordonné sur  $E$ , et  $\mathcal{BI}$  l'ensemble des bases internes de  $M$ .

$$\mathcal{BI} = \biguplus_{\substack{\emptyset = F_c = F_0 \subset \dots \subset F_\iota = E \\ \text{décomposante avec } F_c = \emptyset}} \left\{ B_1 + \dots + B_\iota \mid \right.$$

$$B_k \text{ base d'activités } (1, 0) \text{ de } M(F_k)/F_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq \iota, \quad \Big\}$$

*Preuve.* Etant donnée une base  $B$ , la suite  $\emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{\iota-1} \subset F_{\iota} = E$  de la proposition 2.1.9 est par définition l'unique suite de fermés pour laquelle  $B = B_1 + \dots + B_{\iota}$  avec  $B_k$  base d'activités  $(1, 0)$  de  $M(F_k)/F_{k-1}$ ,  $1 \leq k \leq \iota$ . Puisqu'un matroïde est connexe si et seulement si il existe une base interne d'activité 1 (proposition ) et que la suite des  $\min(F_k \setminus F_{k-1})$ ,  $1 \leq k \leq \iota$ , est croissante, cette suite de parties est une suite décomposante ayant pour fermé cyclique  $F_c = \emptyset$  ( $\emptyset$  est un fermé cyclique car une boucle serait extérieurement active dans toute les bases et on aurait  $\mathcal{BI} = \emptyset$ ).

Réciproquement étant donnée une suite de fermés décomposante ayant pour fermé cyclique  $F_c = \emptyset$ , la connexité de chaque mineur considéré assure l'existence d'une base interne d'activité 1 de ce mineur, l'union de ces bases est bien une base  $B$  car les parties sont des fermés. Cette base est interne, sinon il existe  $e \notin B$  avec  $e = \min C_M(B; e)$  et  $e \in F_k \setminus F_{k-1}$ ,  $1 \leq k \leq \iota$ , donc  $e = \min(C_M(B; e) \cap F_k \setminus F_{k-1})$ , c'est-à-dire  $e = \min(C_{M(F_k)/F_{k-1}}(B_k; e))$  (cf. propriété 2.1.5) ce qui contredit  $B_k$  interne. D'autre part les  $a_k = \min(F_k \setminus F_{k-1})$ ,  $1 \leq k \leq \iota$ , sont intérieurement actifs dans cette base, car  $a_k = \min(C^*(B; a_k) \cap F_k)$  (cf. propriété 2.1.5) donc  $a_k = \min(C^*(B; a_k))$  (par définition d'une suite décomposante  $a_k < a_{k+1} = \min(E \setminus F_k)$ ). Et enfin si  $b$  est intérieurement actif dans  $B$  et  $b \in F_k \setminus F_{k-1}$ , alors  $b = \min(C^*(B; b)) = \min(C^*(B; b) \cap F_k)$  et  $b$  est intérieurement actif dans  $B_k$  dans  $M(F_k)/F_{k-1}$ . Donc  $B$  satisfait les hypothèses de la proposition 2.1.9 et est associée à cette suite décomposante par unicité.  $\square$

Dès que le matroïde  $M$  a une boucle, le théorème précédent n'apporte plus rien : il n'existe pas de base interne puisqu'une boucle est toujours extérieurement active, et il n'y a pas de suite de fermés décomposante puisque  $\emptyset$  n'est pas un fermé. Dans ce cas, il faut se ramener à  $M/F$  où  $F$  est le fermé cyclique  $cl(\emptyset)$ , ensemble des boucles de  $M$ . En fait, pour avoir un résultat de décomposition des bases en toute généralité, il faut combiner les théorèmes 2.1.10 et 2.1.8 et on obtient finalement le théorème 2.1.1 annoncé au début de la partie.

**Proposition 2.1.11.** (décomposition d'une base en activités  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ )

Soit  $M$  un matroïde ordonné sur  $E$ . Soit  $B$  une base de  $M$  avec  $\text{Int}(B) = a_1 < \dots < a_{\iota}$  et  $\text{Ext}(B) = a_1^* < \dots < a_{\varepsilon}^*$ .

Il existe une unique suite décomposante

$$\emptyset = F_{\varepsilon}^* \subset \dots \subset F_0^* = F_c = F_0 \subset \dots \subset F_{\iota} = E$$

telle que pour tout  $k$ ,  $1 \leq k \leq \iota$ ,

$$B_k = B \cap (F_k \setminus F_{k-1})$$

soit une base d'activités  $(1, 0)$  de  $M(F_k)/F_{k-1}$  et pour tout  $k$ ,  $1 \leq k \leq \varepsilon$

$$B_k^* = B \cap (F_{k-1}^* \setminus F_k^*)$$

soit une base d'activités  $(0, 1)$  de  $M(F_{k-1}^*)/F_k^*$ .

Elle est définie par :

$F_c$  est l'unique fermé cyclique associé à  $B$  par la proposition 2.1.7,

$\emptyset = F_0 \setminus F_c \subset \dots \subset F_\iota \setminus F_c = E \setminus F_c$  est l'unique suite de fermés associée à  $B \setminus F_c$  dans  $M/F_c$  par la proposition 2.1.9,

$\emptyset = F_c \setminus F_0^* \subset \dots \subset F_c \setminus F_\varepsilon^* = F_c$  est l'unique suite de fermés associée à  $(E \setminus B) \cap F_c$  dans  $(M(F_c))^* = M^*/(E \setminus F_c)$  par la proposition 2.1.9.

Ainsi

$$Int(B) = \cup_{1 \leq k \leq \iota} min(F_k \setminus F_{k-1}) = \cup_{1 \leq k \leq \iota} Int(B_k)$$

$$Ext(B) = \cup_{1 \leq k \leq \varepsilon} min(F_{k-1}^* \setminus F_k^*) = \cup_{1 \leq k \leq \varepsilon} Ext(B_k^*)$$

*Preuve.* Cette proposition combine les propositions 2.1.7 et 2.1.9 (via la propriété 4.0). La nouveauté est la prise en compte de l'activité externe et le détail des calculs pour la décomposition d'une base externe en bases d'activités  $(0, 1)$ , obtenue par dualité à partir de la proposition 2.1.9.

La proposition 2.1.7 appliquée à la base  $B$  de  $M$  ou la base  $E \setminus B$  de  $M^*$  définit le fermé cyclique  $F_c$  comme écrit dans l'énoncé. Par ailleurs la proposition 2.1.9 appliquée à la base interne  $B \setminus F_c$  de  $M/F_c$  définit la suite  $F_c = F_0 \subset \dots \subset F_\iota = E$  par  $F_k \setminus F_{k-1} = \hat{A}_{\mathcal{G}_M(F_k)(B \cap F_k)}(a_k)$  pour  $1 \leq k \leq \iota$ . D'après les propriétés constructives de  $\hat{A}$  de la propriété 2.1.2 (iii) (qui ne suppose pas le graphe biparti fondamental sans élément extérieurement actif), cette définition s'écrit aussi  $F_k \setminus F_{k-1} = \hat{A}_{\mathcal{G}_M(B)}(\{a_k, \dots, a_\iota\}) \setminus \hat{A}_{\mathcal{G}_M(B)}(\{a_{k+1}, \dots, a_\iota\})$ .

Dans le matroïde  $(M(F_c))^* = M^*/(E \setminus F_c)$ , la suite de fermés associée à la base interne  $(E \setminus B) \cap F_c$  par cette proposition est  $\emptyset = F_c \setminus F_0^* \subset F_c \setminus F_1^* \subset \dots \subset F_c \setminus F_\varepsilon^* = F_c$ . Elle est donc définie, pour  $1 \geq k \geq \varepsilon$ , par  $(F_c \setminus F_k^*) \setminus (F_c \setminus F_{k-1}^*) = F_{k-1}^* \setminus F_k^* = \hat{A}_{\mathcal{G}_{M^*(E \setminus F_{k-1}^*)}(F_k^* \cap (E \setminus B))}(a_k^*)$ . A nouveau d'après la propriété 2.1.2 (iii), appliqué cette fois à  $\mathcal{G}_{M^*(E \setminus B)}$ , ceci s'écrit aussi  $F_{k-1}^* \setminus F_k^* = \hat{A}_{\mathcal{G}_{M^*(E \setminus B)}}(\{a_k^*, \dots, a_\varepsilon^*\}) \setminus \hat{A}_{\mathcal{G}_{M^*(E \setminus B)}}(\{a_{k+1}^*, \dots, a_\varepsilon^*\})$ . La suite de fermés de  $(M(F_c))^*$  ci-dessus est une suite décomposante de ce matroïde, en particulier la suite des plus petits éléments des différences successives est croissante. La suite  $\emptyset = F_\varepsilon^* \subset \dots \subset F_0^* = F_c$  est donc une suite de complémentaires de fermés de  $M^*$  dont la suite des plus petits éléments des différences successives est décroissante. Finalement la suite  $\emptyset = F_\varepsilon^* \subset \dots \subset F_0^* = F_c = F_0 \subset \dots \subset F_\iota = E$ , avec les définitions de l'énoncé, est donc bien une suite décomposante de  $M$  (propriété 4.0), qui a les propriétés voulues.

Réciproquement si une suite décomposante vérifie les propriétés de l'énoncé, alors les bases induites dans  $M(F_c)$  et  $M/F_c$  sont respectivement externes et internes, et satisfont les conditions de la proposition 2.1.7, de sorte que  $F_c$  doit être le fermé cyclique unique défini par cette proposition. Alors par unicité des suites décomposantes dans  $(M(F_c))^*$  et  $M/F_c$  satisfaisant les conditions de la proposition 2.1.9, on déduit que la suite décomposante de  $M$  définie ci-dessus est bien l'unique suite décomposante associée à  $B$ .  $\square$

*Preuve du théorème 2.1.1.*

Etant donnée une base  $B$ , la suite décomposante de la proposition 2.1.11 est l'unique suite décomposante qui induit une décomposition  $B = B_1 + \dots + B_\iota + B_1^* + \dots + B_\varepsilon^*$  ayant les propriétés voulues. Réciproquement étant donnée une suite de fermés décomposante ayant pour fermé cyclique  $F_c = \emptyset$ , la connexité de chaque mineur considéré assure l'existence d'une base interne d'activité 1 de ce mineur, l'union de ces bases est bien une base car les parties sont des fermés de  $M/F_c$  ou de  $(M(F_c))^*$ , les bases et les suites décomposantes induites dans ces deux mineurs satisfont les hypothèses de la proposition 2.1.11 d'après le théorème 2.1.10, et cette base est associée à cette suite par unicité dans la proposition 2.1.11.  $\square$

*Définitions.* La suite décomposante associée à une base  $B$  de  $M$ , est l'unique suite décomposante de  $M$  associée à  $B$  par la proposition 2.1.11.

Elle est définie par

$$F_c = E \setminus \hat{A}_{\mathcal{G}_M(B)}(Int_M(B)) = \hat{A}_{\mathcal{G}_{M^*}(E \setminus B)}(Ext_M(B))$$

pour  $1 \geq k \geq \iota$ ,

$$F_k \setminus F_{k-1} = \hat{A}_{\mathcal{G}_M(B)}(\{a_k, \dots, a_\iota\}) \setminus \hat{A}_{\mathcal{G}_M(B)}(\{a_{k+1}, \dots, a_\iota\}) = \hat{A}_{\mathcal{G}_{M(F_k)}(B \cap F_k)}(a_k)$$

pour  $1 \geq k \geq \varepsilon$ ,

$$F_{k-1}^* \setminus F_k^* = \hat{A}_{\mathcal{G}_{M^*}(E \setminus B)}(\{a_k^*, \dots, a_\varepsilon^*\}) \setminus \hat{A}_{\mathcal{G}_{M^*}(E \setminus B)}(\{a_{k+1}^*, \dots, a_\varepsilon^*\}) = \hat{A}_{\mathcal{G}_{M^*(E \setminus F_{k-1}^*)}(F_k^* \setminus B)}(a_k^*)$$

La *partition active* de  $E$  selon  $B$  est l'ensemble des différences successives de la suite décomposante associée à  $B$ . On la notera comme convenu comme une application  $\alpha_M$  qui à un élément  $e$  de  $E$  et une base  $B$  de  $M$  associe  $\alpha_M(B; e)$  (ou simplement  $\alpha(B; e)$  ou  $\alpha(e)$ ) le plus petit élément de sa partie (qui est actif dans  $B$  intérieurement ou extérieurement) dans la partition active de  $B$ .

Il faut remarquer que connaissant une base  $B$  et sa partition active (i. e. sa fonction  $\alpha$ ) on déduit la suite décomposante associée à  $B$  puisque  $F_c = \alpha^{-1}(Ext(B)) = \alpha^{-1}(\alpha(E) \setminus B)$  et  $E \setminus F_c = \alpha^{-1}(Int(B)) = \alpha^{-1}(\alpha(E) \cap B)$ .

Suivant ce théorème et la définition des suites décomposantes, on voit facilement que la partition active d'une base est invariante par passage au dual :

$$\alpha_{M^*}(E \setminus B; e) = \alpha_M(B; e)$$

pour tout  $e \in E$ .

*Exemples.*

- La suite décomposante associée à une base d'activités  $(1, 0)$  d'un matroïde connexe est

$$\emptyset = F_c = F_0 \subset F_1 = E$$

- La suite décomposante associée à une base d'activités  $(0, 1)$  d'un matroïde connexe est

$$\emptyset = F_1^* \subset F_0^* = F_c = E$$

- La suite décomposante associée à la base minimale (cf. proposition 0.5) d'un matroïde ayant pour ensemble de boucles  $l_1 < \dots < l_\epsilon$  est

$$\emptyset \subset l_\epsilon \subset l_\epsilon l_{\epsilon-1} \subset \dots \subset l_\epsilon \dots l_1 = cl(\emptyset) = F_c = F_0^{min} \subset F_1^{min} \subset \dots \subset F_r^{min} = E$$

- De manière générale une boucle ou un isthme est le seul élément de sa partie dans la partition active. Il se retrouve dans la suite décomposante à sa place suivant l'ordre de  $E$ .

- La Figure 2.2 représente les graphes fondamentaux de quatre bases de  $K_4$  et leur décomposition. Les traits gras représentent les relations d'appartenance aux cocircuits ou circuits fondamentaux qui interviennent dans le calcul de  $\hat{A}$ , ils relient entre eux les éléments d'une même partie de la partition active.

La base 256 est externe, son plus grand élément extérieurement actif est 3, auquel sont associés les éléments de  $C(256; 3) = 356$ . Aucun autre élément ne peut s'ajouter à  $\hat{A}(3) = 356$ , il reste un seul élément extérieurement actif 1 d'où la partition active  $124 + 356$ .

La base 126 est interne de plus grand élément intérieurement actif 2. En construisant  $\hat{A}(2)$  par étapes on a d'abord  $C^*(126; 2) = 2345 \subseteq \hat{A}(2)$ , puis  $\emptyset \subset C^*(126; 6)^< \subseteq \hat{A}(2)$  donc  $6 \in \hat{A}(2)$ , d'où finalement la partition active  $1 + 23456$ .

La base 146 illustre la décomposition interne/externe, qui peut-être calculée soit à partir de  $B$  soit à partir de  $E \setminus B$  (point de vue dual).

Enfin la base 135 en bas à droite est une base d'activités  $(1, 0)$  qui a donc pour partition active  $E$  et présente peu d'intérêt en ce qui concerne les décompositions des activités. Néanmoins la forme du graphe fondamental de ces bases sera essentielle dans le chapitre suivant.

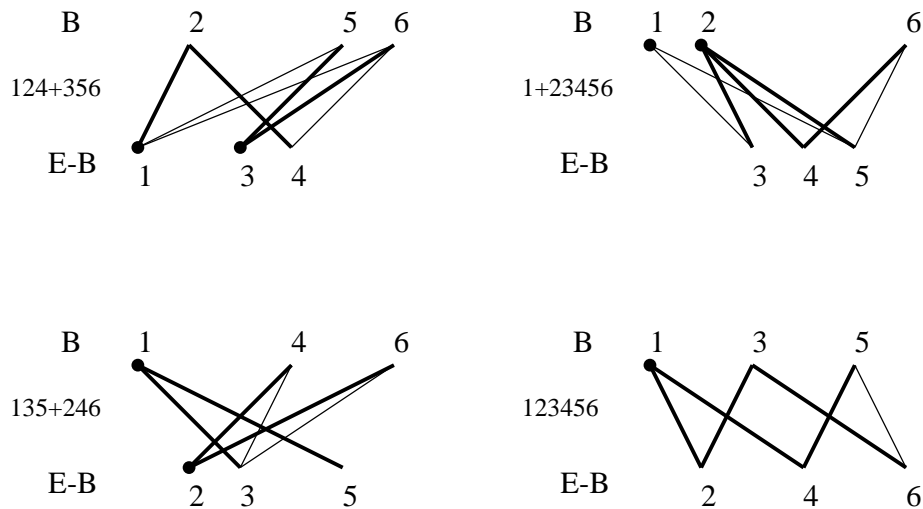


Figure 2.2 : décomposition du graphe fondamental de bases de  $K_4$



D'un point de vue algorithmique, la partition active d'une base peut être calculée en un seul parcours de  $E$ , ce qui est très pratique mais moins éclairant que les définitions précédentes d'un point de vue structural.

**Proposition 2.1.12.** (calcul de la partition active d'une base par récurrence)

*Soit  $B$  une base de  $M$  sur  $E = e_1 < \dots < e_n$ .*

*La partition active  $\alpha^{-1}$  de  $E$  selon  $B$  est construite par l'algorithme suivant :*

Pour  $k$  variant de 1 à  $n$  faire :

Si  $e_k \notin B$  alors :

si  $e_k$  est extérieurement actif, alors  $e_k$  externe et  $\alpha(e_k) := e_k$  ;

sinon

si il existe  $c < e_k$  interne dans  $C(B; e_k)$  alors

$e_k$  est interne

$\alpha(e_k) := \alpha(c)$  le plus grand possible

avec  $c < e_k$  interne dans  $C(B; e_k)$  ;

sinon

$e_k$  est externe

$\alpha(e_k) := \alpha(c)$  le plus petit possible avec  $c$  dans  $C(B; e_k)$ .

Si  $e_k \in B$  alors :

si  $e_k$  est intérieurement actif, alors  $e_k$  interne et  $\alpha(e_k) := e_k$  ;

sinon

si il existe  $c < e_k$  externe dans  $C^*(B; e_k)$  alors

$e_k$  est externe

$\alpha(e_k) := \alpha(c)$  le plus grand possible

avec  $c$  externe dans  $C^*(B; e_k)$  ;

sinon

$e_k$  est interne

$\alpha(e_k) := \alpha(c)$  le plus petit possible avec  $c$  dans  $C^*(B; e_k)$ .

*En ne tenant pas compte des lignes donnant une valeur à  $\alpha$ , on obtient (seulement) la décomposition en éléments internes et externes de  $B$ .*

*Preuve.* Cet algorithme vient immédiatement en utilisant systématiquement, dans  $M$  et  $M^*$ , l'algorithme (ii) de la propriété 2.1.2 pour calculer  $\hat{A}$  et la partition active. On passe les détails. □

**Corollaire 2.1.13.**

*Soit  $B$  une base du matroïde ordonné  $M$  sur  $E$  de plus grand élément  $\omega$ .*

*La partition active de  $B - \omega$  dans  $M/\omega$  si  $\omega \in B$ , ou de  $B$  dans  $M \setminus \omega$  si  $\omega \notin B$ , s'obtient simplement en supprimant  $\omega$  de sa partie dans la partition active de  $B$  dans  $M$ .* □

Pour terminer cette partie, de la décomposition interne|externe du théorème 2.1.8 on déduit immédiatement, comme dans [KoReSt 99] et pour reprendre la même expression, la ‘formule de convolution du polynôme de Tutte’.

**Corollaire 2.1.14.**

$$t(M; x, y) = \sum_{F \text{ fermé cyclique de } M} t(M/F; x, 0) t(M(F); 0, y)$$

□

Le théorème 2.1.1 permet de préciser cette formule et d’exprimer le polynôme de Tutte d’un matroïde avec l’invariant beta de ses mineurs.

**Corollaire 2.1.15.**

$$t(M; x, 0) = \sum_{\substack{\emptyset = F_c = F_0 \subset \dots \subset F_l = E \\ \text{décomposante avec } F_c = \emptyset}} \left( \prod_{1 \leq k \leq l} \beta(M(F_k)/F_{k-1}) \right) x^l$$

$$t(M; 0, y) = \sum_{\substack{\emptyset = F_\varepsilon^* \subset \dots \subset F_0^* = F_c = E \\ \text{décomposante avec } F_c = E}} \left( \prod_{1 \leq k \leq \varepsilon} \beta(M(F_{k-1}^*)/F_k^*) \right) y^\varepsilon$$

$$t(M; x, y) = \sum_{\substack{\emptyset = F_\varepsilon^* \subset \dots \subset F_0^* = F_c \\ F_c = F_0 \subset \dots \subset F_l = E \\ \text{décomposante}}} \left( \prod_{1 \leq k \leq l} \beta(M(F_k)/F_{k-1}) \right) \left( \prod_{1 \leq k \leq \varepsilon} \beta(M(F_{k-1}^*)/F_k^*) \right) x^l y^\varepsilon$$

□

## 2.2 Activités des réorientations

La première décomposition des réorientations d'un matroïde orienté que l'on définit dans cette partie revient à considérer chaque réorientation comme le 'produit' d'une réorientation acyclique d'un mineur du matroïde orienté et d'un mineur de son dual. Le raffinement est alors de considérer une réorientation acyclique comme une suite de réorientations d'activités  $(1, 0)$  de mineurs, définis par une suite décomposante associée à la réorientation de départ.

### Proposition 2.2.1.

*Soit  $M$  un matroïde orienté sur  $E$ . Soit  $F$  le fermé cyclique défini par*

$$F = \bigcup_{C \text{ circuit positif de } M} C = E \setminus \bigcup_{D \text{ cocircuit positif de } M} D$$

*Alors  $M/F$  est acyclique et  $M(F)$  est totalement cyclique. De plus  $F$  est la seule partie de  $E$  ayant ces deux propriétés.*

*Preuve.* On sait que dans un matroïde orienté, tout élément appartient à un circuit positif ou un cocircuit positif, mais pas les deux (propriété 0.7), donc  $F$  est bien défini. Pour tout  $A \subseteq E$ , les cocircuits de  $M/A$  sont les cocircuits de  $M$  contenus dans  $E \setminus A$ , donc tout élément de  $M/F$  appartient à un cocircuit positif de  $M/F$ . De même, les circuits de  $M(A)$  sont les circuits de  $M$  contenus dans  $A$ , donc tout élément de  $M(F)$  appartient à un circuit positif de  $M(F)$ .

Réciproquement, si  $M/A$  est acyclique, tous les éléments de  $M$  contenus dans  $E \setminus A$  appartiennent à un cocircuit positif, et si  $M(A)$  est totalement cyclique, tous les éléments de  $A$  appartiennent à un circuit positif, c'est donc que  $A = F$ .  $\square$

### Corollaire 2.2.2.

*Soit  $M$  un matroïde orienté sur  $E$ ,  $2^E$  désignant l'ensemble des parties de  $E$*

$$2^E = \bigcup_{\substack{F \text{ fermé} \\ \text{cyclique de } M}} \left\{ A + A^* \mid -_A M/F \text{ acyclique, } -_{A^*} M(F) \text{ totalement cyclique} \right\}$$

*Autrement dit,  $2^E$  désignant l'ensemble des parties signées de  $E$  de support  $E$  :*

$$2^E = \bigcup_{\substack{F \text{ fermé} \\ \text{cyclique de } M}} \left\{ C^* + C \mid C^* \text{ covecteur maximal de } M/F, \right. \\ \left. C \text{ vecteur maximal de } M(F) \right\}$$

*Preuve.* D'après la proposition précédente, pour  $\tilde{A} \subseteq E$ , il existe un unique  $F$  tel que le matroïde orienté  $(-\tilde{A}M)/F$  soit acyclique et  $(-\tilde{A}M)(F)$  soit totalement cyclique. Ainsi  $\tilde{A} = A + A^*$  avec  $A = \tilde{A} \setminus F$  et  $A^* = \tilde{A} \cap F$ . Réciproquement, si  $-_AM/F$  est acyclique et  $-_{A^*}M(F)$  est totalement cyclique, soit  $\tilde{A} = A + A^*$ , alors  $F$  est l'unique partie de  $E$  telle que  $(-\tilde{A}M)/F$  soit acyclique et  $(-\tilde{A}M)(F)$  soit totalement cyclique.

La reformulation en termes de parties signées de support  $E$  est immédiate : les covecteurs maximaux de  $M$  sont en bijection canonique avec les parties  $A$  telles que  $-_AM$  est acyclique (i. e.  $-_AM$  a un covecteur maximal positif) et de façon duale les vecteurs maximaux de  $M$  sont en bijection canonique avec les parties  $A$  telles que  $-_AM$  est totalement cyclique (i. e.  $-_AM$  a un vecteur maximal positif).  $\square$

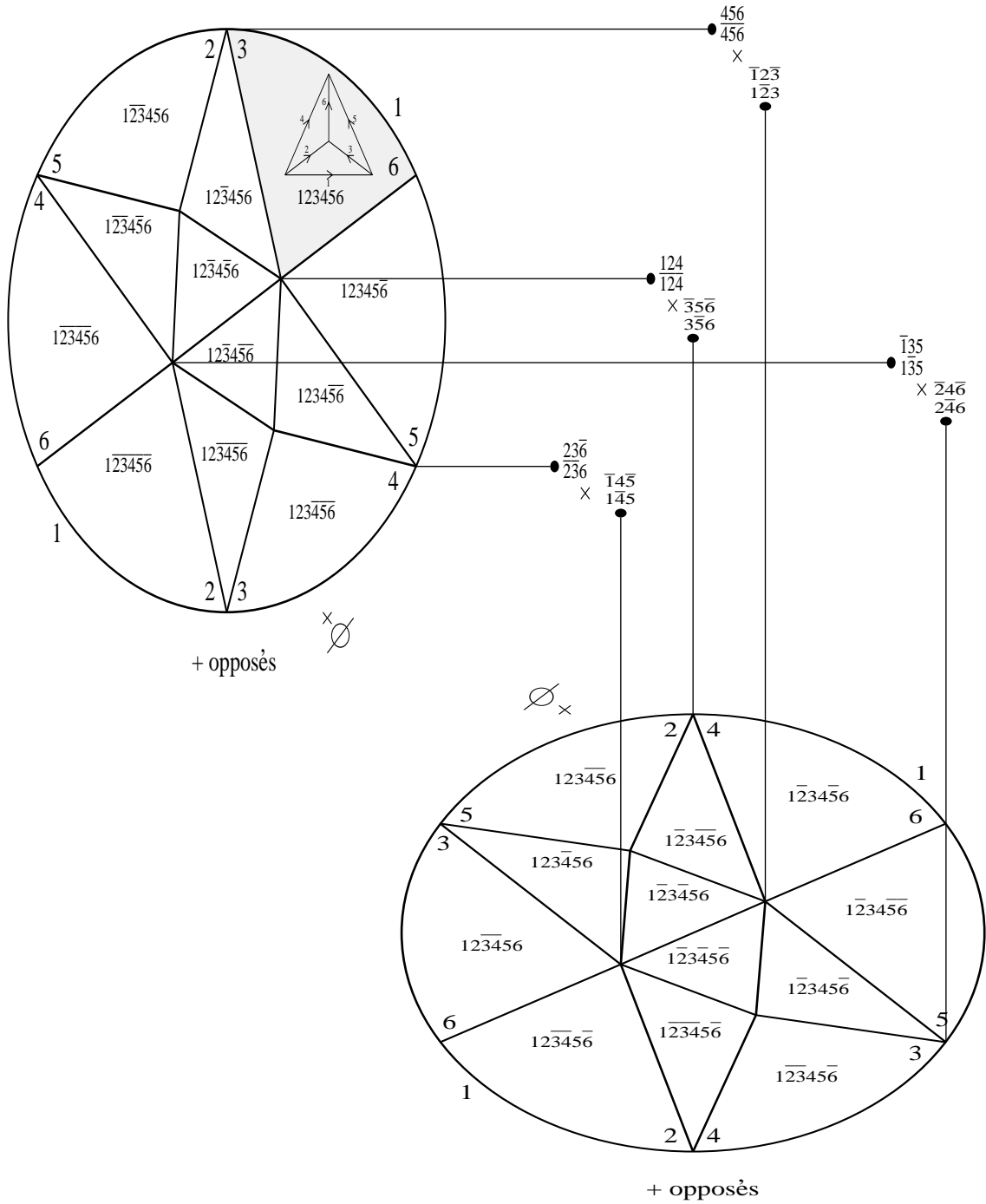
*Interprétations géométriques.* Ce résultat a une importante conséquence pour la représentation géométrique des réorientations d'un matroïde orienté  $M$ . Les covecteurs maximaux d'un matroïde orienté sont représentés par les régions d'un arrangement de pseudosphères. Avec le résultat précédent on peut représenter les  $2^{|E|}$  parties signées maximales comme des produits de régions dans des arrangements de pseudosphères représentant les  $M/F_c$  et  $M^*/(E \setminus F_c)$  où  $F_c$  décrit l'ensemble des fermés cycliques de  $M$ .

Le résultat précédent se voit facilement géométriquement : étant donné un arrangement de pseudosphères signé, i. e. un côté positif (hémisphère fermé) étant choisi pour chaque pseudosphère, ce qui correspond à choisir une réorientation du matroïde orienté, la réorientation est acyclique si et seulement si l'intersection des hémisphères positifs est une région (fermée). Elle est totalement cyclique si et seulement si l'intersection des hémisphères positif est vide. Et si l'intersection de ces hémisphères est une face, celle-ci correspond à un fermé cyclique  $F_c$ . L'intersection des hémisphères pour les pseudosphères ne contenant pas la face définissent alors une réorientation acyclique de  $M/F_c$  ; et l'intersection des hémisphères pour les pseudosphères contenant la face définissent une réorientation totalement cyclique de  $M(F_c)$ .

*Exemple.* Dans la Figure 2.3, pour reprendre l'exemple du matroïde orienté  $K_4$ , toutes ses parties signées sont représentées comme produits de covecteurs maximaux des mineurs  $M/F_c$  et  $M^*/(E \setminus F_c)$ ,  $F_c$  décrivant l'ensemble des fermés cycliques.

Par exemple le fermé cyclique 123 de  $K_4$  donne deux réorientations acycliques de  $K_4/123$  correspondant aux parties signées 456 et  $\overline{456}$ , et le fermé cyclique correspondant 456 de  $K_4^*$  donne deux réorientations acycliques de  $K_4^*/456$  (ou deux réorientations totalement cycliques de  $K_4(123)$ ) correspondant aux parties signées  $\overline{123}$  et 123.

Il faut remarquer que sur la Figure 2.3 les mineurs obtenus pour les fermés cycliques non triviaux (i. e. différents de  $\emptyset$  et de  $E$ ) sont de rang 1 et sont donc représentés par des points mais ce n'est pas la généralité.



**Figure 2.3 : première décomposition des réorientations de  $K_4$**

*Remarque.* Ce résultat s'interprète aussi de façon proche dans la 'représentation topologique d'une paire duale de matroïdes orientés' de Brylawski et Ziegler [BrZi 93]. Pour en donner l'idée dans le cas réalisable, soit  $R^n$  l'espace vectoriel réel euclidien de dimension  $n$  muni d'une base orthogonale  $E = e_1, \dots, e_n$ . Soit  $V$  un sous espace vectoriel de dimension  $r$ . Les intersections de  $V$  avec les hyperplans orthogonaux aux  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , définissent un arrangement d'hyperplans sur  $V$  et sont la représentation topologique d'un matroïde orienté  $M_V$  sur  $E$ . De même les

intersections de  $V^\perp$  avec les hyperplans orthogonaux aux  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , définissent un arrangement d'hyperplans sur  $V^\perp$  et sont la représentation topologique d'un matroïde orienté sur  $E$ , qui est le dual du précédent :  $M_{G^\perp} = M_G^*$ . Les  $2^n$  régions de  $R^n$  définies par les hyperplans orthogonaux aux  $e_i \in E$  correspondent aux réorientations de  $M_V$ . L'interprétation en bref du résultat précédent est que les régions qui sont coupées par  $V$  sont les covecteurs maximaux de  $M_V$ , celles qui sont coupées par  $V^\perp$  sont les covecteurs maximaux de  $M_{V^\perp}$  et les autres, qui touchent  $V$  et  $V^\perp$  selon les fermés cycliques, sont les 'produits' de régions pour ces fermés cycliques.

**Proposition 2.2.3.**

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné acyclique sur  $E$ , soient  $a_1 < \dots < a_\iota$  ses éléments dual-actifs, et soit

$$F_k = E \setminus \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{O}^*(M) \\ \min(D) > a_k}} D$$

La suite

$$\emptyset = F_c = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{\iota-1} \subset F_\iota = E$$

est l'unique suite décomposante de  $M$  telle que, pour tout  $1 \leq k \leq \iota$ ,  $M(F_k)/F_{k-1}$  soit acyclique d'activité duale 1.

*Preuve.*

Les  $F_k$ ,  $0 \leq k \leq \iota$ , sont des fermés de  $M$  car complémentaires d'union de cocircuits de  $M$ . La suite des  $\min(F_k \setminus F_{k-1})$ ,  $1 \leq k \leq \iota$ , est par définition la suite croissante des éléments dual-actifs de  $M$ . On montre la proposition par induction sur  $\iota$ . Si  $\iota = 1$ , c'est évident. Pour simplifier on note  $F = F_{\iota-1}$ .  $M(F)$  est acyclique, car un circuit positif de  $M(F)$  serait un circuit positif de  $M$ .

Un cocircuit de  $M(F)$  est contenu dans un cocircuit de  $M$  avec les mêmes signes pour les éléments appartenant à  $F$ . Si  $e$  appartient à un cocircuit positif de  $M(F)$  de plus petit élément  $a_k$ , ce cocircuit est l'intersection de  $F$  et d'un cocircuit  $D$  de  $M$ . Soit  $D'$  un cocircuit de  $M$  de plus petit élément  $a_\iota$ , on a  $e \notin D'$ . Alors  $D' \circ D$  est un covecteur positif de  $M$  de plus petit élément  $a_k$ , donc il existe un cocircuit positif de  $M$  contenant  $e$  de plus petit élément  $a_k$  (génération des covecteurs par composition conforme). Ainsi  $e \in E \setminus F_k$ .

Donc pour tout élément dual actif  $a_k$  de  $M(F)$ ,

$$\bigcup_{D \in \mathcal{O}^*(M(F)), \min(D) > a_k} D = F \cap \bigcup_{D \in \mathcal{O}^*(M), \min(D) > a_k} D$$

ce qui prouve que la suite décomposante associée à  $M(F)$  par hypothèse d'induction est la suite  $\emptyset = F = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{\iota-1} = F$ .

Les cocircuits de  $M/F$  sont les cocircuits de  $M$  contenus dans  $E \setminus F$ . Donc  $M/F$  est acyclique et  $a_\iota$  est dual actif dans  $M/F$ . Si un autre élément était dual-actif dans  $M/F$ , il le serait aussi dans  $M$ , ce qui est exclu.

La suite  $\emptyset = F_c = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{\iota-1} \subset F_\iota = E$  est donc une suite décomposante telle que, pour tout  $1 \leq k \leq \iota$ ,  $M(F_k)/F_{k-1}$  est acyclique d'activité 1.

Il reste à montrer que c'est la seule vérifiant cette propriété. Par définition on doit avoir  $\min(E \setminus F_{\iota-1}) = a_\iota$ . En notant encore  $F = F_{\iota-1}$ ,  $M/F$  doit être acyclique et  $F$  est un fermé donc  $E \setminus F$  est le support d'un covecteur positif de  $M$ . Un cocircuit positif ne peut pas avoir un plus petit élément strictement supérieur à  $a_\iota$ , donc  $E \setminus F \subseteq \bigcup_{D \text{ cocircuit positif de } M, \min(D)=a_\iota} D$ . D'autre part, si  $e$  appartient à un cocircuit positif de  $M$  de plus petit élément  $a_\iota$  et  $e \in F$ , alors  $e$  appartient à un cocircuit positif de  $M(F)$  de plus petit élément supérieur à  $a_\iota$ . Soit  $k$  tel que  $e \in F_k \setminus F_{k-1}$ ,  $M(F_k)/F_{k-1}$  ne peut donc pas être d'activité duale 1. Donc  $E \setminus F = \bigcup_{D \in \mathcal{O}^*(M), \min(D)=a_\iota} D$ .

Enfin  $\emptyset = F_c = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{\iota-1} = F$  est une suite décomposante de  $M(F)$ , elle est unique par hypothèse d'induction.  $\square$

*Remarque.* Il apparait dans la preuve que la suite décomposante associée à  $M$  peut-être calculée soit directement comme dans l'hypothèse de la proposition, soit par induction. En effet soit

$$F = E \setminus \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{O}^*(M) \\ \min(D) = a_\iota}} D$$

et soit  $\emptyset = F_c = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{\iota-1} = F$  la suite décomposante associée à  $M(F)$ , alors  $\emptyset = F_c = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{\iota-1} \subset F_\iota = E$  est la suite décomposante associée à  $M$ .

#### Corollaire 2.2.4.

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné sur  $E$ .

$\{A \subseteq E \mid -_A M \text{ acyclique}\} =$

$$\biguplus_{\substack{\emptyset = F_c = F_0 \subset \dots \subset F_\iota = E \\ \text{décomposante avec } F_c = \emptyset}} \left\{ A_1 + \dots + A_\iota \mid \right. \\ \left. -_{A_k} M(F_k)/F_{k-1} \text{ d'activités } (1, 0), \quad 1 \leq k \leq \iota \right\}$$

Avec  $A = A_1 + \dots + A_\iota$  on a alors

$$A\mathcal{O}^*(-_A M) = \bigcup_{1 \leq k \leq \iota} \min(F_k \setminus F_{k-1}) = \bigcup_{1 \leq k \leq \iota} A\mathcal{O}^*(-_{A_k} M(F_k)/F_{k-1})$$

*Preuve.* Avec la proposition 2.2.3, on sait qu'à tout  $A \subseteq E$  tel que  $-_A M$  soit acyclique est associée une unique suite décomposante avec les propriétés voulues. Réciproquement pour toute suite décomposante  $\emptyset = F_c = F_0 \subset \dots \subset F_\iota = E$ , la connexité des  $M(F_k)/F_{k-1}$  assure l'existence d'une orientation acyclique d'activité duale 1. Il reste à montrer que si pour tout  $1 \leq k \leq \iota$ ,  $M(F_k)/F_{k-1}$  est acyclique

ayant pour seul élément dual-actif  $a_k = \min(F_k \setminus F_{k-1})$ , alors  $M$  est acyclique avec pour éléments dual-actifs les  $a_k$ ,  $1 \leq k \leq \iota$ . Ainsi les hypothèses de la proposition 2.2.3 sont satisfaites et cette suite décomposante est associée à  $M$  par unicité.

D'abord, pour tout  $1 \leq k \leq \iota$ ,  $M(F_k)/F_{k-1}$  est acyclique, donc possède un covecteur maximal positif, qui est contenu dans un covecteur  $C_k$  de  $M$  de support inclus dans  $E \setminus F_{k-1}$  et tel que  $F_k \setminus F_{k-1} \subseteq C^+$ . Le covecteur  $C_\iota \circ C_{\iota-1} \circ \dots \circ C_1$  de  $M$  est donc un covecteur maximal positif de  $M$  qui est donc acyclique. Le covecteur  $C_\iota \circ C_{\iota-1} \circ \dots \circ C_k$ ,  $1 \leq k \leq \iota$ , est aussi un covecteur positif de plus petit élément  $a_k$ , donc les  $a_k$ ,  $1 \leq k \leq \iota$ , sont dual-actifs dans  $M$ .

Enfin si  $a$  est dual-actif dans  $M$  et  $a \in F_k \setminus F_{k-1}$ , il est le plus petit élément d'un cocircuit positif  $C$  de  $M$ , et soit  $j$  le plus petit possible tel que  $C \cap F_j \neq \emptyset$ . On a  $j \leq k$ . Alors  $C \cap F_j$  est un cocircuit positif de  $M(F_j)$  de plus petit élément  $e \geq a$ , et  $(C \cap F_j) \cap F_{j-1} = \emptyset$  donc  $C \cap F_j$  est un cocircuit positif de  $M(F_j)/F_{j-1}$ , donc  $e = a_j$  car ce mineur est d'activité duale 1, or  $a_j \leq a_k$  par définition d'une suite décomposante, donc  $e = a_j \leq a_k \leq a \leq e$  et  $a = a_k$ .  $\square$

**Théorème 2.2.5.** (décomposition active des réorientations, définition )

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné sur  $E$ , et  $2^E$  l'ensemble des parties de  $E$ .

$$2^E = \biguplus_{\substack{\emptyset = F_\epsilon^* \subset \dots \subset F_0^* = F_c \\ F_c = F_0 \subset \dots \subset F_\iota = E \\ \text{décomposante}}} \left\{ \begin{array}{l} A_1^* + \dots + A_\epsilon^* + A_1 + \dots + A_\iota \quad | \\ -_{A_k^*} M(F_{k-1}^*)/F_k^* \text{ d'activités } (0, 1), \quad 1 \leq k \leq \epsilon, \\ -_{A_k} M(F_k)/F_{k-1} \text{ d'activités } (1, 0), \quad 1 \leq k \leq \iota \end{array} \right\}$$

Avec  $A = A_1^* + \dots + A_\epsilon^* + A_1 + \dots + A_\iota$  on a alors

$$A\mathcal{O}^*(-_A M) = \bigcup_{1 \leq k \leq \iota} \min(F_k \setminus F_{k-1}) = \bigcup_{1 \leq k \leq \iota} A\mathcal{O}^*(-_{A_k} M(F_k)/F_{k-1})$$

$$A\mathcal{O}(-_A M) = \bigcup_{1 \leq k \leq \epsilon} \min(F_{k-1}^* \setminus F_k^*) = \bigcup_{1 \leq k \leq \epsilon} A\mathcal{O}(-_{A_k^*} M(F_{k-1}^*)/F_k^*)$$

L'unique suite décomposante associée

$$\emptyset = F_\epsilon^* \subset \dots \subset F_0^* = F_c = F_0 \subset \dots \subset F_\iota = E$$

au matroïde orienté ordonné  $M$  dans cette décomposition, avec  $A\mathcal{O}^*(M) = a_1 < \dots < a_\iota$  et  $A\mathcal{O}(M) = a_1^* < \dots < a_\epsilon^*$ , est définie par

$$F_c = E \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{O}^*(M)} D = \bigcup_{C \in \mathcal{O}(M)} C$$

$$F_k = E \setminus \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{O}^*(M) \\ \min(D) > a_k}} D = F_{k+1} \setminus \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{O}^*(M(F_{k+1})) \\ \min(D) = a_{k+1}}} D$$



pour  $1 \leq k \leq \iota - 1$  et pour  $1 \leq k \leq \varepsilon - 1$  par

$$F_k^* = \bigcup_{\substack{C \in \mathcal{O}(M) \\ \min(C) > a_k^*}} C = \bigcup_{\substack{C \in \mathcal{O}(M/F_{k+1}^*) \\ \min(C) = a_k^*}} C$$

*Preuve.* L'ensemble des suites décomposantes de  $M$  est en bijection avec l'ensemble des paires de suites décomposantes de  $M(F_c)$  pour le fermé cyclique  $F_c$  et de  $M/F_c$  pour le fermé cyclique  $\emptyset$ , lorsque  $F_c$  décrit l'ensemble des fermés cycliques de  $M$  (propriété 4.0). On en déduit facilement le théorème en combinant le corollaire 2.2.2 et le corollaire 2.2.4 appliqué à  $M/F_c$  et dualement à  $M(F_c) = (M^*/(E \setminus F_c))^*$  lorsque  $F_c$  décrit l'ensemble des fermés cycliques de  $M$ .  $\square$

*Remarque.* La suite décomposante associée à une réorientation  $-_A M$  ne dépend que du matroïde orienté  $-_A M$  (au lieu du couple  $(M, A)$ ). Pour  $A \subseteq E$ , le théorème précédent appliqué à  $-_A M$  revient donc simplement à changer les parties de  $E$  qui apparaissent en leur différence symétrique avec  $A$ .

*Définition.*

La *partition active* de  $E$  selon  $M$  est la partition

$$E = F_{\varepsilon-1}^* \setminus F_{\varepsilon}^* + \dots + F_0^* \setminus F_1^* + F_1 \setminus F_0 + \dots + F_{\iota} \setminus F_{\iota-1}$$

déduite de la suite décomposante associée à  $M$ . Comme convenu afin de simplifier les notations pour la suite, on la notera comme une application  $\alpha$  qui à un élément  $e$  de  $E$  associe  $\alpha(M; e)$  (ou plus simplement  $\alpha(e)$  sauf ambiguïté) le plus petit élément de sa partie (qui est actif ou dual-actif dans  $M$ ) dans la partition active de  $M$ .

Autrement dit,  $\alpha(M; e)$  est le plus grand plus petit élément de circuit ou cocircuit positif contenant  $e$ .

Il faut remarquer que connaissant  $M$  et sa partition active (i. e. sa fonction  $\alpha$ ) on déduit la suite décomposante associée à  $M$ , puisque l'on connaît son fermé cyclique  $F_c$  :

$$F_c = \bigcup_{a \in \mathcal{O}(M)} \alpha^{-1}(M; a) = E \setminus \bigcup_{a \in \mathcal{O}^*(M)} \alpha^{-1}(M; a)$$

et que la partition active est invariante par passage au dual : pour tout  $e \in E$ ,

$$\alpha(M; e) = \alpha(M^*; e)$$

**Corollaire 2.2.6.** (propriété de ‘retournements’)

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné sur  $E$  d'activité  $\varepsilon$  et d'activité duale  $\iota$ . Soit  $\alpha^{-1}$  la partition active de  $M$ . Alors les  $2^{\varepsilon+\iota}$  réorientations de  $M$  selon  $\alpha^{-1}(A)$  pour  $A \subseteq \mathcal{O}^*(M) \cup \mathcal{O}(M)$  ont la même partition active que  $M$ .

*Preuve.*  $\mathcal{O}^*(M) \cup \mathcal{O}(M) = \alpha(E)$  est l'ensemble des éléments actifs ou dual-actifs de  $M$ . Il est clair dans le théorème 2.2.5 que si une partie  $A$  se décompose en  $A = A_1^* + \dots + A_\epsilon^* + A_1 + \dots + A_\iota$ , alors toutes les parties obtenues en remplaçant  $A_i$  par  $\alpha^{-1}(a_i) \setminus A_i$ , c'est-à-dire en réorientant  $\alpha^{-1}(a_i) = F_i \setminus F_{i-1}$ , pour  $1 \leq i \leq \iota$ , ou bien en remplaçant  $A_i^*$  par  $\alpha^{-1}(a_i^*) \setminus A_i^*$ , c'est-à-dire en réorientant  $\alpha^{-1}(a_i^*)$ , pour  $1 \leq i \leq \epsilon$ , ont la même suite décomposante associée puisque les mineurs considérés sont inchangés.  $\square$

*Définition.* Etant donné un matroïde orienté ordonné  $M$  d'activité  $\epsilon$  et d'activité duale  $\iota$ , on appellera *classe d'activité* de  $M$  les  $2^{\iota+\epsilon}$  réorientations obtenues en réorientant n'importe quelles parties de la partition active de  $M$ . L'ensemble des classes d'activités des réorientations de  $M$  constitue une partition de l'ensemble des réorientations de  $M$ .

*Interprétation géométrique.* Topologiquement (dans la représentation d'un matroïde orienté de rang  $r$  comme arrangement de la sphère de dimension  $r - 1$ ) une classe d'activité de réorientations acycliques est la réunion de  $2^\iota$  régions (homéomorphes à des boules ouvertes de dimension  $r - 1$ ). Les intersections de leurs fermetures topologiques forment des faces correspondant aux  $\iota$  mineurs intervenant dans la suite décomposante associée, et dont les dimensions sont les corangs moins 1 de ces mineurs.

*Remarque.* Dans le cas d'un graphe, on verra dans le chapitre 6 partie 2 que, pour certains ordres qui existent toujours, il existe une unique orientation acyclique avec unique puits fixé dans chaque classe d'activité de réorientations acycliques, d'où l'on déduira une bijection préservant les activités entre ces orientations et les arbres internes.

*Exemples.*

Dans la réorientation  $12345\bar{6}$  de  $K_4$  (cf. Figures 2.3 ou 2.5), il y a trois cocircuits positifs  $124$ ,  $2345$  et  $236$ . Tout élément appartient à un cocircuit positif donc le fermé cyclique de la suite décomposante associée est  $\emptyset$ . L'union des cocircuits positifs de plus petit élément 2 est donc  $23456$  et, l'union des cocircuits positifs de  $K_4/23456$  est bêtement 1, d'où la suite décomposante  $\emptyset \subset 1 \subset E$ , la partition active  $1 + 23456$  et la classe d'activité  $12345\bar{6}$ ,  $\bar{1}23456$ ,  $\bar{1}\bar{2}3456$ ,  $\bar{1}\bar{2}345\bar{6}$ .

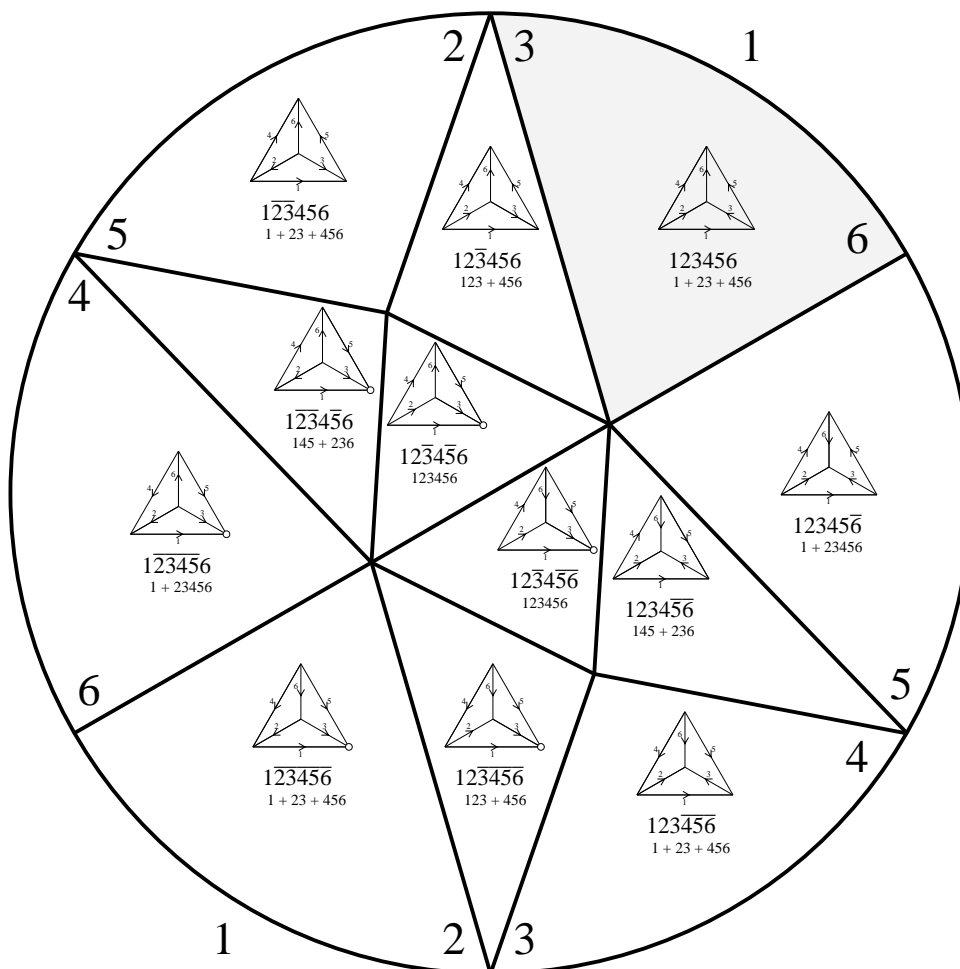
La fermeture topologique de l'union de ces 4 régions a deux composantes connexes opposées, chacune homéomorphe à deux boules recollées selon une face de la pseudosphère 1 de dimension  $(r - 1) - 1 = 1$  (de sorte qu'ici chaque composante connexe est homéomorphe à une boule de dimension 2).

Le tableau de la Figure 2.4 recense les suites décomposantes de  $K_4$  (le fermé cyclique apparaît en gras) et les classes d'activités correspondantes via le théorème de décomposition des réorientations 2.2.5 ('...' dans le tableau signifie 'et leurs opposés' : on n'a écrit que les parties signées pour lesquelles 1 est signé +). Les éléments actifs sont les plus petits éléments des parties de la partition active.



Suites décomposantes	Partitions actives	Classes d'activités
$\emptyset \subset 1 \subset 123 \subset E$	$1 + 23 + 456$	$123456, \overline{123}456, 123\overline{456}, \overline{123456}, \dots$
$\emptyset \subset 1 \subset E$	$1 + 23456$	$12345\overline{6}, \overline{12345}6, \dots$
$\emptyset \subset 145 \subset E$	$145 + 236$	$1234\overline{56}, \overline{1234}56, \dots$
$\emptyset \subset 123 \subset E$	$123 + 456$	$12\overline{3456}, \overline{123}456, \dots$
$\emptyset \subset E$	$123456$	$12\overline{345}6, \dots$
$\emptyset \subset E$	$123456$	$12\overline{34}56, \dots$
$\emptyset \subset \mathbf{123} \subset E$	$123 + 456$	$1\overline{23}456, \overline{123}456, \dots$
$\emptyset \subset \mathbf{145} \subset E$	$145 + 236$	$1\overline{234}56, \overline{1234}56, \dots$
$\emptyset \subset \mathbf{246} \subset E$	$246 + 135$	$12\overline{34}56, \overline{1234}56, \dots$
$\emptyset \subset \mathbf{356} \subset E$	$356 + 124$	$1234\overline{56}, \overline{1234}56, \dots$
$\emptyset \subset \mathbf{E}$	$123456$	$1\overline{234}56, \dots$
$\emptyset \subset \mathbf{E}$	$123456$	$1\overline{2345}6, \dots$
$\emptyset \subset 246 \subset \mathbf{E}$	$135 + 246$	$1\overline{234}56, \overline{1234}56, \dots$
$\emptyset \subset 356 \subset \mathbf{E}$	$124 + 356$	$1\overline{2345}6, \overline{12345}6, \dots$
$\emptyset \subset 23456 \subset \mathbf{E}$	$1 + 23456$	$1\overline{2345}6, \overline{12345}6, \dots$
$\emptyset \subset 356 \subset 23456 \subset \mathbf{E}$	$1 + 24 + 356$	$12\overline{345}6, \overline{12345}6, \overline{1234}56, \overline{12345}6, \dots$

Figure 2.4 : tableau des classes d'activités des réorientations de  $K_4$

Figure 2.5 : partitions actives des régions de  $K_4$

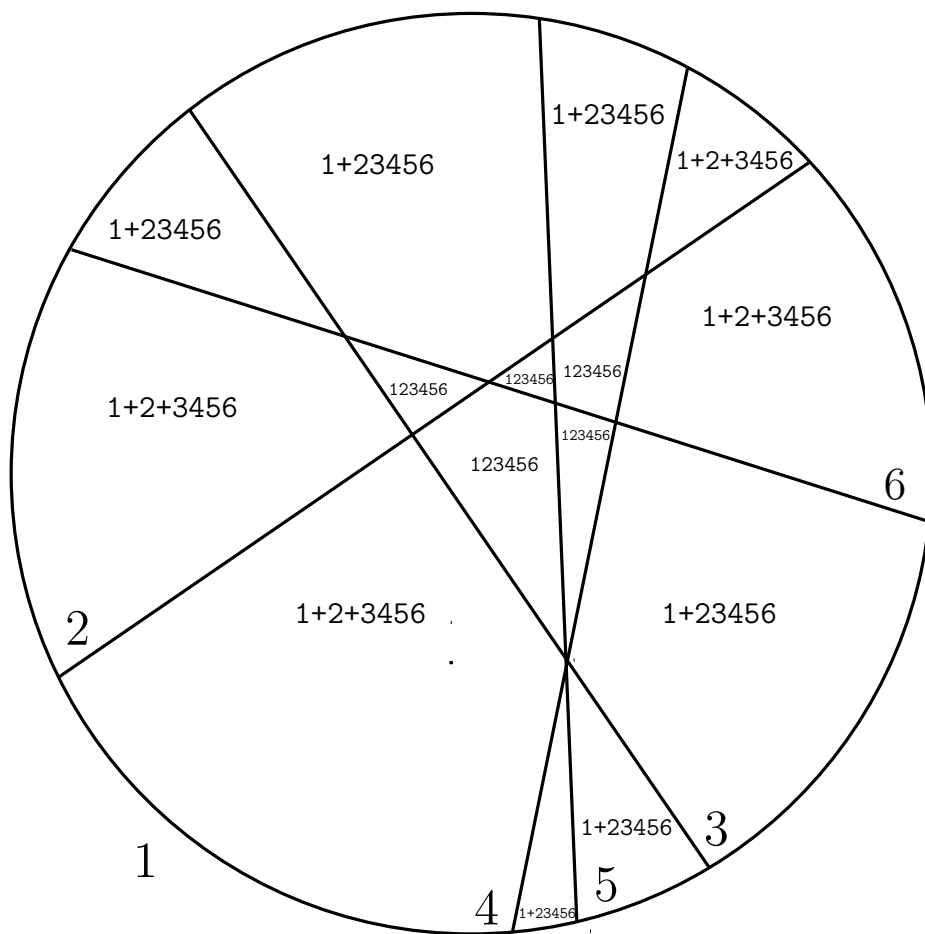


Figure 2.6 : partitions actives des régions

## 2.3 Conséquence : une autre classe de correspondances actives.

Les deux théorèmes de décomposition 2.1.1 (décomposition active des bases) et 2.2.5 (décomposition active des réorientations) sont similaires puisqu'ils font intervenir tous deux l'ensemble de toutes les suites décomposantes du matroïde orienté. En particulier, si l'on admet que  $2b_{0,1} = o_{0,1} = o_{1,0} = 2b_{1,0}$ , on déduit immédiatement de ces deux théorèmes que le nombre de classes d'activité de réorientations de  $M$  d'activité  $j$  et d'activité duale  $i$  est  $b_{i,j}$  (mieux encore on en déduit le corollaire 1.7). Le cardinal d'une telle classe d'activité étant  $2^{i+j}$  on retrouve l'égalité  $o_{i,j} = 2^{i+j}b_{i,j}$ , point de départ de cette étude.

Au lieu d'une correspondance entre les bases et les réorientations, on s'est ramené à chercher une *bijection entre les bases et les classes d'activité de réorientations* préservant les activités. Et pour ceci, les théorèmes de décompositions précédents permettent de se ramener au cas d'activité  $(1,0)$ , duquel on déduit par dualité le cas d'activité  $(0,1)$  et par les décompositions actives le cas général.

**Théorème 2.3.1.** (théorème d'extension)

*Soit  $\psi^{(1,0)}$  une application définie sur l'ensemble des matroïdes orientés d'activités  $(1,0)$ , telle que :*

*(OB1)<sup>(1,0)</sup> 'préservation des éléments actifs<sup>(1,0)</sup>,*

*Pour tout  $M$  d'activités  $(1,0)$ , l'image  $B = \psi^{(1,0)}(M)$  est une base  $M$  d'activités  $(1,0)$ .*

*(OB2)<sup>(1,0)</sup> 'bijectivité<sup>(1,0)</sup>,*

*Pour tout matroïde orienté  $M$  sur  $E$ , l'application  $\psi_M^{(1,0)}$  définie par  $\psi_M^{(1,0)}(A) = \psi_M^{(1,0)}(E \setminus A) = \psi^{(1,0)}(-_A M)$  induit une bijection entre les paires de parties complémentaires  $\{A, E \setminus A\}$  de  $E$  telles que  $-_A M$  soit d'activités  $(1,0)$  et les bases d'activités  $(1,0)$  de  $M$ .*

*Alors  $\psi^{(1,0)}$  peut-être étendue de façon unique en une application  $\psi$  définie sur l'ensemble de tous les matroïdes orientés vérifiant la propriété suivante :*

*(OB5) 'décomposition'*

*Pour tout matroïde orienté  $M$  un matroïde orienté ayant pour suite décomposante associée*

$$\emptyset = F_\varepsilon^* \subset \dots \subset F_0^* = F_c = F_0 \subset \dots \subset F_\iota = E$$

*on a*

$$\psi(M) = \bigsqcup_{1 \leq k \leq \varepsilon} \left( E \setminus \psi^{(1,0)}((M(F_{k-1}^*)/F_k^*)^*) \right) + \bigsqcup_{1 \leq k \leq \iota} \psi^{(1,0)}(M(F_k)/F_{k-1})$$

*Alors, pour tout matroïde orienté  $M$  sur  $E$ ,  $\psi(M)$  est une base de  $M$  et  $\psi$  satisfait les propriétés suivantes, avec  $\psi_M$  définie par  $\psi_M(A) := \psi(-_A M)$  pour  $A \subseteq E$  :*

*(OB6) 'préservation de la partition active'*

Pour tout  $M$ ,  $M$  et  $\psi(M)$  ont la même partition active : pour tout  $e \in E$

$$\alpha_M(\psi(M); e) = \alpha(M; e)$$

(OB7) ‘retournements’

Pour tout  $M$  sur  $E$  et tout  $A \subseteq E$ , la classe d’activité de  $-_A M$  est

$$\psi_M^{-1}(\psi_M(A))$$

Autrement dit, pour tout matroïde orienté  $M$ , l’application  $\psi_M$  induit une bijection - préservant les partitions actives - entre les classes d’activité de réorientations de  $M$  et les bases de  $M$ .

*Preuve.* Ce résultat vient directement des définitions et des décompositions des deux parties précédentes (théorème 2.1.1 et théorème 2.2.5).  $\square$

On termine cette partie en détaillant les conséquences du théorème précédent.

Avant tout, l’application  $\psi_M$  obtenue vérifie par définition pour  $A, A' \subseteq E$

$$\psi_{-_A M}(A') = \psi_M(A \triangle A')$$

Deuxièmement, la propriété (OB6) ‘préservation de la partition active’ implique la propriété

(OB1) ‘préservation des éléments actifs’  
pour tout  $M$

$$AO(M) = Ext_M(\psi(M))$$

et

$$AO^*(M) = Int_M(\psi(M))$$

Troisièmement, la propriété (OB7) ‘retournements’, signifie que que l’on peut réorienter les unions de cocircuits ou circuits positifs de plus petit élément supérieur à un élément quelconque sans changer la base associée au matroïde orienté ordonné considéré (d’où le nom ‘retournements’). Autrement dit, connaissant une réorientation de  $M$  associée à une certaine base, on déduit les autres réorientations associées à la même base en réorientant des parties quelconques de sa partition active, ou de façon équivalente, en réorientant des parties quelconques de sa suite décomposante.

La propriété (OB7) implique la propriété

(OB2) ‘correspondance numérique’

$$|\psi_M^{-1}(\psi_M(A))| = 2^{o^*(-_A M) + o(-_A M)}$$



Quatrièmement, par définition, l'application  $\psi$  obtenue satisfait  
 (OB4) 'dualité'  
 pour tout matroïde orienté  $M$  sur  $E$ ,

$$\psi(M^*) = E \setminus \psi(M)$$

Cinquièmement, suivant les constructions inductives des deux parties précédentes, l'application  $\psi$  peut-être construite à partir de  $\psi^{(1,0)}$  par l'algorithme suivant :

Algorithme d'extension

Soit  $M$  un matroïde orienté.

Si  $o^*(M) = 1$  et  $o(M) = 0$  alors  $\psi(M) := \psi^{(1,0)}(M)$ .

Si  $o^*(M) \neq 0$  alors soit  $a$  le plus grand élément dual-actif de  $M$ , soit

$$F = E - \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{O}^*(M) \\ \min(D) = a}} D$$

et

$$\psi(M) := \psi(M(F)) \cup \psi(M/F)$$

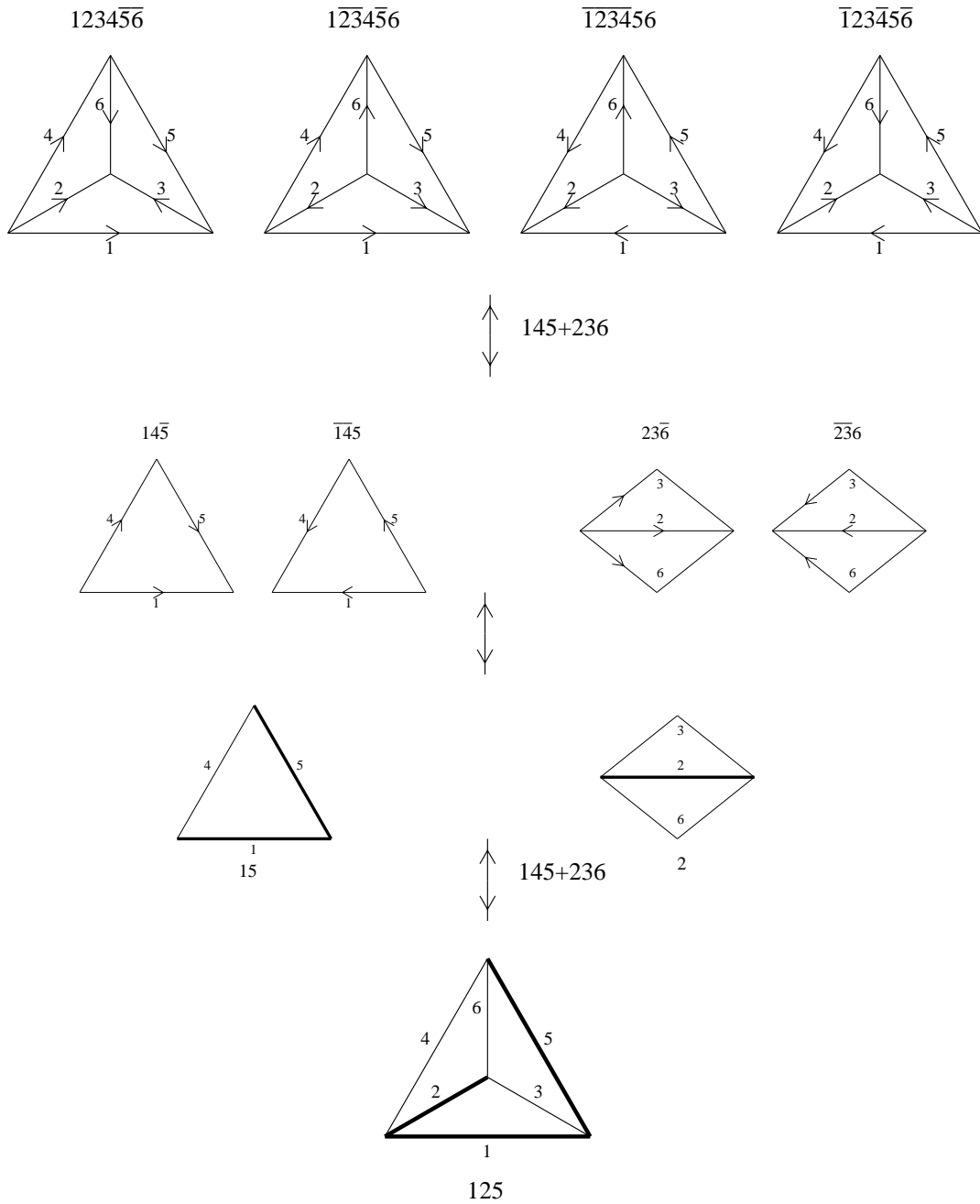
Si  $o^*(M) = 0$  alors soit

$$\psi(M) := E \setminus \psi(M^*)$$

*Remarques.*

- Le théorème a été énoncé en termes d'extension d'une famille d'applications des réorientations d'un matroïde orienté dans ses bases, on aurait tout aussi bien pu l'écrire par sa réciproque : des bases aux réorientations, puisque tout repose sur le fait que les décompositions sont les mêmes. Cependant la formulation inductive est plus simple dans le sens employé ici, car la partition active d'une réorientation est plus simple à définir que celle d'une base.

- Passage au matroïde simple. Dans les constructions précédentes, les isthmes et les boucles jouent un rôle mineur, et dans les classes d'éléments parallèles (i. e. les ensembles dont tous les éléments sont parallèles entre eux) c'est le plus petit élément qui a un rôle prépondérant (par exemple il est le seul possible de la classe dans une base interne, sinon il est extérieurement actif, et son orientation conditionne l'orientation des autres éléments de la classe dans une orientation acyclique, sinon il existe un circuit positif). Il est facile de relier les décompositions actives dans un matroïde (orienté ou non) et dans son matroïde simple sous-jacent (obtenu en supprimant les boucles et en réduisant les classes parallèles à leur plus petit élément), et même dans son matroïde 'doublement simple' sous-jacent (obtenu en supprimant les boucles et les isthmes et en réduisant les classes parallèles du matroïde et de son dual à leur plus petit élément). On passe les détails.



**Figure 2.8 : théorème d'extension illustré sur une base de  $K_4$**

*Exemple.*

(i) La Figure 2.8 illustre le théorème d'extension 2.3.1 pour la base  $125$  de  $K_4$ . On trouve sur cet exemple les orientations et la base associées car, pour les mineurs très simples qui apparaissent, l'application  $\psi^{(1,0)}$  du cas  $(1,0)$  ou  $(0,1)$  est forcée : en fait cette base et ces orientations sont les seules avoir leur suite décomposante commune.

L'exemple  $K_4$  qui a beaucoup servi jusqu'à présent n'est donc plus significatif du problème qui se pose maintenant : il ne possède que deux bases d'activités  $(1,0)$  et pour les autres il n'y a à chaque fois qu'une seule base et une seule classe

d'activité associée à une suite décomposante donnée, qui doivent donc naturellement être associées par la correspondance (Figures 2.1 et 2.4). Le coeur du problème est maintenant le cas des activités  $(1, 0)$  et d'autres exemples apparaîtront à ce sujet dans les chapitres à venir. Les exemples plus généraux que l'on utilisera, de rang 3 afin de pouvoir les représenter dans le plan, ne peuvent être graphiques au delà de  $K_4$  ( $K_4$  est le plus grand graphe de rang 3 sans boucle ni arêtes multiples, plus généralement  $U_{2,4}$  est un mineur exclu des matroïdes graphiques, cf. Annexe 2). On retrouvera un autre exemple graphique dans le chapitre 6 partie 2.

(ii) Sur l'exemple de la Figure 2.6, les régions d'activité duale 3 ont pour partition active  $1 + 2 + 3456$ , elles doivent être associées à la base 123 (les mineurs considérés sont  $M(1)$ ,  $M(12)/1$  et  $M/12$ ). Les régions d'activités duale 2 ont pour partition active  $1 + 23456$ , elles doivent être associées aux bases de type  $1 \cup B$  où 1 est la base de  $M(1)$  et  $B$  est une base d'activités  $(1, 0)$  de  $M/1$ . Les régions d'activités duale 1 ont pour partition active 123456, elles font l'objet du chapitre suivant.

Pour finir on note qu'aucune autre condition que la bijectivité n'est requise par les applications  $\psi_M^{(1,0)}$  de départ. Par égalité des cardinaux, il existe évidemment de telles bijections (il en existe qui ont en plus la propriété  $(OB3^{(1,0)})$  'induction $^{(1,0)}$ ', construites dans le chapitre 1), et pour chaque famille de bijections  $\psi_M^{(1,0)}$  choisie pour le cas d'activité  $(1, 0)$ , on déduit par ce théorème d'extension 2.3.1 une famille de correspondances  $\psi_M$  pour toutes les activités. Il va s'agir maintenant de trouver une certaine application  $\psi^{(1,0)}$  naturelle, pour ensuite l'étendre naturellement avec ce théorème.

## Chapitre 3

### Bijection fondamentale pour les activités (1,0)

Ce chapitre consiste à établir (indépendamment des constructions précédentes) une bijection naturelle - fondement de cette thèse - entre les bases d'activités (1,0) et les paires de réorientations opposées d'activités (1,0). Géométriquement, ces réorientations sont les régions qui ne touchent pas le plus petit élément (régions 'bornées' si l'on considère cet élément comme le 'plan à l'infini', cf. chapitre 5). Dans un graphe, ces orientations sont les orientations acycliques avec un unique puits et une unique source, extrémités de la plus petite arête (cf. chapitre 6 partie 2).

On définit d'abord la bijection par une caractérisation intrinsèque de la réorientation associée à une base donnée, qui conduit à une définition directe des bases vers les réorientations. Après avoir montré que l'application ainsi définie est une bijection, on donne une définition inductive de cette bijection des réorientations vers les bases.

- Des bases aux réorientations.

On rappelle que par convention,  $M$  étant un matroïde orienté, on note  $C_M^*(B; b)$ ,  $b \in B$ , le cocircuit de  $M$  ayant pour support le cocircuit fondamental de  $b$  dans  $B$  pour lequel  $b$  a un signe  $+$ , et  $C_M(B; e)$ ,  $e \notin B$ , le circuit de  $M$  ayant pour support le circuit fondamental de  $e$  dans  $B$  pour lequel  $e$  a un signe  $+$ .

**Lemme 3.1.**

*Soit un matroïde orienté  $M$  sur  $E$  et une base  $B = b_1 \dots b_r$  de  $M$ . Il existe exactement  $2^r$  réorientations  $A$  de  $M$  vérifiant la propriété suivante :*

*( $OB_{adj}$ ) 'adjacence'*

*Dans  $-_A M$ ,  $C^*(B; b_1)$ ,  $C^*(B; b_1) \circ C^*(B; b_2)$ , ...,  $C^*(B; b_1) \circ C^*(B; b_2) \circ \dots \circ C^*(B; b_r) = E$ , sont des covecteurs positifs.*

*Elles sont données par l'algorithme suivant.*

On note  $C_k^*$ ,  $1 \leq k \leq r$ , un cocircuit de  $M$  de support  $C^*(B; b_k)$ .

Pour  $k$  variant de 1 à  $r$  faire

réorienter éventuellement les éléments de  $C_k^* \setminus \cup_{i < k} C_i^*$

pour avoir dans  $C_k^*$  tous les éléments de  $C_k^* \setminus \cup_{i < k} C_i^*$  de même signe.

*Preuve.* Soit  $C = C^*(B; b_1) \circ C^*(B; b_2) \circ \dots \circ C^*(B; b_r)$ . Soit  $A = C^-$ . Alors  $-_A C$  est un covecteur positif de  $-_A M$ .

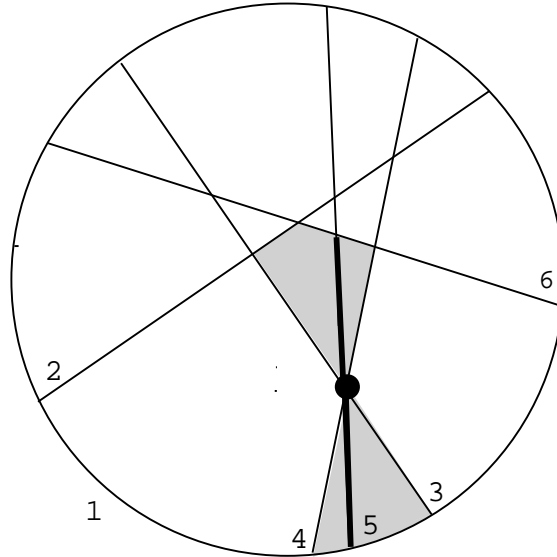
Soit  $A_1 = C^*(B; b_1)$  et  $A_k = C^*(B; b_1) \cup C^*(B; b_2) \cup \dots \cup C^*(B; b_k) \setminus C^*(B; b_1) \cup C^*(B; b_2) \cup \dots \cup C^*(B; b_{k-1})$  pour  $2 \leq k \leq r$ . Pour qu'une réorientation de  $-_{A'} -_A M$

vérifie la propriété voulue,  $A'$  doit être une union  $\cup_{i \in I} A_i$ . Réciproquement toutes ces réorientations vérifient la propriété voulue : il suffit de composer les cocircuits fondamentaux en les remplaçant par leur opposé pour les indices appartenant à  $I$ . Il y a donc  $2^r$  réorientations possibles.

□

*Interprétation géométrique.* Les fermés du matroïde sont les complémentaires des supports des covecteurs (unions de cocircuits). Géométriquement, on dit qu'un fermé touche (ou est adjacent) une région si son intersection avec la fermeture de la région est de même dimension que le fermé (cf. Préliminaires). Autrement dit un fermé touche une région si il est le complémentaire du support d'un covecteur positif pour la réorientation du matroïde orienté correspondant à cette région (i. e. celle pour laquelle la région est un covecteur maximal positif).

Etant donnée une base  $B$ , les  $E \setminus C^*(B; b_1) \supset E \setminus (C^*(B; b_1) \cup C^*(B; b_2)) \supset \dots \supset E \setminus (C^*(B; b_1) \cup C^*(B; b_2) \cup \dots \cup C^*(B; b_r)) = \emptyset$  forment une suite de  $r$  fermés emboîtés. La signification géométrique du lemme précédent est qu'il existe exactement  $2^r$  régions touchant chacun de ces fermés (ou, autrement dit, qui soient adjacentes à cette suite de fermés). On peut facilement s'en convaincre par un dessin. Il faut cependant faire attention au fait que le fermé  $C^*(B; b_1)$  correspond géométriquement à deux sommets opposés dans une représentation topologique par arrangement de pseudosphères. On aura donc  $2^{r-1}$  régions pour chacun de ces deux sommets opposés.



**Figure 3.1 : illustration du lemme 3.1**

*Exemple.* Sur la Figure 3.1, la base considérée est  $1 < 3 < 5$ . Les 4 régions grisées sont les régions obtenues par le lemme 3.1 dans l'hémisphère représenté. Pour ces régions on doit avoir un cocircuit positif  $C^*(135; 1)$ , et un covecteur positif  $C^*(135; 1) \circ C^*(135; 5)$ , c'est-à-dire qu'elles doivent toucher le rond noir ( $C^*(135; 1)$ ) et le segment gras (ensemble des faces correspondant au fermé  $E \setminus C^*(135; 1) \circ C^*(135; 5)$  et touchant le rond noir).

**Proposition 3.2.** (définition de  $Basori_M^{(1,0)}$ )

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné (connexe) sur  $E = e_1 < e_2 < \dots < e_n$ . Soit  $B = b_1 < b_2 < \dots < b_r$  une base d'activités (1,0), avec  $E \setminus B = c_1 < \dots < c_{n-r}$ .

Il existe exactement deux réorientations opposées  $A$  et  $E \setminus A$  de  $M$  vérifiant les propriétés suivantes :

$(OB_{adj})$  'adjacence'

Dans  $-_A M = -_{E \setminus A} M$ ,  $C^*(B; b_1)$ ,  $C^*(B; b_1) \circ C^*(B; b_2)$ , ...,  $C^*(B; b_1) \circ C^*(B; b_2) \circ \dots \circ C^*(B; b_r) = E$ , sont des covecteurs positifs.

$(OB_{adj}^*)$  'adjacence duale'

Dans  $-_{e_1}(-_A M) = -_{e_1}(-_{E \setminus A} M)$ ,  $C(B; c_1)$ ,  $C(B; c_1) \circ C(B; c_2)$ , ...,  $C(B; c_1) \circ C(B; c_2) \circ \dots \circ C(B; c_{n-r}) = E$ , sont des vecteurs positifs.

Ces deux réorientations sont acycliques d'activité duale 1.

Elles sont construites par l'un des deux algorithmes équivalents suivants :

(i)

On note  $C_k^*$ ,  $1 \leq k \leq r$ , un cocircuit de  $M$  de support  $C^*(B; b_k)$ .

Réorienter éventuellement les éléments de  $C_1^*$  pour avoir  $C_1^*$  positif ou négatif.

Pour  $k$  variant de 2 à  $r$  faire

réorienter éventuellement les éléments de  $C_k^* \setminus \cup_{i < k} C_i^*$   
pour avoir dans  $C_k^*$  tous les éléments de  $C_k^* \setminus \cup_{i < k} C_i^*$   
de même signe opposé à celui de  $\min(C_k^*)$ .

(ii)

On note  $C_k$ ,  $1 \leq k \leq n - r$ , un circuit de  $M$  de support  $C(B; c_k)$ .

Pour  $k$  variant de 1 à  $n - r$  faire

réorienter éventuellement les éléments de  $C_k \setminus \cup_{i < k} C_i$   
pour avoir dans  $C_k$  tous les éléments de  $C_k \setminus \cup_{i < k} C_i$   
de même signe opposé à celui de  $\min(C_k)$ .

*Preuve.*

Dans  $M$  connexe il existe une base d'activités (1,0) (proposition 0.4), et on doit avoir  $f_1 = e_1 = b_1$ . On montre qu'il existe une unique réorientation  $A$  satisfaisant la proposition avec  $f_1 \in A$ . Puisqu'il est évident que si  $A$  est solution,  $E \setminus A$  l'est aussi, ceci prouvera la proposition. On va montrer en particulier que pour une base  $B$  d'activités (1,0), les cocircuits fondamentaux vérifient  $C^*(B; b)^< \subseteq \cup_{b' \in B, b' < b} C^*(B; b')$  où  $C^*(B; b)^< = \{e < b, e \in C^*(B; b)\}$ . C'est cette forme particulière de graphe fondamental pour une base d'activités (1,0) qui permet ces algorithmes.

Si l'on exécute l'algorithme (i) sans tenir compte de à l'étape  $k$  du "signe opposé à celui de  $\min(C_k^*)$ ", on construit les  $2^r$  réorientations satisfaisant  $(OB_{adj})$  du lemme 3.1. Si on impose en plus  $\min(C_1^*) = f_1 \in C_1^{*+}$  et pour tout  $k > 1$ ,  $\min(C_k^*)$  du

signe opposé à  $b_k$  dans  $C_k^*$ , on construit une unique réorientation, car pour  $k > 1$ ,  $\min(C_k^*) \notin B$  ( $\iota(B) = 1$ ), et donc  $\min(C_k^*) \in \cup_{i < k} C_i^*$  ( $\varepsilon(B) = 0$  donc  $\min(C_k^*)$  n'est pas le plus petit de son circuit fondamental, c'est-à-dire appartient à un cocircuit fondamental  $C_i^*$  pour un  $i < k$ ).

D'autre part, si  $k > 1$  et  $a = \min(C_k^*)$ , et  $C_i = C(B; a)$ , on a  $b_k \in C_i$  et  $b_k \notin C_j$  pour  $j < i$ . Donc si  $(OB_{\text{adj}}^*)$  est satisfaite, alors l'orthogonalité de  $C_1 \circ C_2 \circ \dots \circ C_i$  et de  $C_k^*$  impose  $a$  et  $b_k$  de signes opposés dans  $C_k^*$ . Réciproquement si pour tout  $k > 1$ ,  $a = \min(C_k^*) = c_i$  et  $b_k$  de signes opposés dans  $C_k^*$ , alors l'orthogonalité de  $C_1 \circ C_2 \circ \dots \circ C_i$  et de  $C_k^*$  impose  $a$  et  $b_k$  de même signe dans  $C_i$  et la condition  $(OB_{\text{adj}}^*)$  est satisfaite.

Ceci prouve que  $A$  avec  $f_1 \notin A$  est uniquement déterminée par l'algorithme (i). Pour l'algorithme (ii) on fait exactement les mêmes raisonnements de façon duale.

Enfin dans la réorientation obtenue, on a un covecteur maximal positif, donc elle est acyclique, et on a un vecteur maximal avec unique élément négatif  $f_1$ . Par orthogonalité, tout cocircuit positif contient  $f_1$ , donc elle est d'activité duale 1.  $\square$

*Définition.* Avec les notations de la proposition précédente, on définit alors

$$Basori_M^{(1,0)}(B) = \{A, E \setminus A\}$$

pour toute base  $B$  de  $M$  d'activité interne 1 et externe 0,  $A$  et  $E \setminus A$  étant les deux réorientations opposées contruites par la proposition précédente.

*Remarques.*

- Ces algorithmes sont *deux algorithmes duaux* car via les bijections des propriétés 0.6 et 0.9, appliquer (i) (resp. (ii)) à  $B$  dans  $M$  revient à appliquer (ii) (resp. (i)) à  $(E \setminus B) \setminus f_2 \cup f_1$  dans  $M^*$ .

- Il faut noter que les réorientations calculées ne dépendent que du graphe fondamental de  $B$ , et de la signature des cocircuits fondamentaux (ou des circuits qui s'en déduisent), mais pas de tout le matroïde orienté.

- Dans le chapitre 5 cette proposition et son corollaire (ci-après) sont reformulés dans le formalisme matriciel de la programmation linéaire en termes de 'tableau fondamental' d'une base.

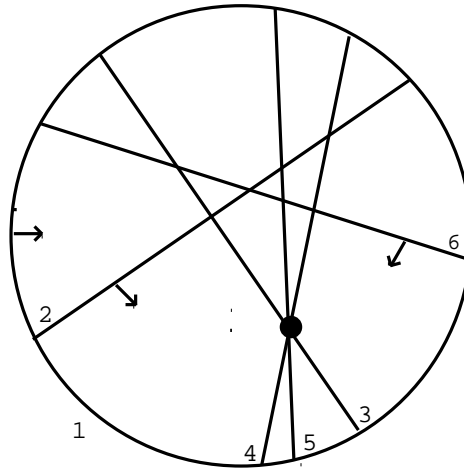
*Exemples.*

- La Figure 3.2 illustre l'application de l'algorithme (i) sur un exemple de matroïde orienté de rang 3 (le même que dans la Figure 3.1). La base considérée est  $1 < 3 < 5$ , ses cocircuits fondamentaux successifs sont représentés par des ronds noirs de taille décroissante. A la première étape on oriente les éléments de  $C^*(135; 1)$  vers le sommet correspondant (en choisissant le sommet de l'hémisphère opposé on aurait obtenu la réorientation opposée). Pour  $C^*(135; 3)$  et  $C^*(135; 5)$ , on a représenté (parmi les deux sommets opposés possibles) celui pour lequel 2 est négatif. Ainsi à chaque étape suivante on doit orienter les éléments (qui ne l'ont pas encore été) vers le sommet correspondant au cocircuit considéré.

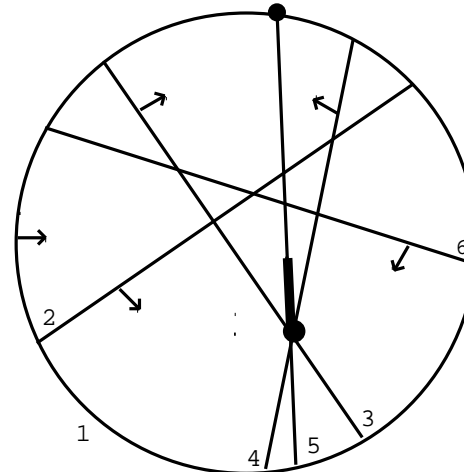
- Sur la Figure 6.2.1 du chapitre 6 partie 2, ces deux algorithmes duaux sont appliqués en parallèle dans un graphe au même arbre couvrant.

Base 135

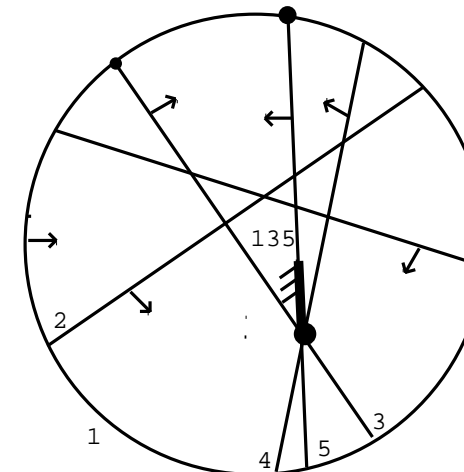
Etape 1



Etape 2



Etape 3

Figure 3.2 : algorithme géométrique (i) de 3.2 définissant  $Basori_M^{(1,0)}$



*Interprétation géométrique.* - Structurellement. D'après le lemme 3.1 précédent il existe d'une part  $2^r$  réorientations satisfaisant la propriété  $(OB_{adj})$  (elles sont acycliques, ce sont  $2^r$  régions d'une représentation topologique de  $M$  touchant la suite de fermés définie par  $B$ ), et il existe d'autre part  $2^{n-r}$  réorientations de  $-_{f_1} M^*$  satisfaisant la propriété  $(OB_{adj})$  pour  $M^*$  (elles sont totalement cycliques pour  $M$ , ce sont  $2^{n-r}$  régions d'une représentation topologique de  $M^*$  touchant la suite de fermés définie par  $E \setminus B$ ).

La proposition précédente affirme que seules deux réorientations opposées du premier ensemble donnent une réorientation du deuxième par réorientation de  $f_1$ .

- Algorithmiquement. Une base  $B = b_1 < \dots < b_r$  découpe l'espace en  $2^r$  régions : on appelle *hyperoctants* définis par  $B$  les  $2^r$  ensembles des covecteurs ayant les mêmes signes pour tous les éléments de  $B$ . Si l'on fixe l'orientation de  $b_1$ , le lemme 3.1 indique qu'il existe  $2^{r-1}$  régions satisfaisant la propriété d'adjacence, une dans chaque hyperoctant du côté choisi de  $b_1$ . Pour  $B$  d'activités  $(1,0)$ , il reste donc à choisir un hyperoctant particulier devant contenir la région associée à  $B$  : c'est ce que fait l'algorithme (i). Les fermés de rang  $r-2$  engendrés les  $B \setminus \{bf_1\}$  pour  $b \in B \setminus f_1$ , sont des pseudodroites (demis-pseudocercles du côté choisi de  $f_1$ ) qui ont pour extrémités  $C^*(B; b)$  et  $-C^*(B; b)$ . On se restreint alors successivement aux hyperoctants pour lesquels, dans  $C^*(B; b)$ ,  $b$  et  $f_k = \min(C^*(B; b))$  sont de signes opposés, c'est-à-dire pour lesquels l'élément  $f_k$  sépare  $C^*(B; b)$  et  $C^*(B; b')$  sur la pseudodroite définie par  $C^*(B; b)$  et  $C^*(B; b')$ , où  $b' < b$  est le plus petit possible tel que  $f_k \in C^*(B; b')$ . L'élément  $b'$  a déjà été éventuellement réorienté (i. e.  $C^*(B; b')$  a déjà été choisi parmi les deux opposés), c'est l'élément dont la réorientation a décidé de celle de  $f_k$ .

Il y a en général de nombreuses situations possibles, qui correspondent aux différentes formes que peut prendre le graphe fondamental de la base (et qui sont la difficulté du théorème de bijectivité suivant). Toutes les situations possibles en rang 3 sont données dans le chapitre 6 partie 4, illustrées sur un même exemple significatif (celui de la Récréation). La Figure 3.3 donne quelques exemples de situations géométriques possibles en rang 4.

La suite de covecteurs positifs de l'algorithme 3.2 (i) est représentée sur le dessin (i) par une suite de faces : un rond noir, un segment gras, un triangle gris, et un tétraèdre gris foncé, qui définissent la région associée à la base dans l'hyperoctant représenté.

Le dessin (ii) représente le cas le plus simple :  $f_2$  appartient à tous les cocircuits fondamentaux, et  $f_2$  coupe tous les segments  $[C^*(B; f_1), C^*(B; b)]$  pour  $b \in B - f_1$ . C'est la seule situation possible dans le cas uniforme (cf. chapitre 6 partie 1), où (autrement dit) l'hyperoctant choisi est le seul qui a une intersection bornée avec  $f_2$ .

Sur les dessins (i), (iii), (iv) et (v), on a  $\min(C^*(B; b_2)) = f_2$ , et  $f_2$  coupe le segment  $[C^*(B; f_1), C^*(B; b_2)]$ .

Sur le dessin (i), on a  $\min(C^*(B; b_3)) = \min(C^*(B; b_4)) = f_3$ , et  $f_3$  coupe les segment  $[C^*(B; f_1), C^*(B; b_3)]$ , et  $[C^*(B; f_1), C^*(B; b_4)]$ .

Sur le dessin (iii), on a  $\min(C^*(B; b_3)) = \min(C^*(B; b_4)) = f_3$ , mais cette fois  $f_3 \notin C^*(B; f_1)$ , et  $f_3$  coupe les segment  $[C^*(B; b_2), C^*(B; b_3)]$ , et  $[C^*(B; b_2), C^*(B; b_4)]$ .

Sur le dessin (iv), on a  $\min(C^*(B; b_3)) = f_4$ , et  $f_4$  coupe le segment

$[C^*(B; f_1), C^*(B; b_3)]$ ,  $\min(C^*(B; b_4)) = f_3$ , et  $f_3$  coupe le segment  $[C^*(B; f_1), C^*(B; b_4)]$ .

Sur le dessin (v), on a  $\min(C^*(B; b_3)) = f_4$ , et  $f_4$  coupe les segment  $[C^*(B; f_1), C^*(B; b_3)]$ ,  $\min(C^*(B; b_4)) = f_3$ , mais  $f_3 \notin C^*(B; f_1)$ , et  $f_3$  coupe le segment  $[C^*(B; b_2), C^*(B; b_4)]$ .

Il peut aussi arriver que l'on ait  $B \cap B_{\min} \setminus f_1 \neq \emptyset$ .

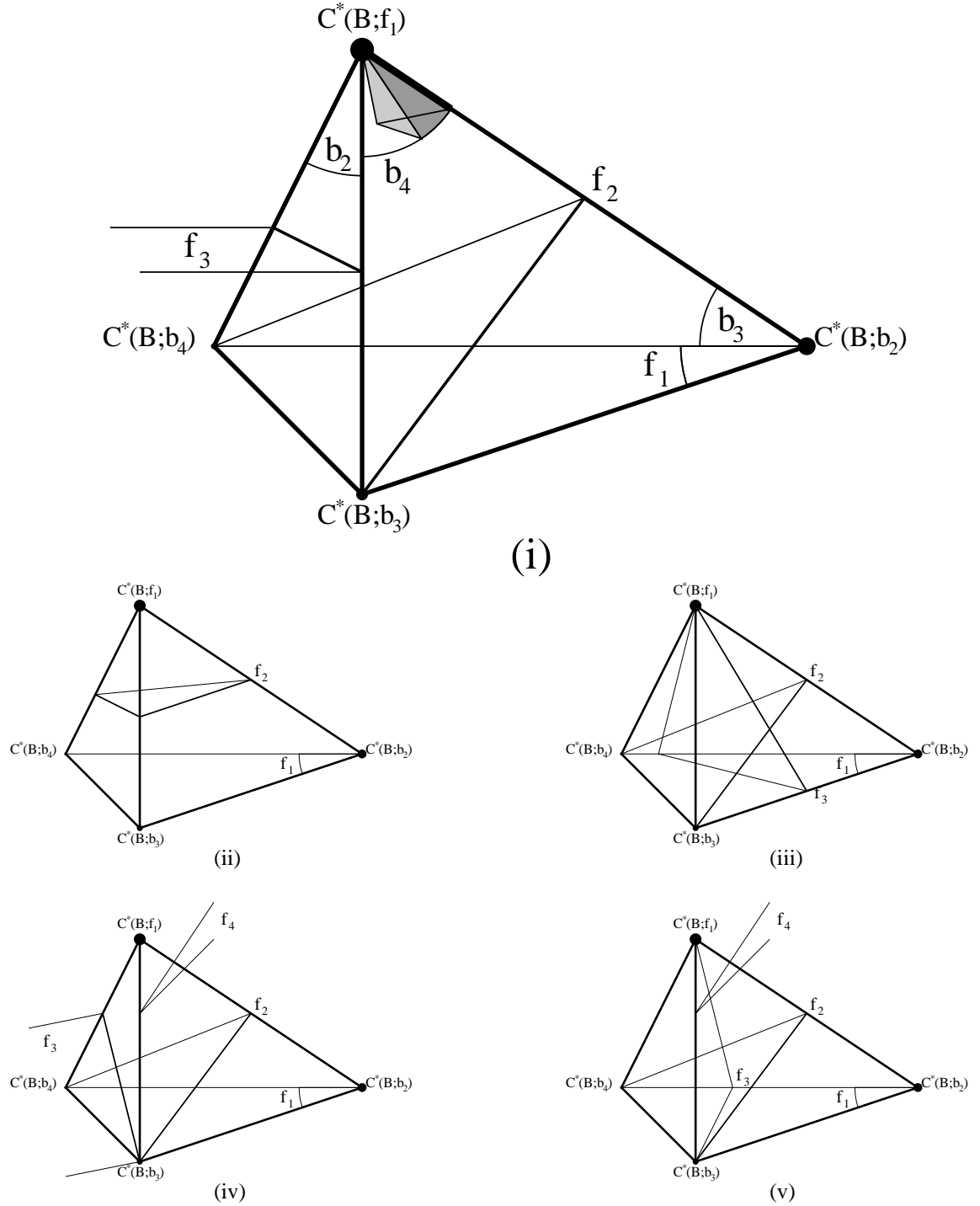


Figure 3.3 : quelques situations possibles en rang 4

Enfin cette interprétation géométrique peut se faire aussi dans le dual, exactement de la même façon, simplement en réorientant  $f_1$  (cf. début de l'interprétation géométrique).

### Corollaire 3.3.

Pour une base  $B$  d'activités (1,0) de  $M$ , les deux réorientations opposées  $Basori_M^{(1,0)}(B)$  sont définies par l'algorithme suivant.

Définition directe de  $Basori_M^{(1,0)}(B)$

Réorienter éventuellement  $e_1$  (arbitrairement).

Pour  $k$  variant de 2 à  $n$  faire

si  $e_k \in B$  alors soit  $a = \min(C^*(B; e_k))$

réorienter éventuellement  $e_k$

pour avoir  $a$  et  $e_k$  de signes opposés dans  $C^*(B; e_k)$

si  $e_k \notin B$  alors soit  $a = \min(C(B; e_k))$

réorienter éventuellement  $e_k$

pour avoir  $a$  et  $e_k$  de signes opposés dans  $C(B; e_k)$

□

Le théorème suivant établit que  $Basori^{(1,0)}$  induit une bijection prouvant  $2b_{1,0} = o_{1,0}$ . On pourra aussi consulter la partie 8.1 où cette preuve est refaite dans le cas beaucoup plus simple des matroïdes uniformes. On utilisera deux lemmes. Le premier, appelé 'lemme des croissants', fait ressortir une propriété géométrique des matroïdes orientés, où l'ordre n'intervient pas. Il peut apparaître comme la clé de voûte de cette thèse, duquel vient d'abord la bijection de ce chapitre et au delà la cohérence des diverses constructions de l'application *Oribas*.

### Lemme 3.4. (lemme des croissants)

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné sur  $E$ , soient  $B = bb_2...b_r$  and  $B' = bb'_2...b'_r$  deux bases de  $M$  avec un élément  $a \in E \setminus (B \cup B')$ .

On note  $D = C^*(B; b)$ ,  $D' = C^*(B'; b)$ ,  $C = C(B; a)$ , et  $C' = C(B'; a)$  et on suppose que :

(i)

$$(B' \cap D) \subseteq D^+$$

(ii)

$$(B \cap D') \subseteq D'^+$$

(iii)

$$(B' \cap D \cap C') - b \cup a \subseteq C'^+$$

(iv)

$$(B \cap D' \cap C) - b \cup a \subseteq C^+$$

Alors

$$B \cap D' \cap C - b = \emptyset$$

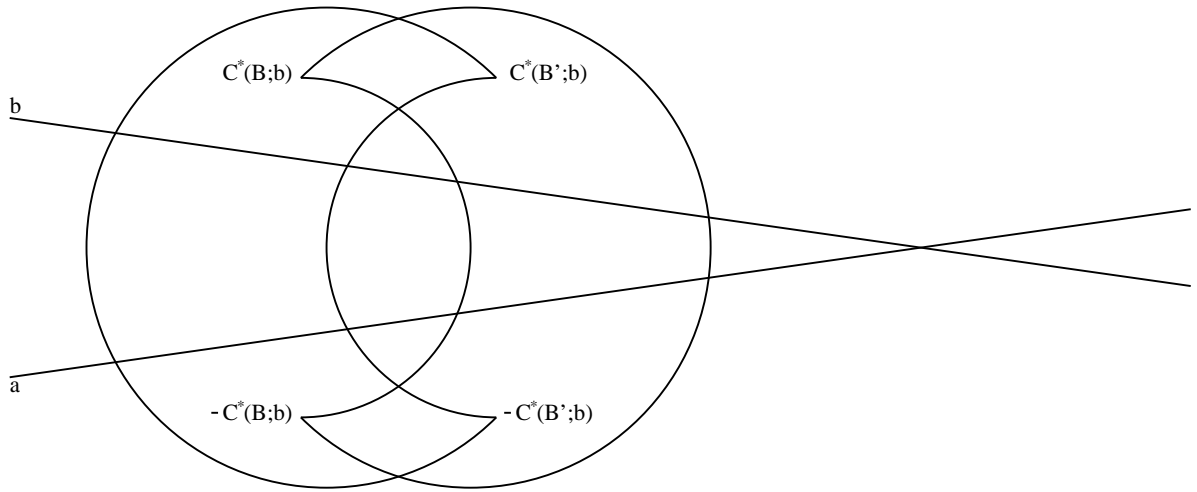
$$B' \cap D \cap C' - b = \emptyset$$

*Preuve.*

Soit  $D''$  un cocircuit obtenu en éliminant  $b$  entre  $-D$  et  $D'$ . D'après (i) et (ii), on a  $B \cap D'' \subset D''^+$  et  $B' \cap D'' \subset D''^-$ , et aussi  $(C - a) \cap D'' \subset B \cap D'' \subset D''^+$ .

Si  $a \in D''$  alors par (iv)  $(C \cap D'' \subset (C - b) \cap D' + a \subset C^-$ . Par suite  $a \in D''^-$ . Par symétrie  $a \in D''^+$ , ce qui est contradictoire. Donc  $a \notin D''$ . Et en conséquence  $C \cap D'' = \emptyset$  et  $C' \cap D'' = \emptyset$ .

Pour tout  $e \in D \Delta D'$ , soit  $D_e''$  un cocircuit obtenu par élimination forte de  $b$  entre  $-D$  et  $D'$  conservant  $e$ . On a  $(B \cap D' - b) \subseteq (D' \setminus D)$  et  $(B' \cap D - b) \subseteq (D \setminus D')$ . donc  $((B \cap D') \cup (B' \cap D) - b) \subseteq \bigcup_{e \in D \Delta D'} D_e''$ . Donc  $C$ , contenu dans le complémentaire de  $\bigcup_{e \in D \Delta D'} D_e''$ , ne rencontre pas  $B \cap D' - b$ , et de même  $C'$  ne rencontre pas  $B' \cap D - b$ , ce qui est la conclusion du lemme.  $\square$



**Figure 3.4 : figure impossible (lemme des croissants 3.4)**

Ce lemme 3.4 s'appelle *lemme des croissants* car l'ensemble des covecteurs ayant les mêmes signes (au sens large) sur  $B \setminus b$  ressemble à un croissant de sommets  $C^*(B; b)$  et  $-C^*(B; b)$ , coupé par  $b$ . En simplifiant, le lemme exprime que si deux croissants, coupés par un même élément  $b$ , ont chacun leurs sommets dans l'autre, alors il n'existe pas d'élément  $a$  coupant les deux croissant du même côté de  $b$ .

Autrement dit, il exprime l'impossibilité d'avoir dans une représentation topologique d'un matroïde orienté par un arrangement de pseudosphères une figure du genre de la Figure 3.4. Sur cette figure, avec les notations du lemme, les droites coupant les deux croissants représentent les pseudosphères  $a$  et  $b$ , les deux arcs de cercles définissant chaque croissant représentent respectivement les ensembles de pseudosphères  $B - b$

et  $B' - b$ , et les sommets des croissants représentent respectivement  $C^*(B; b)$  et  $C^*(B'; b)$ .

**Lemme 3.5.**

Soient  $B = b_1 < \dots < b_r$  et  $B' = b'_1 < \dots < b'_r$  deux bases d'activités (1,0), distinctes, de  $M$ . Alors il existe  $i$  le plus petit possible tel que  $C^*(B; b_i) \neq C^*(B'; b'_i)$  et pour tout  $j \leq i$ ,  $b_j = b'_j$ .

*Preuve.* D'abord  $b_1 = b'_1 = f_1$ . Si  $C^*(B; b_k) = C^*(B'; b'_k)$  pour tout  $k < i$ , alors avec  $D = \cup_{k < i} C^*(B; b_k)$  on a  $b_i = b'_i = \min(E - D)$  (sinon il est extérieurement actif). On peut donc définir  $i$  le plus petit élément tel que  $C^*(B; b_i) \neq C^*(B'; b'_i)$  (sinon  $B = B'$ ) et de plus pour tout  $k \leq i$  on a  $b_k = b'_k$ .  $\square$

**Théorème 3.6.** (théorème fondamental)

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné. L'application  $Basori_M^{(1,0)}$  induit une bijection entre les bases de  $M$  d'activités (1,0) et les paires de réorientations opposées de  $M$  d'activités (1,0).

*Preuve.* Il suffit de montrer l'injectivité de  $Basori^{(1,0)}$ , la bijectivité se déduit alors de l'égalité des cardinaux  $2b_{0,1} = o_{0,1}$  (une preuve bijective de cette égalité est donnée par le corollaire 1.8). Supposons que deux bases distinctes  $B = b_1 < b_2 < \dots < b_r$  et  $B' = b'_1 < \dots < b'_r$  internes d'activité 1 aient la même image.

Soit  $b = b_i = b'_i$  défini dans le précédent lemme 3.5. Soit  $D = C^*(B; b)$  et  $D' = C^*(B'; b)$ . Soit alors

$$a = \min \left( \{ \min(C^*(B; e)), e \in B \cap D' - b \} \cup \{ \min(C^*(B'; e)), e \in B' \cap D - b \} \right)$$

$a$  existe :

supposons  $D \cap B' = b$  et  $D' \cap B = b$ . Alors  $B' \setminus b \subseteq E \setminus D$  qui est l'hyperplan de  $M$  engendré par  $B \setminus b$ ; et  $B \setminus b \subseteq E \setminus D'$  qui est l'hyperplan de  $M$  engendré par  $B' \setminus b$ . Donc  $cl(B' \setminus b) = cl(B \setminus b)$  et  $D = D'$ , ce qui contredit la définition de  $i$ .

$a \notin (B \cup B')$  :

supposons  $a = \min(C^*(B; e))$  pour  $e \in B \cap D' - b$ . Alors  $a \notin B$ , sinon  $a$  est intérieurement actif et  $a = e_1 = b$  ce qui contredit sa définition. Si  $a \in B'$ , alors  $a \notin D$  sinon  $\min(C^*(B'; a)) \leq a$  et  $a$  est intérieurement actif : même contradiction. De plus  $a > b$  (sinon  $a \in B$ ), et donc  $a \notin D'$ . Soit  $f \in C(B; a) \cap D'$ , alors  $f \neq b$  car  $a \notin D$ ,  $f \neq a$  car  $a \notin D'$ , donc  $f \in B \cap D' - b$  et donc  $\min(C^*(B; f)) = a$ . Donc  $f$  est réorienté en même temps que  $a$  dans le second algorithme définissant  $Basori^{(1,0)}$  appliqué à  $B$  (proposition 3.2), c'est-à-dire  $f$  a le même signe que  $a$  dans un cocircuit  $C$  dont le support est  $C(B; a)$  :  $C \cap D' \subseteq C^+$  si  $a \in C^+$ . Mais d'un autre côté,  $f \in D'$  et  $f \notin C^*(B'; b'_k) = C^*(B; b_k)$  pour  $b'_k < b$  parceque  $f \in B$ . Ainsi  $f$  est réorienté à la même étape que  $b$  dans le premier algorithme de la proposition 3.2 appliqué à  $B'$ , c'est-à-dire  $C \cap D' \subseteq D'^+$  si  $b \in D'^+$ . Ceci contredit l'orthogonalité.

$B' \cap D \subseteq D^+ :$

pour tout  $b'_k < b$ ,  $b'_k = b_k$  donc  $b'_k \notin D$ . Pour tout  $b'_k > b$ , si  $b'_k \in D$  alors  $b'_k \notin B$ . Si  $b'_k \in D^-$  (i. e. si  $b'_k$  et  $b$  ont des signes opposés dans  $D$ ) alors par construction (proposition 3.2) il existe  $b_j < b$  avec  $b'_k \in C^*(B; b_j) = C^*(B; b'_j)$ , donc  $b'_k = b'_j$  et  $k = j$  ce qui est impossible.

$B \cap D' \subseteq D'^+ :$

symétriquement.

Soit  $C = C(B; a)$  et  $C' = C(B'; a)$ .

$(B' \cap D \cap C') - b \cup a \subseteq C'^+ :$

si  $b'_k \in (B' \cap D \cap C') - b$  alors  $a \in C^*(B'; b'_k)$  et  $a = \min C^*(B'; b'_k)$  par définition de  $a$ , et donc  $b'_k$  est réorienté à la même étape que  $a$  dans le premier algorithme de la proposition 3.2 appliqué à  $B'$  c'est-à-dire  $b'_k \in C'^+$ .

$(B' \cap D \cap C) - b \cup a \subseteq C^+ :$

symétriquement.

On applique alors le lemme des croissants 3.4 à  $B$  et  $B'$  ( $a$  jouant le rôle de  $a$  et  $b$  celui de  $b$ ). On déduit  $B \cap D' \cap C - b = \emptyset$  et  $B' \cap D \cap C' - b = \emptyset$  ce qui contredit la définition de  $a$ .  $\square$

*Définition.* Pour un matroïde orienté ordonné  $M$  sur  $E$ , d'activités (1,0), soit  $Oribas^{(1,0)}(M)$  l'unique base de  $M$  (théorème 3.6) telle que

$$Basori_M^{(1,0)}(Oribas^{(1,0)}(M)) = \{\emptyset, E\}$$

Pour  $A \subseteq E$ , et  $-_A M$  d'activités (1,0), soit

$$Oribas_M^{(1,0)}(A) = Oribas^{(1,0)}(-_A M)$$

de sorte que

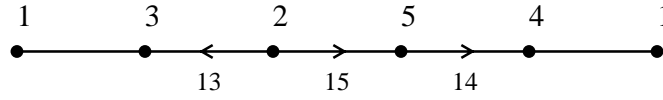
$$Basori_M^{(1,0)}(Oribas_M^{(1,0)}(A)) = \{A, E \setminus A\}$$

pour tout  $A \subseteq E$  tel que  $-_A M$  soit acyclique d'activité duale 1.

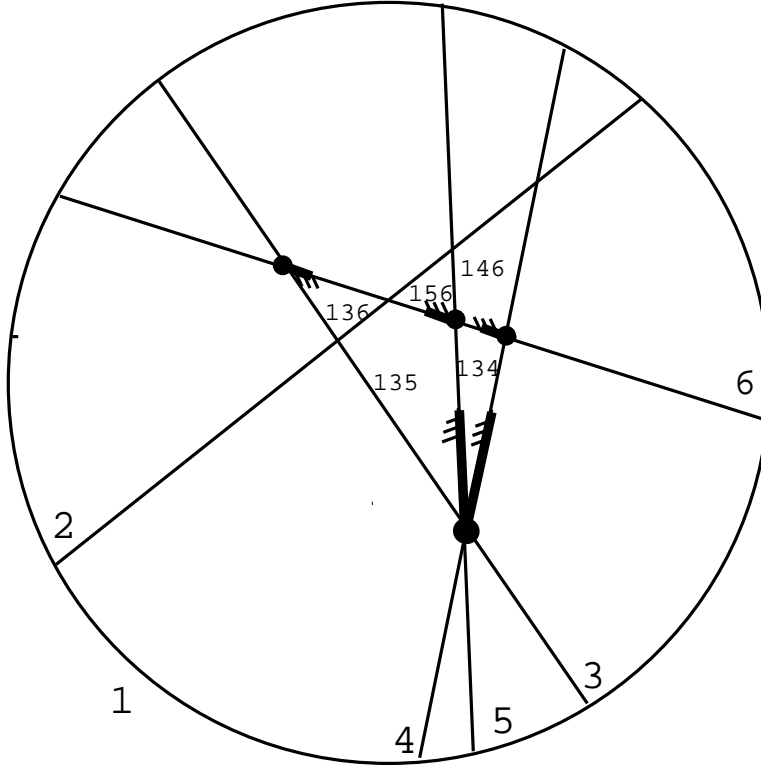
*Exemples.*

- Matroïde orienté de rang 2.

Dans un matroïde orienté de rang 2 (exemple Figure 3.5), la base minimale d'activité 2 est  $f_1 f_2$ . Les bases d'activités (1,0) sont les bases de la forme  $f_1 e$  où  $e \notin f_1 f_2$  n'est pas une boucle et est le plus petit de sa classe parallèle. Les régions d'activités (1,0) sont les pseudosegments (rang 2) qui ne touchent pas  $f_1$ . Dans un demi-pseudocercle délimité par  $f_1$ , la région associée à la base  $B = f_1 e$  doit toucher le sommet correspondant à  $C^*(f_1 e; f_1)$ , c'est-à-dire le point  $e$ , et doit vérifier  $f_2$  et  $e$  de signes opposés dans  $C^*(f_1 e; e)$ , c'est-à-dire que la région doit être entre les points  $f_2$  et  $e$ .



**Figure 3.5 :**  $Oribas^{(1,0)}$  d'un matroïde orienté de rang 2



**Figure 3.6 :** la bijection  $Oribas^{(1,0)}$

La bijection  $Oribas^{(1,0)}$  se calcule en orientant les pseudosegments depuis  $f_2$  vers  $f_1$  (flèches sur la Figure 3.5), la base associée à une région qui ne touche pas  $f_1$  est alors  $f_1 e$  où  $e$  est l'extrémité arrivée du pseudosegment selon cette orientation.

- La Figure 3.6 montre la bijection active  $Oribas^{(1,0)}$  pour l'exemple de la Figure 3.2. Les suites de covecteurs considérés dans la définition est représentée pour chaque région comme une suite de faces : un sommet, un segment et une zone hachurée, qui définissent la région associée.

Dans la construction précédente pour les matroïdes orientés de rang 2, l'idée est que l'on cherche le sommet de la région le plus éloigné de  $f_2$  et le plus proche de  $f_1$ . Ceci se généralise en rang supérieur en orientant de façon similaire les pseudosegments de l'arrangement (on obtient ainsi en général le cocircuit fondamental de  $f_1$  par rapport à la base cherchée). Le chapitre 5 reprend les constructions de cette partie en termes d'optimisation.

Le deuxième exemple illustre quant à lui l'idée que des suites de faces élémentaires se disposent aux bords des régions en fonction de l'ordre.

Il apparaît ainsi intuitivement que la disposition (bijective) par  $Oribas^{(1,0)}$  de suites de faces élémentaires dans les régions reflète un phénomène d'*attraction dirigée par l'ordre des éléments*. Cette idée est illustrée par le dernier dessin coloré de la Récréation.

- Des réorientations aux bases.

La calcul par induction de  $Oribas^{(1,0)}$ , des réorientations vers les bases, revient à spécifier le choix qui était arbitraire dans la définition inductive du corollaire 1.8 du chapitre 1.

Pour un matroïde orienté  $M$  d'activités (1,0) sur  $E$  de plus grand élément  $\omega$ , on note  $\lambda(M) = 1$  si  $\omega \in Oribas^{(1,0)}(M)$  et  $\lambda(M) = 0$  si  $\omega \notin Oribas^{(1,0)}(M)$ .

Le matroïde (orienté)  $U_{1,1}$  est le matroïde uniforme de rang 1 a un élément : c'est le matroïde réduit à un isthme.

### Propriété 3.7.

$(OB3^{(1,0)})$  'induction<sup>(1,0)</sup>'

Pour tout  $M \neq U_{1,1}$  matroïde orienté ordonné sur  $E$  d'activités (1,0) avec  $\omega = \max(E)$  :

si  $\omega \in Oribas(M)$  alors  $M/\omega$  d'activités (1,0) et  $Oribas(M/\omega) = Oribas(M) - \omega$  ;  
si  $\omega \notin Oribas(M)$  alors  $M \setminus \omega$  d'activités (1,0) et  $Oribas(M \setminus \omega) = Oribas(M)$ .

*Preuve.* Si  $\omega \in Oribas(M)$  alors  $Oribas(M) - \omega$  est une base de  $M/\omega$  dont les cocircuits fondamentaux sont les mêmes que dans  $M$  (propriété 0.1), et les circuits fondamentaux sont ceux de  $Oribas(M)$  dans  $\omega$  auxquels on enlève  $\omega$ . Leurs signes sont conservés, et ils satisfont donc la définition de  $Oribas(M/\omega)$  (proposition 3.2). Le cas  $\omega \notin Oribas(M)$  équivaut à  $\omega \in Oribas(M^*)$  se déduit par dualité ( $Oribas(M^*) = E \setminus Oribas(M)$ , propriété (OB4) 'dualité').  $\square$

### Théorème 3.8. (définition inductive de $Oribas^{(1,0)}$ )

L'application  $Oribas^{(1,0)}$  est l'unique application  $\psi$  qui à tout matroïde orienté d'activités (1,0) associe une de ses base vérifiant les quatre propriétés suivantes.

$(OB1^{(1,0)})$  'préservation des éléments actifs<sup>(1,0)</sup>'

Pour tout  $M$  d'activités (1,0),  $B = \psi(M)$  est une base d'activités (1,0) de  $M$ .

$(OB2^{(1,0)})$  'bijectivité<sup>(1,0)</sup>'

Pour tout  $M$  d'activités (1,0),  $\psi^{(1,0)}$  induit une bijection entre bases d'activités (1,0) et les paires de réorientations de  $M$  opposées d'activités (1,0).

$(OB3^{(1,0)})$  'induction<sup>(1,0)</sup>'

Pour tout  $M$  d'activités (1,0) avec  $\omega = \max(E(M))$  :

$\omega \in \psi(M)$  implique  $M/\omega$  d'activités (1,0) et  $\psi(M/\omega) = \psi(M) \setminus \omega$ ,

$\omega \notin \psi(M)$  implique  $M \setminus \omega$  d'activités (1,0) et  $\psi(M/\omega) = \psi(M)$ .



$(OB8^{(1,0)})$  ‘adjacence’

Pour tout  $M$  d’activités  $(1,0)$ , avec  $Oribas^{(1,0)}(M) = B = b_1 < \dots < b_r$ ,  $C^*(B; b_1)$ ,  $C^*(B; b_1) \circ C^*(B; b_2)$ , ...,  $C^*(B; b_1) \circ C^*(B; b_2) \circ \dots \circ C^*(B; b_r) = E$ , sont des covecteurs positifs de  $M$ .

La dernière propriété peut-être remplacée par

$(OB8^{(1,0)*})$  ‘adjacence duale’

Pour tout  $M$  d’activités  $(1,0)$  avec  $E \setminus Oribas^{(1,0)}(M) = E \setminus B = c_1 < \dots < c_{n-r}$ ,  $C(B; c_1)$ ,  $C(B; c_1) \circ C(B; c_2)$ , ...,  $C(B; c_1) \circ C(B; c_2) \circ \dots \circ C(B; c_{n-r}) = E$ , sont des vecteurs positifs de  $-_{f_1} M$ .

L’application  $Oribas^{(1,0)}$  satisfait la définition inductive suivante.

**Définition inductive de  $Oribas^{(1,0)}$**

Pour tout  $M$  un matroïde orienté ordonné sur  $E$  d’activités  $(1,0)$  avec  $\max(E) = \omega$ .

Si  $M = U_{1,1}$  alors  $Oribas^{(1,0)} = \omega$ .

Si  $M \neq U_{1,1}$  alors :

si  $o^*(-_{\omega}M) = 0$  alors  $\lambda(M) := 0$  ;

si  $o^*(-_{\omega}M) > 1$  alors  $\lambda(M) := 1$  ;

si  $o^*(-_{\omega}M) = 1$  alors :

**choix**

soit  $B' = Oribas^{(1,0)}(M \setminus \omega)$ ,  $C = C_M(B'; \omega)$  et  $e = \min(C)$

si  $\sigma_C(e) \neq \sigma_C(\omega)$  alors  $\lambda(M) := 0$  ;

si  $\sigma_C(e) = \sigma_C(\omega)$  alors  $\lambda(M) := 1$  ;

ou bien de façon équivalente :

soit  $B'' = Oribas^{(1,0)}(M/\omega)$ ,  $D = C_M^*(B'' \cup \omega; \omega)$  et  $e = \min(D)$

si  $\sigma_D(e) \neq \sigma_D(\omega)$  alors  $\lambda(M) := 1$  ;

si  $\sigma_D(e) = \sigma_D(\omega)$  alors  $\lambda(M) := 0$ .

**fin**

Si  $\lambda(M) = 0$  alors

$$Oribas^{(1,0)}(M) := Oribas^{(1,0)}(M \setminus \omega)$$

si  $\lambda(M) = 1$  alors

$$Oribas^{(1,0)}(M) := Oribas^{(1,0)}(M/\omega) \cup \omega$$

Il faut noter que si  $-_{\omega}M$  est d’activités  $(1,0)$ , cet algorithme construit en même temps  $Oribas(M)$  et  $Oribas(-_{\omega}M)$  :

$$\lambda(-_{\omega}M) = 1 - \lambda(M)$$

*Preuve.* D’après la propriété 3.7 et sa définition,  $Oribas^{(1,0)}$  satisfait les quatre propriétés de l’énoncé. On suppose alors qu’une application  $\psi$  satisfait ces quatre propriétés, on note  $\gamma(M) = 1$  si  $\omega \in \psi(M)$  et  $\gamma(M) = 0$  si  $\omega \notin \psi(M)$ .

Si les activités de  $M$  et  $-\omega M$  sont distinctes, comme  $o^*(M/\omega) \leq o^*(M \setminus \omega)$  (proposition 1.1) on déduit de (OB3<sup>(1,0)</sup>) : si  $o^*(-\omega M) = 0$  alors  $\gamma(M) := 0$  et si  $o^*(-\omega M) > 1$  alors  $\gamma(M) := 1$ .

On suppose désormais que  $o^*(-\omega M) = 1$ . Si  $\omega \in \psi(M)$  et  $\omega \in \psi(-\omega M)$ , alors  $\psi(M) = \psi(M/\omega) \cup \omega = \psi(-\omega M)$ , ce qui contredit la bijectivité (OB2<sup>(1,0)</sup>) à moins d'avoir  $E = \omega$  auquel cas  $M = U_{1,1}$  et  $\psi(M) = \omega$ . De même on ne peut pas avoir  $\omega \notin \psi(M)$  et  $\omega \notin \psi(-\omega M)$ . Ainsi on doit avoir  $\{\psi(M), \psi(-\omega M)\} = \{\psi(M/\omega), \psi(M \setminus \omega)\}$ , et en particulier  $\gamma(M) = 1 - \gamma(-\omega M)$ .

Soit  $B' = \psi(M \setminus \omega) = b_1 < \dots < b_r$ , et  $k$  le plus petit tel que  $\omega \in C_M^*(B'; b_k)$ , si  $C^*(B'; b_1), \dots, C^*(B'; b_1) \cup \dots \cup C^*(B'; b_r)$  sont supports de covecteurs positifs de  $M$  alors  $b_k$  et  $\omega$  sont de même signe dans  $C^*(B'; b_k)$ , c'est-à-dire de signes opposés dans  $C = C_M(B'; \omega)$ . Donc si  $\omega \notin \psi(M)$ , alors  $\psi(M) = \psi(M \setminus \omega)$  par (OB3<sup>(1,0)</sup>), et  $\sigma_C(e) \neq \sigma_C(\omega)$  par (OB8<sup>(1,0)</sup>) 'adjacence<sup>(1,0)</sup>'. Avec les notations de l'énoncé, on a montré (en passant à la contre apposée) : si  $\sigma_C(e) = \sigma_C(\omega)$  alors  $\gamma(M) = 1$ . Avec  $\gamma(M) = 1 - \gamma(-\omega M)$  et  $-\omega M \setminus \omega = M \setminus \omega$  on a donc aussi  $\sigma_C(e) \neq \sigma_C(\omega)$  alors  $\gamma(M) = 0$ .

Ainsi  $\psi$  doit satisfaire la définition inductive de l'énoncé où l'on ne tient pas compte du deuxième choix proposé. L'application  $\psi$  est déterminée de façon unique par cette définition, c'est donc  $Oribas^{(1,0)}$ .

D'autre part  $Oribas^{(1,0)}$  satisfait la propriété (OB8<sup>(1,0)\*</sup>) 'adjacence duale', par définition (proposition 3.2), et on fait le même raisonnement que ci-dessus de façon duale : Soit  $B'' = Oribas^{(1,0)}(M/\omega)$ ,  $E \setminus B'' = c_1 < \dots < c_{n-r}$  et  $k$  le plus petit tel que  $\omega \in C_M(B'' \cup \omega; c_k)$ , si  $C(B'' \cup \omega; c_1), \dots, C(B'' \cup \omega; c_1) \cup C(B'' \cup \omega; c_2) \cup \dots \cup C(B'' \cup \omega; c_{n-r})$ , sont supports de vecteurs positifs de  $-_{f_1} M$  alors  $c_k$  et  $\omega$  sont de même signe dans  $C(B'' \cup \omega; c_k)$ , c'est-à-dire de signes opposés dans  $D = C^*(B'' \cup \omega; \omega)$ . Donc si  $\omega \in \psi(M)$ , alors  $\psi(M) = \psi(M/\omega)$  par (OB3<sup>(1,0)</sup>), et  $\sigma_D(e) \neq \sigma_D(\omega)$  par (OB8<sup>(1,0)\*</sup>) 'adjacence duale'. c'est-à-dire si  $\sigma_D(e) = \sigma_D(\omega)$  alors  $\gamma(M) = 0$  et si  $\sigma_D(e) \neq \sigma_D(\omega)$  alors  $\gamma(M) = 1$ .

Les deux choix sont donc équivalents. Ceci prouve aussi que l'on pouvait remplacer la propriété 'adjacence' par la propriété 'adjacence duale', en faisant directement ce deuxième raisonnement.  $\square$

### Remarques.

- Par le 'critère de compatibilité<sup>(1,0)</sup>' 1.8, on sait que la définition inductive du théorème 3.8, telle qu'elle est écrite - et en ne considérant que l'un des deux 'choix' proposés - est bien définie, et produit une bijection pour les réorientations d'un matroïde orienté d'activités (1,0). En revanche, le fait que les deux 'choix' donnent la même bijection, et le fait que cette bijection coïncide avec  $Oribas^{(1,0)}$ , reposent de façon essentielle sur la 'bijectivité' de  $Oribas_M^{(1,0)}$  (c'est-à-dire sur le 'théorème fondamental' 3.6).

- Puisque  $Oribas^{(1,0)}$  satisfait les propriétés (OB1<sup>(1,0)</sup>), (OB2<sup>(1,0)</sup>) 'bijectivité<sup>(1,0)</sup>', et (OB3<sup>(1,0)</sup>), il satisfait le 'critère de compatibilité<sup>(1,0)</sup>' 1.8. La propriété supplémentaire (OB8<sup>(1,0)</sup>) 'adjacence' détermine le 'choix' qui restait arbitraire dans la définition inductive 1.8.

- Les deux choix équivalents correspondent à des points de vue 'duaux' : le premier fait en sorte que la propriété (OB8<sup>(1,0)</sup>) 'adjacence<sup>(1,0)</sup>' soit satisfaite pour

la réorientation parmi  $\{M, -_\omega M\}$  associée à  $Oribas(M \setminus \omega)$ , le second fait en sorte que la propriété  $(OB8^{(1,0)*})$  ‘adjacence duale $^{(1,0)}$ ’ soit satisfaite pour la réorientation parmi  $\{M, -_\omega M\}$  associée à  $Oribas(M/\omega) \cup \omega$ .

*Interprétation géométrique.* Par hypothèse d’induction  $M/\omega$  vérifie la propriété d’adjacence (au sens du lemme 3.1) :  $M/\omega$  adjacente à la suite de covecteur définie par la base ordonnée  $B'' = Oribas(M/\omega)$ , donc puisque  $\omega$  est adjacente  $M$ , on a  $M$  adjacente à  $B'' \cup \omega$  quelquesoit le ‘choix’. Par hypothèse d’induction on a aussi  $M \setminus \omega$  adjacente à  $B' = Oribas(M \setminus \omega)$ . Le choix est fait pour avoir dans ce cas aussi  $M$  adjacente à  $B'$ .

### Exemples.

- En reprenant l’exemple de la Figure 1.3, la région associée à 135 parmi les deux d’activité duale 1 doit être celle qui a pour frontière 5, et la région opposée par rapport à 6 est alors associée à 136.

- En reprenant l’exemple de la Figure 3.6, les deux régions d’activité duale 1 de  $M$  qui ont pour cocircuit positif 126 (rond noir intersection de 345) doivent être associées aux bases 134 et 135, comme dans  $M \setminus 6$ . Les autres régions d’activité duale 1 ont 6 pour frontière et sont associées à 136, 146, et 156, comme les régions induites dans  $M/6$  sont associées à 13, 14 et 15.

*Remarque.* En utilisant la bijection entre les bases d’activités (1,0) et les bases d’activités (0,1) (Proposition 0.6) et la bijection entre les réorientations d’activités (1,0) et les réorientations d’activités (0,1) (Proposition 0.9), on déduit immédiatement de  $Oribas^{(1,0)}$  une bijection entre les bases d’activités (0,1) et les réorientations d’activités (0,1).

Enfin, on mentionne qu’une propriété importante de ‘dualité forte’ de l’application  $Oribas^{(1,0)}$  (en liaison avec les activités (0,1)), ainsi que d’autres propriétés à remarquer, sont données dans le chapitre 4 partie 3.

# Chapitre 4

## La correspondance active canonique

Dans ce chapitre on définit l'application naturelle *Oribas* qui a un matroïde orienté ordonné associe une de ses bases. C'est une application  $\psi$  particulière parmi celles définies dans les chapitres 1 et 2 (deux classes générales de correspondances actives), dont la restriction aux réorientations d'activités  $(1, 0)$  d'un matroïde orienté ordonné donné est la bijection fondamentale du chapitre 3.

Dans la première partie, cette application est d'abord définie par sa réciproque, allant des bases du matroïde orienté vers ses réorientations. Cette définition est directe dans le sens où l'image d'une base se calcule facilement par récurrence sur son graphe fondamental (chapitres 2 et 3). Dans la deuxième partie, pour définir la base image d'un matroïde orienté ordonné, on utilise inductivement les mineurs obtenus en supprimant ou en contractant le plus grand élément, de façon plus précise que dans le chapitre 1. En troisième partie on récapitule les propriétés de la correspondance active canonique. En dernière partie se trouvent des compléments : une bijection active induite sur l'hypercube, la complexité algorithmique des constructions, et l'exemple significatif d'une autre correspondance active.

### 4.1 Des bases aux réorientations : définition directe

L'application *Oribas* est définie sur l'ensemble des matroïdes orientés ordonnés, en appliquant le théorème d'extension 2.3.1 à l'application  $Oribas^{(1,0)}$  (définie par le 'théorème fondamental' 3.6).

*Définitions.*

L'application  $Oribas^{(1,0)}$  est l'unique application qui a un matroïde orienté ordonné d'activités  $(1, 0)$  associe une de ses bases vérifiant les propriétés suivantes (proposition 3.2 et théorème 3.6):

$(OB1^{(1,0)})$  'préservation des éléments actifs $^{(1,0)}$ ,

Pour tout  $M$  d'activités  $(1, 0)$ ,  $B = Oribas^{(1,0)}(M)$  est une base d'activités  $(1, 0)$  de  $M$

$(OB8^{(1,0)})$  'adjacence'

Pour tout  $M$  d'activités  $(1, 0)$ , avec  $Oribas^{(1,0)}(M) = B = b_1 < \dots < b_r$ , les parties  $C^*(B; b_1)$ ,  $C^*(B; b_1) \circ C^*(B; b_2)$ , ...,  $C^*(B; b_1) \circ C^*(B; b_2) \circ \dots \circ C^*(B; b_r) = E$ , sont des covecteurs positifs de  $M$ .

$(OB8^{(1,0)*})$  'adjacence duale'

Pour tout  $M$  d'activités  $(1, 0)$  avec  $E \setminus Oribas^{(1,0)}(M) = E \setminus B = c_1 < \dots < c_{n-r}$ , les parties  $C(B; c_1)$ ,  $C(B; c_1) \circ C(B; c_2)$ , ...,  $C(B; c_1) \circ C(B; c_2) \circ \dots \circ C(B; c_{n-r}) = E$ , sont des vecteurs positifs de  $-_{f_1} M$ .

L'application *Oribas* est l'unique application qui a un matroïde orienté ordonné associe une de ses bases vérifiant les propriétés suivantes (théorème d'extension 2.3.1) :

(OB1<sup>(1,0)</sup>) 'préservation des éléments actifs<sup>(1,0)</sup>,

(OB8<sup>(1,0)</sup>) 'adjacence'

(OB8<sup>(1,0)\*</sup>) 'adjacence duale'

(OB5) 'décomposition'

Pour tout  $M$  ayant pour suite décomposante associée  $\emptyset = F_\varepsilon^* \subset \dots \subset F_0^* = F_c = F_0 \subset \dots \subset F_\iota = E$  on a  $Oribas(M) \cap (F_k \setminus F_{k-1}) = Oribas(M(F_k)/F_{k-1})$  pour  $1 \leq k \leq \iota$  et  $Oribas(M) \cap (F_{k-1}^* \setminus F_k^*) = (F_{k-1}^* \setminus F_k^*) \setminus Oribas(M^*(F_{k-1}^*)/F_k^*)$  pour  $1 \leq k \leq \varepsilon$ .

Pour un matroïde orienté ordonné  $M$  donné, on définit pour  $A \subseteq E$

$$Oribas_M(A) = Oribas(-_A M)$$

et on note

$$Basori_M = Oribas_M^{-1}$$

L'application  $Oribas_M$  est une bijection entre les bases et les classes d'activité de réorientations de  $M$ , préservant les partitions actives (et donc les activités).

On appelle *Oribas* la fonction attractive des matroïdes orientés ordonnés.

Cette définition est une définition intrinsèque dans le sens où l'application définie est l'unique application vérifiant certaines propriétés. D'un point de vue constructif, avec cette définition, elle doit plutôt être considérée comme une application de l'ensemble des bases d'un matroïde orienté dans l'ensemble des parties de ses réorientations ( $Basori_M$ ). En effet  $Oribas_M^1$  est définie dans la théorème 3.6 par sa réciproque : on sait calculer pour une base donnée d'activités  $(1, 0)$ , en un parcours de son graphe fondamental, son image par  $Basori_M^{(1,0)}$  (proposition 3.2), et on en déduit l'image d'une base d'activités quelconque en calculant la partition active de cette base (algorithme linéaire) et en utilisant le théorème d'extension 2.3.1 (qui s'applique dans les deux sens, des réorientations aux bases ou des bases aux réorientations). Les calculs de la partition active et de l'image de la base induite dans chaque mineurs par récurrence peuvent être combinés pour obtenir le calcul de  $Basori_M$  d'une base donnée par récurrence (voir aussi partie 3 paragraphe 'complexité algorithmique').

On note  $\sigma_C(e)$  le signe de  $e$  dans la partie signée  $C$ .

**Proposition 4.1.1.** (calcul de  $Basori_M(B)$  en un parcours de  $\mathcal{G}_M(B)$ )

Soit  $B$  une base de  $M$ , matroïde orienté ordonné sur  $E = e_1 < \dots < e_n$ . L'image de  $B$  par  $Basori_M^{(1,0)}$  est calculée par l'algorithme suivant qui construit à la fois la partition active  $\alpha$  de  $B$  et un élément  $A$  de  $Basori_M^{(1,0)}$ .

Les  $2^{\iota(B)+\varepsilon(B)}$  éléments  $B$  s'obtiennent soit en faisant tous les choix possibles  $e \in A$  ou  $e \notin A$  au cours de l'algorithme, soit à partir d'un élément  $A \in Basori_M(B)$  par

$$Basori_M(B) = \{ A \triangle \tilde{A} \mid \tilde{A} = \alpha^{-1}(X), X \subseteq Int(B) \cup Ext(B), A \in Basori_M(B) \}$$

<u>Calcul direct de <math>Basori_M(B)</math></u>			
pour $k$ variant de 1 à $n$ faire			
si $e_k \notin B$ alors			
si $e_k$ est extérieurement actif alors			
$e_k$ externe, $\alpha(e_k) := e_k$ , et au choix $e_k \in A$ ou $e_k \notin A$			
sinon			
si il existe $c < e_k$ interne dans $C(B; e_k)$ alors			
$e_k$ est interne			
soit $c$ dans $C(B; e_k)$ avec $c < e_k$ , $c$ interne et $\alpha(c)$ le plus grand possible			
soit $\alpha(e_k) := \alpha(c)$			
sinon			
$e_k$ est externe			
soit $c$ dans $C(B; e_k)$ avec $c < e_k$ et $\alpha(c)$ le plus petit possible			
soit $\alpha(e_k) := \alpha(c)$			(fin si)
soit $e$ le plus petit possible dans $C(B; e_k)$ avec $\alpha(e) = \alpha(e_k)$			
si $\sigma_{C(B; e_k)}(e_k) \neq \sigma_{C(B; e_k)}(e)$ alors			
$e_k \notin A$ si et seulement si $e \notin A$			(fin si)
si $\sigma_{C(B; e_k)}(e_k) = \sigma_{C(B; e_k)}(e)$ alors			
$e_k \notin A$ si et seulement si $e \in A$		(fin si)	(fin si)
si $e_k \in B$ alors			
si $e_k$ est intérieurement actif alors			
$e_k$ interne, $\alpha(e_k) := e_k$ , et au choix $e_k \in A$ ou $e_k \notin A$			
sinon			
si il existe $c < e_k$ externe dans $C^*(B; e_k)$ alors			
$e_k$ est externe			
soit $c$ dans $C^*(B; e_k)$ avec $c < e_k$ , $c$ externe et $\alpha(c)$ le plus grand possible			
soit $\alpha(e_k) := \alpha(c)$			
sinon			
$e_k$ est interne			
soit $c$ dans $C^*(B; e_k)$ avec $c < e_k$ et $\alpha(c)$ le plus petit possible			
$\alpha(e_k) := \alpha(c)$			(fin si)
soit $e$ le plus petit possible dans $C^*(B; e_k)$ avec $\alpha(e) = \alpha(e_k)$			
si $\sigma_{C^*(B; e_k)}(e_k) \neq \sigma_{C^*(B; e_k)}(e)$ alors			
$e_k \notin A$ si et seulement si $e \notin A$			(fin si)
si $\sigma_{C^*(B; e_k)}(e_k) = \sigma_{C^*(B; e_k)}(e)$ alors			
$e_k \notin A$ si et seulement si $e \in A$		(fin si)	(fin si)
			(fin pour)

*Preuve.* On combine simplement l'algorithme 2.1.12 de décomposition de la base et l'algorithme 3.3 de calcul de  $Basori_{\widetilde{M}}^{(1,0)}$  dans chaque mineur  $\widetilde{M}$  induit par la suite décomposante de la base. En effet ces algorithmes ne dépendent que des graphes

fondamentaux, et le graphe fondamental de la base induite dans chaque  $\widetilde{M}$  est la restriction à  $\widetilde{M}$  de celui de  $B$  (propriété 2.1.5).  $\square$

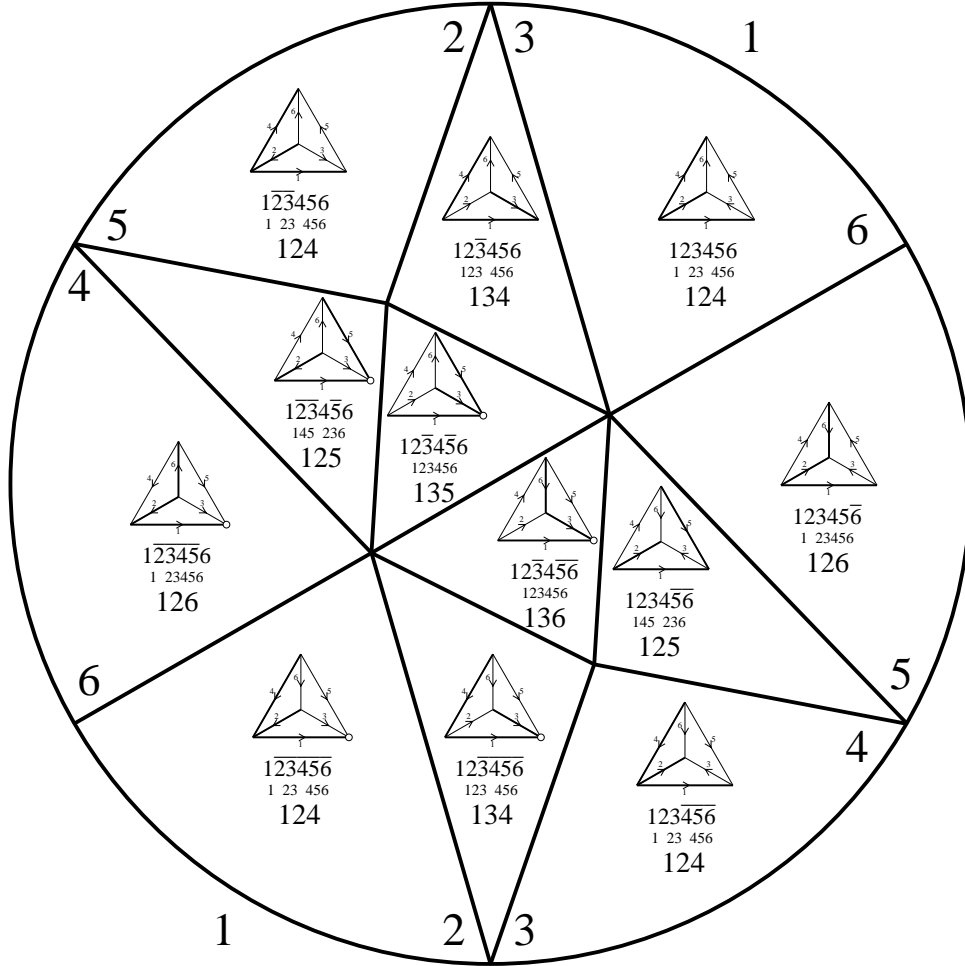


Figure 4.1 : correspondance active  $Oribas_M$  pour les régions de  $K_4$

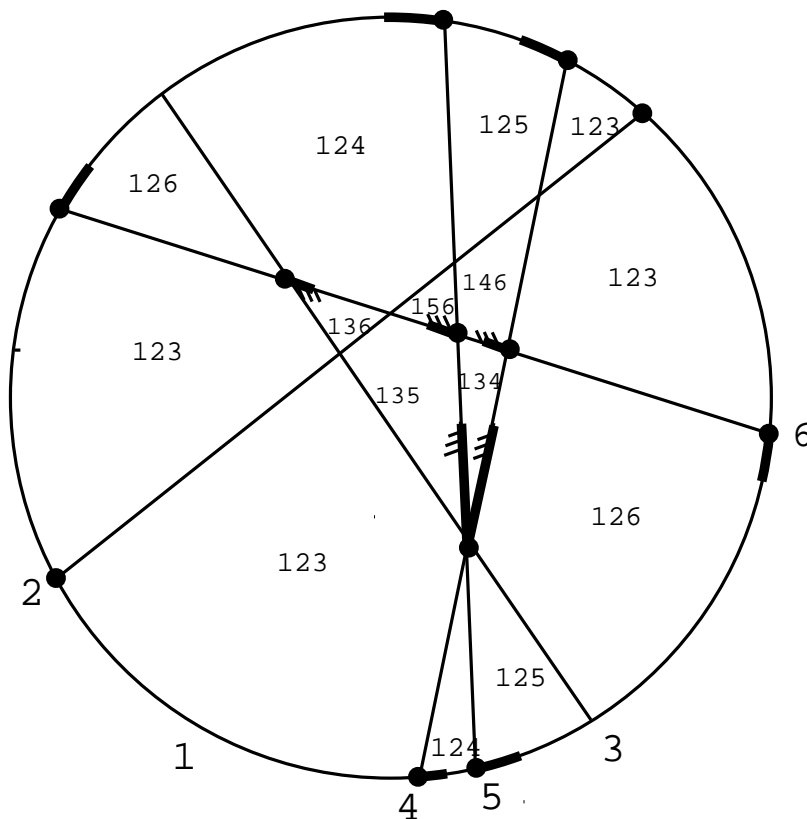
*Remarques.*

- Cet algorithme ne repose que sur les circuits et cocircuits fondamentaux de  $B$ , signés selon le matroïde orienté  $M$  (i. e. sur le graphe fondamental ‘signé’, qui se calcule en un parcours de la structure et ne dépend pas de tout le matroïde orienté).
- Dans cette définition de  $Basori_M(B)$  par récurrence, le fait qu’un élément  $e \in E$  soit ou non réorienté ne dépend que de la restriction de graphe fondamental de  $B$  aux éléments inférieurs à  $e$  (cf. propriété 0.1 ou propriété 2.1.4).

**Corollaire 4.1.2.**

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné sur  $E$  de plus grand élément  $\omega$ , et  $B$  une base de  $M$ . Pour tout  $A \in Basori_M(B)$ , si  $\omega \in B$  alors  $A - \omega \in Basori_{M/\omega}(B \setminus \omega)$  et si  $\omega \notin B$  alors  $A - \omega \in Basori_{M \setminus \omega}(B)$ .

$\square$



**Figure 4.2 : correspondance active  $Oribas_M$**

*Exemples.*

- La Figure 4.1 illustre la correspondance active canonique  $Oribas_M$  pour les orientations acycliques du graphe  $K_4$  (pour représenter toute la correspondance, il faut ajouter la représentation du dual et des couples de régions de  $(M(F_c))^*$  et  $M/F_c$  pour tout fermé cyclique  $F_c$ , Figure 2.3). Dans chaque région sont représentés l'orientation acyclique et l'arbre couvrant (base) correspondant, le covecteur maximal correspondant, la partition active commune et la base. Le nombre de parties de la partition active est égal à l'activité (interne de l'arbre, duale de l'orientation), les plus petits éléments de parties sont les éléments actifs. Deux orientations sont associées à la même base si et seulement si elles sont dans la même classe d'activité, c'est-à-dire si elles se déduisent l'une de l'autre par retournement de parties de leurs partitions actives (qui sont égales), comme on peut le vérifier sur la figure. En particulier les régions qui ne touchent pas 1 ont pour partition active 123456, l'autre région associée à la même base est sur l'hémisphère symétrique non représenté.

- La Figure 4.2 donne la correspondance  $Oribas_M$  pour les régions de l'exemple qui a servi dans le chapitre 3. Les partitions actives de cet exemple sont données par la Figure 2.4. Il est expliqué dans l'exemple à la fin du chapitre 2 partie 3 comment le théorème d'extension s'applique à cet exemple. La correspondance pour le mineur  $M/1$  considéré pour les bases d'activité interne 2, qui est de rang 2, se calcule comme pour l'exemple de la Figure 3.5.



## 4.2 Des réorientations aux bases : définition inductive

Cette partie fait le lien entre toutes les précédentes. Elle donne une nouvelle définition de l'application *Oribas*, permettant un calcul direct de l'image d'un matroïde orienté ordonné, alors que cette application a été définie jusqu'à présent soit intrinsèquement par des propriétés qui la caractérisent, soit algorithmiquement par sa réciproque. Cette définition généralise à toutes les activités la définition inductive de *Oribas*<sup>(1,0)</sup> du théorème 3.8.

Pour un matroïde orienté ordonné  $M$  sur  $E$  de plus grand élément  $\omega$ , on calculera sa base image  $Oribas(M)$  par induction en calculant d'abord  $Oribas(M/\omega)$  et  $Oribas(M \setminus \omega)$  : on aura toujours soit  $Oribas(M) \setminus \omega = Oribas(M \setminus \omega)$  soit  $Oribas(M) \setminus \omega = Oribas(M/\omega)$ , et toute la question est de choisir entre ces deux possibilités.

Premièrement, le choix se fait de façon à avoir la propriété de préservation des partitions actives du chapitre 2, en comparant, dans celles de  $M$ , de  $M \setminus \omega$ , et de  $M/\omega$ , l'élément actif associé à  $\omega$ . Dans le chapitre 1, on définissait une classe inductive de correspondances de façon similaire mais en comparant les ensembles d'éléments actifs et non les partitions actives. L'application *Oribas* appartient aux deux classes de correspondances étudiées dans les chapitres 1 et 2, mais ceci ne suffit pas à la déterminer, et la comparaison des partitions actives n'y suffit pas non plus.

Il faut donc, deuxièmement, faire en sorte que la propriété d'adjacence du chapitre 3 soit satisfaite (dans le cas (1,0), on a vu qu'il suffit, pour achever la détermination du choix, d'une seule des deux propriétés d'adjacences, primale ou duale). Géométriquement, on souhaite que la base ordonnée associée à une région définisse une suite de fermés frontières de cette région. L'idée est que  $Oribas(M \setminus \omega)$  et  $Oribas(M/\omega)$  ayant cette propriété respectivement dans  $M \setminus \omega$  et  $M/\omega$ , une seule de ces deux bases permettra à  $Oribas(M)$  de conserver cette propriété dans  $M$ . Celle qui sera rejetée servira à calculer l'image par *Oribas* de  $-\omega M$ .

Par ailleurs, la dualité prend aussi ici un nouveau relief, puisque à chaque étape de cette définition inductive, le choix peut se faire - de façon remarquable et non trivialement équivalente - soit dans le matroïde orienté, soit dans son dual.

On a déjà vu l'importance de mineurs d'un certain type dans la définition de *Oribas* (ceux des suites décomposantes du chapitre 2). Ici, il apparaît l'importance de mineurs d'un autre type : ceux obtenus successivement en supprimant ou en contractant le plus grand élément. Du fait qu'à chaque étape où le plus grand élément disparaît soit par suppression soit par contraction, on prenne en compte en même temps chaque réorientation et sa réorientation opposée par rapport à cet élément, cette définition inductive témoigne d'une sorte de construction 'généalogique' du matroïde orienté à partir de son matroïde sous-jacent. De ce point de vue, la partition classique de l'ensemble des parties du matroïde en intervalles associés aux bases se transforme - inductivement via les mineurs en question - en la partition de l'ensemble des réorientations en classes d'activités.

On conclut cette partie avec les transformations de l'hypercube sous-jacentes à cette construction inductive.

*Notations.*

On rappelle que  $\mathcal{O}_\omega(M)$  (resp.  $\mathcal{O}_\omega^*(M)$ ) est l'ensemble des circuits (resp. cocircuits) positifs de  $M$  contenant  $\omega$ , et donc  $A\mathcal{O}_\omega(M)$  (resp.  $A\mathcal{O}_\omega^*(M)$ ) est l'ensemble des plus petits éléments des circuits (resp. cocircuits) positifs de  $M$  contenant  $\omega$ . On rappelle aussi que l'on a toujours soit  $A\mathcal{O}_\omega(M) = \mathcal{O}_\omega(M) = \emptyset$  soit  $A\mathcal{O}_\omega^*(M) = \mathcal{O}_\omega^*(M) = \emptyset$  (lemme de Farkas propriété 0.7).

Pour  $A \subseteq E$  non vide,  $\max(A)$  désigne le plus grand élément de  $(E, <)$  totalement ordonné. Par convention, on définit  $\max(\emptyset)$  comme étant strictement inférieur à tous les éléments de  $(E, <)$ , ce qui ordonne totalement  $(E \cup \max(\emptyset), <)$ .

Pour une partie signée  $A$  on note  $\sigma_A(e)$  le signe de  $e$  dans  $A$ .

Pour un matroïde orienté  $M$  sur  $E$  de plus grand élément  $\omega$ , on note  $\lambda(M) = 1$  si  $\omega \in \text{Oribas}(M)$  et  $\lambda(M) = 0$  si  $\omega \notin \text{Oribas}(M)$ .

### Propriété 4.2.1.

(OB3) 'induction'

Pour tout  $M$  sur  $E(M)$  de plus grand élément  $\omega$  on a

(OB3.1) si  $\omega$  est un isthme de  $M$  alors

$$\text{Oribas}(M) = \text{Oribas}(-_\omega M) = \text{Oribas}(M/\omega) \cup \{\omega\}$$

(OB3.2) si  $\omega$  est une boucle de  $M$  alors

$$\text{Oribas}(M) = \text{Oribas}(-_\omega M) = \text{Oribas}(M \setminus \omega)$$

(OB3.3) si  $\omega$  n'est ni un isthme ni une boucle de  $M$  alors

$$\{\text{Oribas}(M), \text{Oribas}(-_\omega M)\} = \{\text{Oribas}(M \setminus \omega), \text{Oribas}(M/\omega) \cup \{\omega\}\}$$

*Preuve.* Les cas (OB3.1) et (OB3.2) sont évidents puisqu'un isthme ou une boucle est le seul élément de sa partie dans une partition active. On suppose maintenant que  $\omega$  n'est ni un isthme ni une boucle.

Puisque  $\text{Oribas}(M)$  est l'unique base  $B$  de  $M$  telle que  $\emptyset \in \text{Basori}_M(B)$ , une reformulation du corollaire 4.1.2 est (pour tout  $M$  matroïde orienté ordonné sur  $E$  de plus grand élément  $\omega$ ) : si  $\omega \in \text{Oribas}(M)$  alors  $\text{Oribas}(M/\omega) = \text{Oribas}(M) - \omega$ , et si  $\omega \notin \text{Oribas}(M)$  alors  $\text{Oribas}(M \setminus \omega) = \text{Oribas}(M)$ .

Si (OB3.3) était faux, on aurait alors  $\text{Oribas}(M) = \text{Oribas}(-_\omega M)$  et  $M$  et  $-_\omega M$  seraient dans la même classe d'activité, or ceci n'est possible que si  $\omega$  est seul dans sa partie dans la partition active de  $M$ , c'est-à-dire si  $\omega$  est un isthme ou une boucle, ce qui est contradictoire.  $\square$

*Rappels. (chapitre 2 partie 2)*

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné sur  $E$  et  $e \in E$ . L'élément actif associé à  $e$ , noté  $\alpha(M; e)$ , est le plus grand possible qui soit le plus petit élément d'un circuit positif ou d'un cocircuit positif de  $M$  contenant  $e$ . Il est le plus petit élément de la partie contenant  $e$  dans la partition active de  $M$ . Si  $e$  appartient à un cocircuit positif de  $M$  alors la partie contenant  $e$  dans la partition active de  $M$  est,

$$\alpha^{-1}(M; \alpha(M; e)) = \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{O}^*(M), \\ \min(D) \geq \alpha(M; e)}} D \setminus \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{O}^*(M), \\ \min(D) > \alpha(M; e)}} D$$

Le mineur correspondant à cette partie s'obtient en restreignant  $M$  à la première de ces deux unions de cocircuits et en contractant la seconde.

En particulier, avec  $\omega$  le plus grand élément de  $E$ , si  $A\mathcal{O}_\omega^*(M) \neq \emptyset$  alors

$$\alpha(M; \omega) = \max A\mathcal{O}_\omega^*(M)$$

et si  $A\mathcal{O}_\omega(M) \neq \emptyset$  alors

$$\alpha(M; \omega) = \max A\mathcal{O}_\omega(M)$$

**Lemme 4.2.2.**

(i) (caractérisation du 'cas douteux' de l'algorithme Oribas)

On a  $\max A\mathcal{O}_\omega(M) = \max A\mathcal{O}_\omega(-_\omega M)$  et  $\max A\mathcal{O}_\omega^*(M) = \max A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M)$  si et seulement si les parties contenant  $\omega$  dans les partitions actives de  $M$  et  $-_\omega M$  sont égales et,  $\widetilde{M}$  étant le mineur correspondant dans  $M$ ,  $-_\omega \widetilde{M}$  est le mineur correspondant dans  $-_\omega M$ .

(ii) Si  $A\mathcal{O}_\omega^*(M) \neq \emptyset$  et  $\max A\mathcal{O}_\omega^*(M) = \max A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M) = a$  alors

$$\bigcup_{\substack{D \in \mathcal{O}^*(M), \\ \min(D) \geq a}} D = \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{O}^*(-_\omega M), \\ \min(D) \geq a}} D$$

*Preuve.* Si les parties contenant  $\omega$  dans les partitions actives de  $M$  et  $-_\omega M$  sont égales, alors elles ont le même plus petit élément et les mineurs étant de même nature (acyclique ou totalement cyclique) on a  $\max A\mathcal{O}_\omega^*(M) = \alpha(M; \omega) = \alpha(-_\omega M; \omega) = \max A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M)$  ou  $\max A\mathcal{O}_\omega(M) = \alpha(M; \omega) = \alpha(-_\omega M; \omega) = \max A\mathcal{O}_\omega(-_\omega M)$ .

Réciproquement si  $\max A\mathcal{O}_\omega^*(M) = \max A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M) = a \neq \max(\emptyset)$ , alors les parties  $A$  et  $A'$  contenant  $\omega$  dans les partitions actives respectivement de  $M$  et  $-_\omega M$  ont même plus petit élément  $a$ . On suppose qu'elles sont distinctes, associées à un mineur acyclique (quitte à passer au dual), et qu'il existe  $e \in A \setminus A'$  (quitte à permuter  $A$  et  $A'$ ). L'élément  $e$  est associé dans  $-_\omega M$  à un élément  $e' = \alpha(-_\omega M; e)$ , et il existe un cocircuit positif dans  $-_\omega M$  contenant  $e$  de plus petit élément  $e'$ . Ce cocircuit doit contenir  $\omega$  sinon c'est aussi un cocircuit positif de  $M$ , ce qui contredit  $\alpha(M; e) = a$  (par définition de  $\alpha$  et des partitions actives). Si  $e' > a$  alors ce cocircuit

ne peut pas contenir  $\omega$  sinon cela contredit  $\alpha(-\omega M; \omega) = a$ , donc  $e' \leq a$ . Soit alors  $C$  l'union des cocircuits positifs de  $M$  de plus petit élément supérieur ou égal à  $a$ ,  $C$  est un covecteur positif de  $M$  contenant  $A$  (par définition de  $A$ ) et ayant pour plus petit élément  $a$ . Soit de même  $C'$  un covecteur de  $M$  ayant pour seul élément négatif  $\omega$  contenant  $A'$  de plus petit élément  $a$ . Alors un covecteur de  $M$  obtenu par élimination forte de  $\omega$  entre  $C$  et  $C'$  contenant  $e$  est positif, ne contient pas  $\omega$  et a un plus petit élément supérieur à  $a$ . Il existe donc un cocircuit positif de  $M$  et de  $-\omega M$  contenant  $e$  mais pas  $\omega$  de plus petit élément  $a' \geq a$ . Puisque  $e$  est associé à  $a$  dans la partition active de  $M$  ( $e \in A$ ), on doit avoir  $a' = a$  (sinon  $e$  serait associé à  $a' \geq a$  par définition). Donc  $e$  appartient à un cocircuit positif de  $-\omega M$  de plus petit élément  $a$ , donc  $e' = a$ , et donc  $e \in A'$ , ce qui est contradictoire.

Les parties contenant  $\omega$  dans les partitions actives de  $M$  et  $-\omega M$  sont donc égales, d'où l'égalité

$$\bigcup_{\substack{D \in \mathcal{O}^*(M), \\ \min(D) = a}} D \setminus \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{O}^*(M), \\ \min(D) > a}} D = \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{O}^*(-\omega M), \\ \min(D) = a}} D \setminus \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{O}^*(-\omega M), \\ \min(D) > a}} D$$

L'égalité (ii) s'en déduit aussitôt puisque les cocircuits positifs de plus petit élément strictement supérieur à  $a$  ne contiennent pas  $\omega$  et sont donc communs à  $M$  et  $-\omega M$ .

Les deux mineurs correspondant dans  $M$  et  $-\omega M$  s'obtiennent donc par les mêmes opérations de suppression et de contraction à partir de  $M$  et  $-\omega M$ , ils sont donc bien la réorientation selon  $\omega$  l'un de l'autre, ce qui achève la preuve de (i).

□

**Théorème 4.2.3.** (définition inductive de *Oribas*)

*L'application Oribas est déterminée par la définition inductive suivante.*

**Définition inductive de *Oribas***

Pour tout un matroïde orienté ordonné  $M$  sur  $E$  avec  $\max(E) = \omega$ .

Si  $\omega$  est une boucle de  $M$  alors  $\lambda(M) := 0$ .

Si  $\omega$  est un isthme de  $M$  alors  $\lambda(M) := 1$ .

Si  $\omega$  n'est ni un isthme ni une boucle de  $M$  alors :

**choix**

si  $\max AO_\omega^*(M) > \max AO_\omega^*(-_\omega M)$  ou  $\max AO_\omega(M) < \max AO_\omega(-_\omega M)$   
alors  $\lambda(M) := 0$  ;

si  $\max AO_\omega^*(M) < \max AO_\omega^*(-_\omega M)$  ou  $\max AO_\omega(M) > \max AO_\omega(-_\omega M)$   
alors  $\lambda(M) := 1$  ;

si  $\max AO_\omega^*(M) = \max AO_\omega^*(-_\omega M)$  et  $\max AO_\omega(M) = \max AO_\omega(-_\omega M)$   
alors :

**cas douteux**

soit  $B' = \text{Oribas}(M \setminus \omega)$  et  $C = C_M(B'; \omega)$

si  $AO_\omega^*(M) \neq \emptyset$  alors soit  $e = \min \left( C \cap \bigcup_{D \in \mathcal{O}^*(M), \min(D) \geq \max(AO_\omega^*(M))} D \right)$

si  $AO_\omega^*(M) = \emptyset$  alors soit  $e = \min(C)$

si  $\sigma_C(e) \neq \sigma_C(\omega)$  alors  $\lambda(M) := 0$

si  $\sigma_C(e) = \sigma_C(\omega)$  alors  $\lambda(M) := 1$

ou bien de façon équivalente :

soit  $B'' = \text{Oribas}(M/\omega)$  et  $D = C_M^*(B'' \cup \omega; \omega)$

si  $AO_\omega(M) \neq \emptyset$  alors soit  $e = \min \left( D \cap \bigcup_{C \in \mathcal{O}(M), \min(C) \geq \max(AO_\omega(M))} C \right)$

si  $AO_\omega(M) = \emptyset$  alors soit  $e = \min(D)$

si  $\sigma_D(e) \neq \sigma_D(\omega)$  alors  $\lambda(M) := 1$

si  $\sigma_D(e) = \sigma_D(\omega)$  alors  $\lambda(M) := 0$

**fin**

Si  $\lambda(M) = 0$  alors

$$\text{Oribas}(M) := \text{Oribas}(M \setminus \omega)$$

si  $\lambda(M) = 1$  alors

$$\text{Oribas}(M) := \text{Oribas}(M/\omega) \cup \omega$$

Il faut noter que l'on passe d'un choix à l'autre en passant au dual (via la propriété (OB4) 'dualité'  $\text{Oribas}(M^*) = E \setminus \text{Oribas}(M)$ ) et surtout que  $M$  et  $-_\omega M$  jouent des rôles symétriques (via le lemme (ii), dans le 'cas douteux', l'élément  $e$  calculé est le même pour  $M$  et  $-_\omega M$ ) :

$$\lambda(M) = 1 - \lambda(-_\omega M)$$

*Preuve.* Lorsque  $\omega$  est un isthme ou une boucle de  $M$ , la définition de  $\lambda(M)$  est évidente. On suppose désormais que  $\omega$  n'est ni un isthme ni une boucle de  $M$ . D'après la propriété 4.2.1, *Oribas* satisfait  $\lambda(M) = 1 - \lambda(-_\omega M)$ .

*Cas non douteux.*

On montre que le 'choix' qui est fait coïncide avec celui fait dans l'algorithme de la proposition 3.8 appliqué au mineur contenant  $\omega$  de la partition active, conformément à la définition de *Oribas* par décomposition.

Pour commencer on suppose  $A\mathcal{O}^*(M) \neq \emptyset$ . Soit  $\widetilde{M} = M(F_k)/F_{k-1}$ , avec  $F_k \setminus F_{k-1} = \alpha^{-1}(M; \alpha(M; \omega))$ , le mineur de  $M$  intervenant dans la décomposition active de  $M$  du théorème 2.2.5. On montre d'abord que si  $\max A\mathcal{O}_\omega^*(M) > \max A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M)$  alors  $o^*(-_\omega \widetilde{M}) = 0$ .

Si  $o^*(-_\omega \widetilde{M}) \neq 0$ , alors il existe un cocircuit positif de  $-_\omega \widetilde{M}$ , c'est-à-dire un cocircuit de  $\widetilde{M}$  avec pour seul élément négatif  $\omega$ , de plus petit élément  $a \in F_k \setminus F_{k-1}$ , et il existe donc un cocircuit  $C$  de  $M$  tel que  $C \cap F_{k-1} = \emptyset$ ,  $C \cap F_k \subseteq C^+$  et  $\omega \in C^-$ . D'autre part, par définition de la suite décomposante associée à  $M$ ,  $E \setminus F_k$  est le support d'un covecteur positif  $D$  de  $M$ . Comme  $\omega \notin E \setminus F_k$ , le covecteur  $D \circ C$  a pour seul élément négatif  $\omega$ , et pour plus petit élément soit  $a$ , soit le plus petit élément de  $E \setminus F_k$ , qui est lui aussi plus grand que  $\alpha(M; n) = \min(F_k \setminus F_{k-1})$  par définition d'une suite décomposante. Il existe donc un cocircuit positif de  $-_\omega M$  de plus petit élément supérieur à  $\max A\mathcal{O}_\omega^*(M) = \alpha(M; n)$ , ce qui contredit l'hypothèse.

D'après la proposition 3.8, si  $o^*(-_\omega \widetilde{M}) \neq 0$  alors  $\lambda(\widetilde{M}) = 0$ . D'après le théorème d'extension 2.2.5 appliqué à *Oribas*<sup>(1,0)</sup>,  $Oribas(M) \cap (F_k \setminus F_{k-1}) = Oribas(\widetilde{M})$ , donc si  $\max A\mathcal{O}_\omega^*(M) > \max A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M)$  alors  $\lambda(M) = 0$ . Avec  $\lambda(M) = 1 - \lambda(-_\omega M)$  on en déduit si  $\max A\mathcal{O}_\omega^*(M) > \max A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M)$  alors  $\lambda(M) = 1$ ; et en appliquant ceci à  $M^*$  avec  $Oribas(M) = E \setminus Oribas(M^*)$  on en déduit que  $\lambda$  est définie correctement dans tous les cas du 'cas non douteux'.

*Cas douteux.*

Soit  $B' = Oribas(M \setminus \omega)$  et  $C = C_M(B'; \omega)$ . On suppose que  $\omega \notin Oribas(M)$ , alors par (OB3.3) (propriété 4.2.1) on a  $Oribas(M) = B'$ . Par définition de *Oribas*, les partitions actives  $\alpha^{-1}$  de  $M$  et  $B'$  sont égales, et l'élément  $a = \alpha(\omega)$  associé à  $\omega$  est le même dans les deux partitions actives. Par définition (extension à partir de *Oribas*<sup>(1,0)</sup>, ou bien algorithme 4.1.1) le signe de  $\omega$  et le signe de  $e$  dans  $C$  sont opposés, où  $e$  est le plus petit élément appartenant à la fois à  $C$  et à la partie  $\alpha^{-1}(a)$  contenant  $\omega$  dans la partition active commune de  $B'$  et de  $M$ .

*Premier cas :*  $A\mathcal{O}_\omega^*(M) \neq \emptyset$ . Soit  $a = \max(A\mathcal{O}_\omega^*(M))$ .

Dans ce cas  $\omega$ ,  $e$  et  $a$  sont des éléments internes pour  $B'$ . La partie  $\bigcup_{D \in \mathcal{O}^*(M), \min(D) > a} D$  est l'union des partitions actives de  $B'$  de plus petit élément strictement supérieur à  $a$ , donc son intersection avec  $C$  est vide (propriété 2.1.2, ou algorithme 4.1.1). Donc  $e = \min\left(C \cap \alpha^{-1}(a)\right) = \min\left(C \cap \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{O}^*(M), \\ \min(D) \geq a}} D\right)$ .

*Deuxième cas :*  $A\mathcal{O}_\omega^*(M) = \emptyset$ .

Dans ce cas  $\omega$ ,  $e$  et  $a$  sont des éléments externes pour  $B'$ . Par définition de la décomposition d'une base (propriété 2.1.2, ou algorithme 4.1.1), la partie  $\alpha^{-1}(a)$

contient le plus petit élément de  $C$ , c'est-à-dire  $e = \min(C)$ .

On a montré que si  $\lambda(M) = 0$  alors  $\sigma_C(e) \neq \sigma_C(\omega)$ , c'est-à-dire, compte tenu de  $\lambda(M) = 1 - \lambda(-_\omega M)$ , si  $\sigma_C(e) = \sigma_C(\omega)$  alors  $\lambda(M) := 1$ . D'autre part  $M$  et  $-_\omega M$  jouent des rôles symétriques, en effet par le lemme (ii), la définition de  $e$  dans l'algorithme est la même dans  $M$  et  $-_\omega M$ . Donc en appliquant ce qui précède à  $-_\omega M$  on a montré si  $\sigma_C(e) \neq \sigma_C(\omega)$  alors  $\lambda(M) := 0$ .

L'application *Oribas* est donc bien définie par le premier choix. Comme on sait que  $\lambda(M) = 1 - \lambda(M^*)$  par la propriété (OB4) 'dualité', on en déduit en appliquant tout ce qui précède à  $M^*$  que *Oribas* est tout aussi bien définie par le deuxième choix, qui est donc équivalent au premier.  $\square$

*Remarque.* Des exemples faciles à construire montrent que, même avec l'hypothèse  $\max AO_\omega^*(M) = \max AO_\omega^*(-_\omega M) = a$ , on peut avoir d'une part l'union des cocircuits positifs de plus petit élément  $a$  distincte dans  $M$  et  $-_\omega M$ , et on peut avoir d'autre part  $\omega$  et un élément  $e$  associés à  $a$  dans  $M$  sans que  $e$  appartienne à l'union des cocircuits positifs contenant  $\omega$ . Ainsi, l'union de cocircuits positifs calculée dans le théorème 4.2.3 pour calculer l'élément  $e$  ne peut pas être facilement remplacée par une autre partie utile.

#### Corollaire 4.2.4.

*Si  $\max AO_\omega^*(M) > \max AO_\omega^*(-_\omega M)$  ou  $\max AO_\omega(M) < \max AO_\omega(-_\omega M)$  alors la partition active de  $M \setminus \omega$ , resp.  $M/\omega$ , s'obtient en supprimant  $\omega$  de la partie à laquelle il appartient dans la partition active de  $M$ , resp.  $-_\omega M$ .*

*Preuve.* D'après le corollaire 2.1.13, la partition active de  $B$  dans  $M \setminus \omega$  si  $\omega \notin B$ , ou de  $B \setminus \omega$  dans  $M/\omega$  si  $\omega \in B$ , se déduisent de celle de  $B$  dans  $M$  simplement en supprimant  $\omega$  de la partie à laquelle il appartient. Puisque, par définition, *Oribas* préserve les partitions actives, on déduit immédiatement le corollaire.  $\square$

*Interprétation géométrique.* Premièrement, l'aspect géométrique du choix non douteux (dans l'algorithme *Oribas* du théorème 4.2.3) ressort davantage en distinguant les cas où  $\omega$  appartient à un cocircuit positif ( $AO_\omega^*(M) \neq \emptyset$  et  $AO_\omega(M) = \emptyset$ ) et où  $n$  appartient à un circuit positif ( $AO_\omega^*(M) = \emptyset$  et  $AO_\omega(M) \neq \emptyset$ ). L'algorithme s'écrit ainsi en remplaçant la procédure **choix** par la suivante.

**choix**cas 1 :

si  $\omega$  appartient à un cocircuit positif de  $M$  et à un cocircuit positif de  $-\omega M$  alors

si  $\max AO_\omega^*(M) > \max AO_\omega^*(-\omega M)$  alors  $\lambda(M) := 0$

si  $\max AO_\omega^*(M) < \max AO_\omega^*(-\omega M)$  alors  $\lambda(M) := 1$

si  $\max AO_\omega^*(M) = \max AO_\omega^*(-\omega M)$  alors faire **cas douteux**.

cas 2 :

si  $\omega$  appartient à un cocircuit positif de  $M$  et à un circuit positif de  $\omega$  alors  $\lambda(M) := 0$

cas 3 :

si  $\omega$  appartient à un circuit positif de  $M$  et à un cocircuit positif de  $-\omega M$  alors  $\lambda(M) := 1$

cas 4 :

si  $\omega$  appartient à un circuit positif de  $M$  et à un circuit positif de  $-\omega M$  alors

si  $\max AO_\omega(M) < \max AO_\omega(-\omega M)$  alors  $\lambda(M) := 0$

si  $\max AO_\omega(M) > \max AO_\omega(-\omega M)$  alors  $\lambda(M) := 1$

si  $\max AO_\omega(M) = \max AO_\omega(-\omega M)$  alors faire **cas douteux**.

La distinction entre ces différents cas fait apparaître en quelque sorte la décomposition des activités des réorientations de la partie 2 du chapitre 2 : décomposition en réorientations acycliques et totalement cyclique (cas 2 et 3), décomposition en réorientations d'activités (1,0) pour les réorientations acycliques (cas 1), et décomposition en réorientations d'activités (0,1) pour les réorientations totalement cycliques (cas 4).

Deuxièmement, l'algorithme dans le cas douteux s'interprète géométriquement par des propriétés d'adjacence entre une région et sa base associée. Il s'agit de faire en sorte que, avec  $B = b_1 < b_2 < \dots < b_r$ , la suite de fermés emboîtés de l'arrangement  $b_r \supset b_r \cap b_{r-1} \supset \dots \supset b_r \cap \dots \cap b_1$  touche la région associée, sauf lorsque cette propriété est empêchée par la condition de préservation des activités (choix non douteux) qui est prioritaire.

On suppose que  $\omega$  coupe une région  $M$ , et que dans  $M \setminus \omega$ , la base  $B'$  associée à la région  $M \setminus \omega$  définisse une suite de faces qui touchent  $M$  (suite de covecteurs positifs), et la même chose pour  $B''$  dans  $M/\omega$ . Une des deux régions  $M$  et  $-\omega M$  (de chaque côté de  $\omega$ ) doit être associée à  $B'$  et l'autre à  $B'' \cup \omega$ . On choisit alors d'associer à  $B'$  celle pour laquelle la suite de faces de  $M \setminus \omega$  reste une suite de faces qui touchent la région (suite de covecteurs positifs). L'autre région est alors associée à  $B'' \cup \omega$ . Comme cette région est adjacente à  $\omega$ , elle est automatiquement adjacente à la suite de faces définie par  $B'' \cup \omega$ .

Ceci est le plus remarquable pour les bases internes d'activité 1 ; pour les bases internes d'activité supérieure, une suite de faces intervient pour chaque partie de la partition active, i.e. pour chaque mineur utile.

*Exemples.*

- La Figure 4.3 illustre le lemme . Les deux régions séparées par  $\omega$  ( $M$  à droite et  $-\omega M$  à gauche) ont mêmes éléments dual-actifs :  $\mathcal{O}^*(M) = \mathcal{O}^*(-\omega M)$ . Cependant



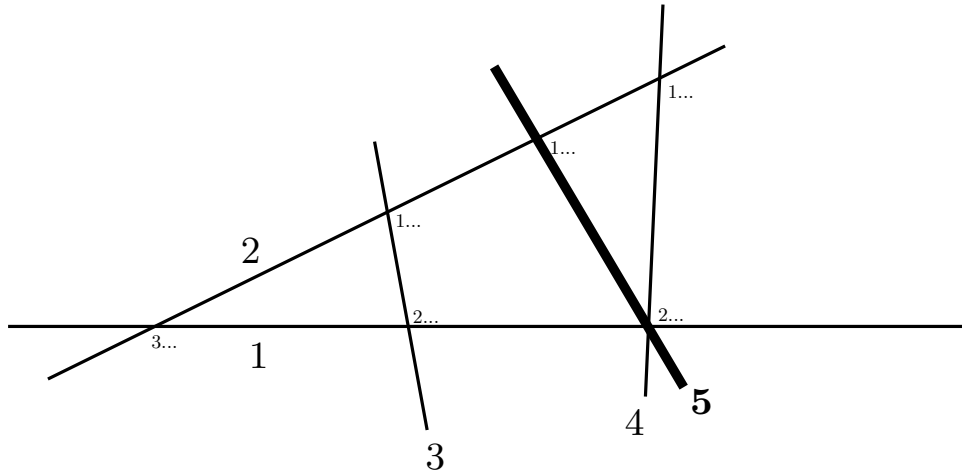
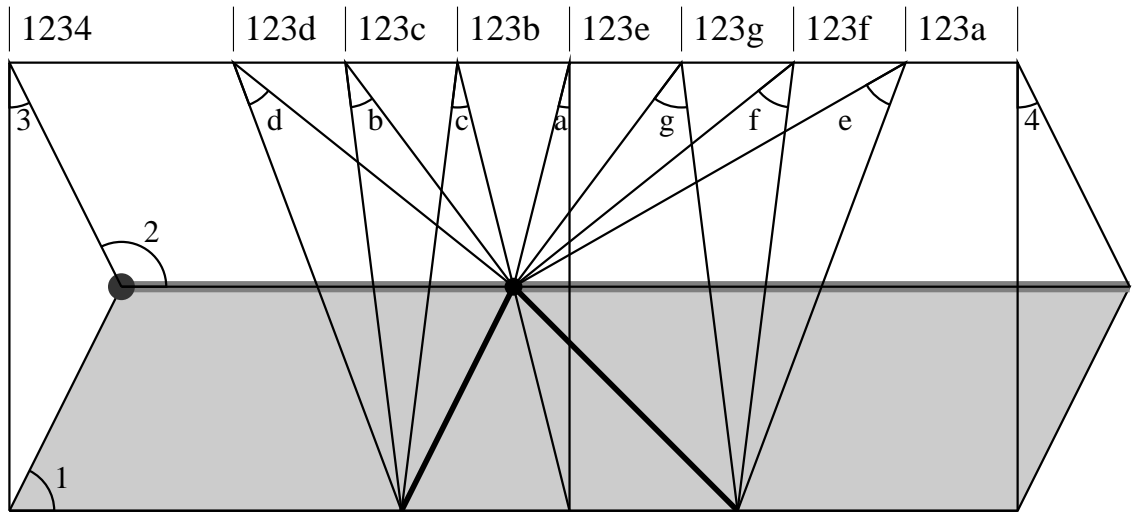


Figure 4.3 : illustration pour la définition inductive

Figure 4.4 : un exemple de rang 4 pour *Oribas*

l'élément associé à 5 est distinct dans les deux régions :  $\max(A\mathcal{O}^*(M)) = 1 \neq 2 = \max(A\mathcal{O}^*(-_5M))$ . Ainsi sur cet exemple on aura  $Oribas(M) = Oribas(M/5) \cup 5$ , où  $M/5$  est le segment gras contenu dans la région, et  $Oribas(-_5M) = Oribas(M \setminus 5)$ , où  $M \setminus 5$  réunit les deux régions séparées par 5.

- La Figure 4.4 reprend la Figure 2.7 qui représente quelques régions d'un exemple de rang 4. L'ordre est  $1 < 2 < 3 < 4 < a < \dots < g$ , la base minimale est 1234. Les suites décomposantes de fermés associées sont dessinées en gras, et l'image de chaque région par *Oribas* est écrite au dessus de chaque région. Ces images se calculent facilement à partir de la définition inductive, en ajoutant les éléments successivement. On pourra aussi consulter la partie 3 du chapitre 6 consacrée aux arrangements

hyperrésolubles ; la Figure 4.4 y illustre une fibre de rang 4 d'un tel arrangement.

Le lemme suivant fait le lien avec le chapitre 1. Il montre que la définition inductive de *Oribas* telle qu'elle est écrite dans le théorème 4.2.3 est une définition du type de celles du critère de compatibilité 1.6, pour un 'choix' particulier. Le 'choix' dans le cas non douteux dans la définition de *Oribas* est strictement plus fort que le 'choix' non arbitraire du critère de compatibilité.

**Lemme 4.2.5.**

- (i) Si  $\max A\mathcal{O}_\omega(M) = \max A\mathcal{O}_\omega(-_\omega M)$  alors  $A\mathcal{O}(M) = A\mathcal{O}(-_\omega M)$ .
- (ii) Si  $A\mathcal{O}(M) \subset A\mathcal{O}(-_\omega M)$  ou  $A\mathcal{O}^*(-_\omega M) \subset A\mathcal{O}^*(M)$  alors  $\max A\mathcal{O}_\omega^*(M) > \max A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M)$  ou  $\max A\mathcal{O}_\omega(M) < \max A\mathcal{O}_\omega(-_\omega M)$

*Preuve.*

(i) Soit  $s = \max A\mathcal{O}_\omega(M) = \max A\mathcal{O}_\omega(-_\omega M)$ . Si  $a \in A\mathcal{O}(-_\omega M) \setminus A\mathcal{O}(M) = A\mathcal{O}_\omega(-_\omega M)$  alors il existe un cocircuit de plus petit élément  $a$  dont le seul élément négatif est  $\omega$ . Or  $s \in A\mathcal{O}_\omega(M)$  donc il existe un cocircuit positif contenant  $\omega$  de plus petit élément  $s$ . On élimine  $\omega$  de ces deux cocircuits en conservant  $a$  (élimination forte), comme  $a \leq s$  on trouve un cocircuit positif de plus petit élément  $a$  ne contenant pas  $\omega$ , donc  $a \in A\mathcal{O}^+(M)$  ce qui est contradictoire.

De même on ne peut pas avoir  $a \in A\mathcal{O}(M) \setminus A\mathcal{O}(-_\omega M)$ , or on sait (corollaire 1.4) que  $A\mathcal{O}(M) \subseteq A\mathcal{O}(-_\omega M)$  ou  $A\mathcal{O}(-_\omega M) \subseteq A\mathcal{O}(M)$ , donc  $A\mathcal{O}(M) = A\mathcal{O}(-_\omega M)$ .

(ii) Si  $A\mathcal{O}_\omega(M) \not\subseteq A\mathcal{O}_\omega(-_\omega M)$  alors  $\max A\mathcal{O}_\omega(M) < \max A\mathcal{O}_\omega(-_\omega M)$ . En effet si  $a \in A\mathcal{O}_\omega(-_\omega M) \setminus A\mathcal{O}_\omega(M)$ , d'après le lemme précédent  $s = \max A\mathcal{O}_\omega(M) \neq \max A\mathcal{O}_\omega(-_\omega M) = t$ . Si  $s > t$ , on élimine  $\omega$  d'un cocircuit positif de plus petit élément  $s$  et d'un cocircuit de plus petit élément  $a$  dont  $\omega$  est le seul élément négatif, puisque  $t \geq a$  on en déduit  $a \in A\mathcal{O}^+$ , ce qui est contradictoire.

Donc par dualité si  $A\mathcal{O}_\omega^*(M) \not\subseteq A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M)$  alors  $\max A\mathcal{O}_\omega^*(M) < \max A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M)$ . Or d'après (i) si  $\max A\mathcal{O}_\omega(M) = \max A\mathcal{O}_\omega(-_\omega M)$  alors  $A\mathcal{O}_\omega(M) = A\mathcal{O}_\omega(-_\omega M)$ , et si  $\max A\mathcal{O}_\omega^*(M) = \max A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M)$  alors  $A\mathcal{O}_\omega^*(M) = A\mathcal{O}_\omega^*(-_\omega M)$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarque.* On définira à la fin de ce chapitre une autre correspondance active *Oribas2*, pour laquelle le choix dans le cas douteux sera le même que dans *Oribas* mais où ce cas douteux sera considéré au même moment que dans le critère de compatibilité (dans le cas restreint aux activités internes ou externes nulles), c'est-à-dire de sorte que les éléments actifs soient préservés mais non pas les partitions actives. Cette autre correspondance aura dans la cas des arrangements hyperrésolubles une interprétation géométrique plus simple encore que celle de *Oribas*.

• Conclusion : transformation d'une partition de l'hypercube.

On rappelle la notation, pour tout matroïde orienté ordonné  $M$ ,  $\lambda(M) = 1$  si  $\omega \in \text{Oribas}(M)$  et  $\lambda(M) = 0$  si  $\omega \notin \text{Oribas}(M)$ . Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné sur  $e_1 < \dots < e_n$ . Au cours du calcul de  $\text{Oribas}(M)$  par induction (théorème 4.2.3), on calcule successivement la valeur  $\lambda(M_k)$  du mineur  $M_k = M/(\text{Oribas}(M) \cap [e_{k+1}, e_n]) \setminus ((E \setminus \text{Oribas}(M)) \cap [e_{k+1}, e_n])$  auquel on s'est ramené par les étapes précédentes. On se ramène à  $M_k \setminus e_k$  ou à  $M_k/e_k$  selon respectivement que  $\lambda(M_k) = 0$  ou  $\lambda(M_k) = 1$ . Autrement dit, on associe successivement au plus grand élément  $e_k$  de  $M_k$  lorsqu'il n'est ni un isthme ni une boucle, une lettre  $\setminus$  ou  $/$ , correspondant au mineur  $M \setminus e_k$  ou  $M/e_k$  auquel on se ramène pour l'étape suivante. Si  $e_k$  est un isthme ou une boucle de  $M_k$ , on a  $M_k \setminus e_k = M_k/e_k$  et la lettre associée à  $e_k$  peut être indifféremment  $\setminus$  ou  $/$ . Si  $e_k$  est un isthme, resp. une boucle, de  $M_k$ , il est intérieurement actif, resp. extérieurement actif, dans  $\text{Oribas}(M)$  et dual actif, resp. actif, dans  $M$ . Au matroïde orienté  $M$  d'activités  $(\iota, \varepsilon)$  est ainsi associé, par construction, un ensemble de  $2^{\iota+\varepsilon}$  mots sur  $\{\setminus, /\}$  (la lettre  $k$  est celle qui est associée à  $e_k$ ), qui ne diffèrent que pour les éléments actifs ou dual actifs. On déduit, dans l'algorithme même, la base associée à  $M$  de cet ensemble de mots : un élément qui n'est ni actif ni dual actif appartient à  $\text{Oribas}(M)$  si et seulement si sa lettre associée est  $/$ , un élément actif dans  $M$  n'appartient pas à la base, et un élément dual actif dans  $M$  appartient à la base.

On retrouve ainsi le résultat bien connu suivant [Da 81] (voir aussi [Bj 87][GoTr 90]), à la différence que le matroïde est supposé ici orienté, et que l'ensemble des parties de  $E$  est considéré comme l'ensemble des suites de mineurs du type  $M \setminus A'/A''$  avec  $A' + A''$  intervalle de  $E$  contenant  $\omega$ .

**Proposition 4.2.6.**

*Soit  $M$  un matroïde ordonné sur  $E$ . Les intervalles de  $2^E$  pour l'inclusion*

$$[B \setminus \text{Int}(B), B \cup \text{Ext}(B)]$$

*constituent une partition de  $2^E$  lorsque  $B$  décrit l'ensemble des bases de  $M$ .*

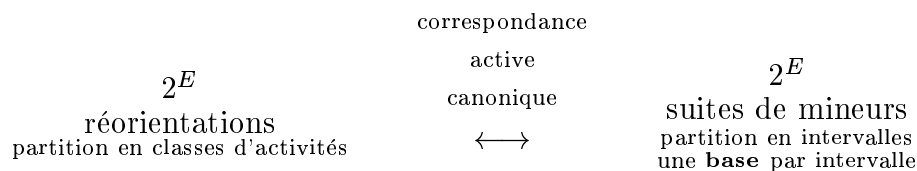
D'un autre côté, les réorientations associées à une même base d'activités  $(\iota, \varepsilon)$  forment une classe d'activités (chapitre 2 partie 2), de même cardinal  $2^{\iota+\varepsilon}$  que l'intervalle associé à la base. Et les classes d'activités forment une partition de l'ensemble  $2^E$  des réorientations. Ces deux partitions de l'hypercube sont ainsi en bijection (active) via  $\text{Oribas}_M$ . On en déduit une bijection active entre éléments de ces hypercubes dans la partie 3 'Compléments'.

Dans l'hypercube des réorientations, les éléments appartenant à une même classe d'activités se déduisent les uns des autres en changeant les coordonnées (i. e. en réorientant) sur des parties quelconques de la partition active commune - dont les plus petits éléments sont les éléments actifs. Dans l'hypercube des parties associées aux bases, les éléments appartenant à un même intervalle se déduisent les uns des autres en changeant les coordonnées (i. e. en prenant la différence symétrique) sur des éléments actifs quelconques.

Ainsi, par exemple, deux réorientations opposées d'activités  $(1, 0)$ ,  $-\emptyset M$  et  $-_E M$ , qui diffèrent par toutes leurs coordonnées, sont associées aux deux parties  $Oribas(M)$  et  $Oribas(M) \setminus f_1$ , qui ne diffèrent que par leur coordonnée sur  $f_1$ .

Attention : les partitions actives des bases n'apparaissent pas dans les quelques considérations ici-présentes, contrairement à celles des réorientations. Elles ont cependant probablement un rôle à jouer, au même titre que le graphe d'échange des bases, dont on déduit pour une base son graphe fondamental et sa partition active. Ces approfondissements sont actuellement à l'étude.

Finalement, d'un certain point de vue, la correspondance active canonique  $Oribas_M$  consiste fondamentalement en une transformation d'une partition de l'hypercube. Des bases vers les réorientations, intuitivement, elle témoigne du passage du matroïde au matroïde orienté, en une sorte de *symétrisation d'une partition de l'hypercube*.



### 4.3 Compléments

- Bijection active induite entre  $2^E$  et  $2^E$

D'une part, étant donné un matroïde orienté ordonné  $M$  sur  $E$ , on a construit une partition de l'ensemble  $2^E$  de ses réorientations en classes d'activités de cardinal  $2^{\iota+\varepsilon}$  si ses éléments sont d'activité  $(\iota, \varepsilon)$ .

D'autre part, d'après la proposition 4.2.6, les intervalles de  $2^E$  pour l'inclusion

$$[B \setminus \text{Int}(B), B \cup \text{Ext}(B)]$$

constituent une partition de  $2^E$  lorsque  $B$  décrit l'ensemble des bases de  $M$ . Un tel intervalle est clairement de cardinal  $2^{\iota(B)+\varepsilon(B)}$ .

Ainsi, comme on l'a vu pour *Oribas* en conclusion de la partie précédente, une application  $\psi_M$  qui induit une bijection entre classes d'activités et bases, définit une bijection entre les classes d'activités et ces intervalles, de sorte que le cardinal de deux parties de  $2^E$  associées soit le même.

*Définition.* Soit  $\psi_M$  une correspondance active de  $M$  obtenue par extension (théorème 2.3.1) à partir des activités  $(1, 0)$  (par exemple  $\psi_M = \text{Oribas}_M$ ).

En choisissant une réorientation de référence  $M = -_\emptyset M$ , on déduit naturellement de  $\psi_M$  une bijection  $\tilde{\psi}_M$  de  $2^E$  dans  $2^E$  : soit  $B$  une base et  $-_A M \in \psi^{-1}(B)$  telle que les éléments actifs de  $B$  ne soient pas dans  $A$ , i. e.  $A \cap (\text{Int}(B) \cup \text{Ext}(B)) = \emptyset$ . On définit alors  $\tilde{\psi}_M(A) = B$  et pour  $A' \subseteq \text{Int}(B) \cup \text{Ext}(B)$

$$\tilde{\psi}_M(A \triangle \alpha^{-1}(A')) = B \setminus (\text{Int}(B) \cap A') \cup (\text{Ext}(B) \cap A')$$

*Interprétation géométrique.* Géométriquement, pour une base  $B$  interne, ceci revient à associer à  $B$  la région la plus 'proche' de  $M$  dans la classe d'activités associée à  $B$ . Précisément la région  $-_A M$  du même côté des éléments actifs que la région  $M$  est associée à  $B$ . Une autre région de la même classe d'activités obtenue en réorientant  $\alpha^{-1}(A')$  pour  $A' \subseteq \text{Int}(B) \cup \text{Ext}(B)$  est alors associée à la partie  $B \setminus (\text{Int}(B) \cap A') \cup (\text{Ext}(B) \cap A')$ .

*Attention.* Cette bijection n'est pas invariante par réorientation de  $M$  (le matroïde orienté  $M$  est pris comme réorientation de référence, cf. interprétation géométrique).

*Remarques.*

- La notion d'activités des bases peut être définie plus généralement pour les parties de  $2^E$ , de sorte que les éléments d'un intervalle associé à une base dans la partition précédente aient les mêmes activités que cette base. Cette notion a été introduite par Las Vergnas dans [LV 84] et développée dans [LV 00]. Dans ce cadre, la bijection décrite ci-dessus préserve les activités des parties de  $2^E$ .

- Un 'circuit brisé' ('broken circuit') est un circuit moins son plus petit élément. Par définition une base est interne si elle ne contient pas de circuit brisé. L'ensemble

des parties ne contenant pas de circuit brisé (appelé le ‘complexe sans circuit brisé’ ou ‘no broken circuit complex’  $\mathcal{NBC}$ ) est en liaison étroite avec l’algèbre d’Orlik-Solomon, l’homologie des matroïdes, ou la ‘shellabilité’ des polyèdres (voir [Bj 87]). Ses éléments sont les parties des bases internes. On mentionne qu’une bijection, dans un graphe, entre ces parties et les orientations acycliques, est donnée dans [BlSa 86], mais elle ne préserve pas les activités. Ici, l’activité interne de la base associée à une partie étant l’activité duale de la région correspondante, on a défini naturellement une *bijection active* entre les parties sans circuit brisé ( $\mathcal{NBC}$ ) et les réorientations acycliques (régions).

*Exemple.* La Figure 6.4.7 illustre cette bijection sur un exemple (chapitre 6 partie 4).

- Complexité algorithmique

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné de rang  $r$  sur  $E$  de cardinal  $n$ .

Les questions de complexité algorithmique concernant les matroïdes et matroïdes orientés sont délicates à cause des diverses axiomatiques possibles et du passage non trivial de l'une à l'autre. On s'en sort en général en supposant que l'on dispose d'un oracle indiquant immédiatement certaines informations utiles sur la structure. Ici on supposera connus l'ensemble des circuits et celui des cocircuits de  $M$ . Sans rentrer dans les détails on évaluera surtout le nombre d'étapes élémentaires qui apparaissent dans les algorithmes tels qu'ils sont écrits dans ce texte, indépendamment de calculs éventuels sous-jacent.

On montre en particulier l'intérêt de la définition inductive de *Oribas*, qui permet de calculer l'image de toutes les  $2^n$  réorientations avec seulement un coût de l'ordre de  $n$  fois celui d'une seule réorientation.

(i) Calcul de l'image d'une seule base  $B$  par  $Oribas_M^{-1}$ .

L'ensemble de réorientations associées à une base se déduit d'une information 'locale' dans l'ensemble des bases (graphe fondamental de la base considérée). Il faut d'abord calculer le graphe fondamental de  $B$  (4.1), ce qui se fait en parcourant une fois l'ensemble des circuits (ou des cocircuits, ou des bases), puis sa décomposition (2.1.12) ce qui se fait en  $n$  étapes simples, puis l'orientation associée dans chaque mineur de la décomposition par  $Basori^{(1,0)}$ , ce qui se fait aussi en (moins de)  $n$  étapes simples (test + affectation) connaissant le graphe fondamental de  $B$  (algorithme (i) ou (ii) de 3.2). On n'a pas à calculer l'ensemble des circuits ou des cocircuits des mineurs considérés pour faire le calcul. En effet les circuits ou cocircuits fondamentaux à considérer dans les mineurs sont ceux de  $B$  dont on oublie les éléments qui ne sont pas dans la partie considérée (2.1.5). La partie  $Oribas^{-1}(B)$  se calcule donc en  $O(n)$  étapes simples et un parcours de la structure.

(ii) Calcul de l'image d'une seule réorientation  $M$  par *Oribas*.

On utilise l'algorithme du théorème 4.2.3. Outre le fait qu'il faut calculer à chaque fois l'activité et l'activité duale du matroïde considéré (ce qui se fait en parcourant une fois l'ensemble des circuits et des cocircuits), la complexité de l'algorithme va être la même que celle du théorème 3.8 (on se ramène à chaque fois à deux mineurs de  $M$ ). On va donc considérer que  $M$  est d'activités  $(1, 0)$ .

Pour calculer son image par *Oribas* lorsque  $-\omega M$  est aussi d'activités  $(1, 0)$  on a à calculer d'abord soit l'image de  $M/\omega$  soit celle de  $M \setminus \omega$  (cas douteux (i) ou (ii) au choix), et un test sur les signes dans le circuit ou cocircuit fondamental de  $\omega$  pour la base obtenue indique si on a considéré le bon mineur ou pas. Si on est chanceux on aura considéré le bon mineur et on aura calculé  $Oribas(M)$ . Mais si on est malchanceux (c'est-à-dire en général), on saura que l'image de  $M$  se déduit de l'autre mineur que celui que l'on a considéré.

Il faut donc en général calculer l'image de  $M/\omega$  et  $M \setminus \omega$  et donc par induction l'image de tous les mineurs de  $M$  d'activités  $(1, 0)$  du type  $M \setminus A'/A''$  avec  $A' + A''$  intervalle de  $E$  contenant  $\omega$ . La simplification due au cas non douteux, pour lequel on sait d'office quel mineur doit être pris en compte, et qui fait que l'on n'a à considérer que des mineurs d'activités  $(1, 0)$ , n'en est pas vraiment une. En effet, pour  $r$  fixé,

le nombre de réorientations d'activités  $(1, 0)$  croît exponentiellement avec  $n$ . En considérant chaque passage par la procédure 'choix' comme une étape simple (on omet le calcul de la structure des mineurs qui se fait en parcourant la structure de  $M$ ), il faut donc en général au plus  $2^n$  étapes simples pour calculer  $Oribas(M)$ .

(iii) Calcul de l'image de *toutes les réorientations* de  $M$  par  $Oribas$ .

L'intérêt de l'algorithme précédent est que lorsqu'on calcule l'image de  $M$ , on calcule en même temps celle de  $-\omega M$  (elle se déduit de l'autre mineur). Ainsi pour calculer l'image de toutes les réorientations de  $M$ , on doit obligatoirement calculer l'image de toutes les réorientations des mineurs  $M/\omega$  et  $M \setminus \omega$  puisque par (OB3.3)  $\{Oribas(M), Oribas(-\omega M)\} = \{Oribas(M \setminus \omega), Oribas(M/\omega) \cup \{\omega\}\}$ . Avec  $E = e_1 < \dots < e_n$ , on a donc par induction à calculer pour tout  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , l'image des  $2^k$  réorientations de chacun des  $2^{n-k}$  mineurs du type  $M \setminus A'/A''$  avec  $E \setminus (A' + A'') = e_1 \dots e_k$ . On a donc finalement besoin de  $n2^n$  étapes simples.

Comparativement au nombre d'objets dont on veut calculer l'image, l'algorithme est donc très efficace pour calculer celle des  $2^n$  réorientations : cela se fait en  $2^n \log_2(2^n)$  étapes alors qu'il en faut  $2^n$  pour une seule.

Le coût exponentiel du calcul de l'image d'une seule réorientation n'est pas étonnant : on verra dans le chapitre 5 que ce calcul est plus fort que celui de la solution d'un programme linéaire combinatoire, dont le meilleur coût connu est aussi exponentiel ('méthodes du simplexe' [OM]).

*Remarque.* Le calcul de l'image d'un matroïde orienté donné par  $Oribas$  peut se faire, avec une certaine économie, en utilisant une double induction. En bref, l'idée est que l'on peut savoir si le mineur considéré ( $M \setminus \omega$  ou  $M/\omega$ , et plus généralement  $M \setminus A'/A''$ ) est le bon mineur sans avoir à calculer complètement son image. Pour ceci on compare à chaque fois, pour le mineur à tester de plus grand élément  $\tilde{\omega}$ , son activité  $A\mathcal{O}_{\tilde{\omega}}$  avec celle du matroïde obtenu en réorientant  $\tilde{\omega} = \max(E \setminus (A' \cup A''))$ . Ceci revient à un parcours des mineurs de type  $M \setminus A'/A''$  en profondeur à partir de  $M$ , pour lequel des branches que l'on aurait normalement à explorer sont supprimées grâce à une petite propriété contraignante des activités. Ceci raccourcit le temps de calcul mais pas suffisamment pour que l'on décrive en détail cette alternative.



- Exemple d'une autre correspondance active

Soit *Oribas2* l'application qui a un matroïde orienté associe une de ses bases, définie en remplaçant le passage 'choix' de la définition inductive de *Oribas* (théorème 4.2.3) par celui du 'critère de compatibilité' (théorème 1.6) :

**choix**

si  $A\mathcal{O}(M) \subset A\mathcal{O}(-_\omega M)$  ou  $A\mathcal{O}^*(-_\omega M) \subset A\mathcal{O}^*(M)$  alors  $\lambda(M) := 0$

si  $A\mathcal{O}(-_\omega M) \subset A\mathcal{O}(M)$  ou  $A\mathcal{O}^*(M) \subset A\mathcal{O}^*(-_\omega M)$  alors  $\lambda(M) := 1$

si  $A\mathcal{O}(M) = A\mathcal{O}(-_\omega M)$  et  $A\mathcal{O}^*(-_\omega M) = A\mathcal{O}^*(M)$  alors **cas douteux**

Cette correspondance est évidemment bien définie et satisfait par définition le 'critère de compatibilité', c'est-à-dire qu'elle fait partie de la classe inductive de correspondances du chapitre 1, (on a vu qu'être dans le cas douteux de *Oribas* implique être dans le cas douteux de *Oribas2*, cf. lemme 4.2.5). En revanche, cette correspondance active n'appartient pas à la classe de correspondances du chapitre 2. Elle n'est pas compatible avec les décompositions des activités, ne préserve pas les partitions actives, et surtout ne vérifie pas la propriété naturelle (OB7) 'retournements' selon laquelle on peut réorienter les unions de cocircuits ou circuits positifs de plus petit élément supérieur à un élément quelconque sans changer la base associée. Cependant cette correspondance a une interprétation géométrique plus simple que *Oribas* dans le cas d'un arrangement hyperrésoluble (voir chapitre 6 partie 4, et voir Figures 6.4.1 et 6.4.2 pour la distinction entre ces deux correspondances sur un exemple).

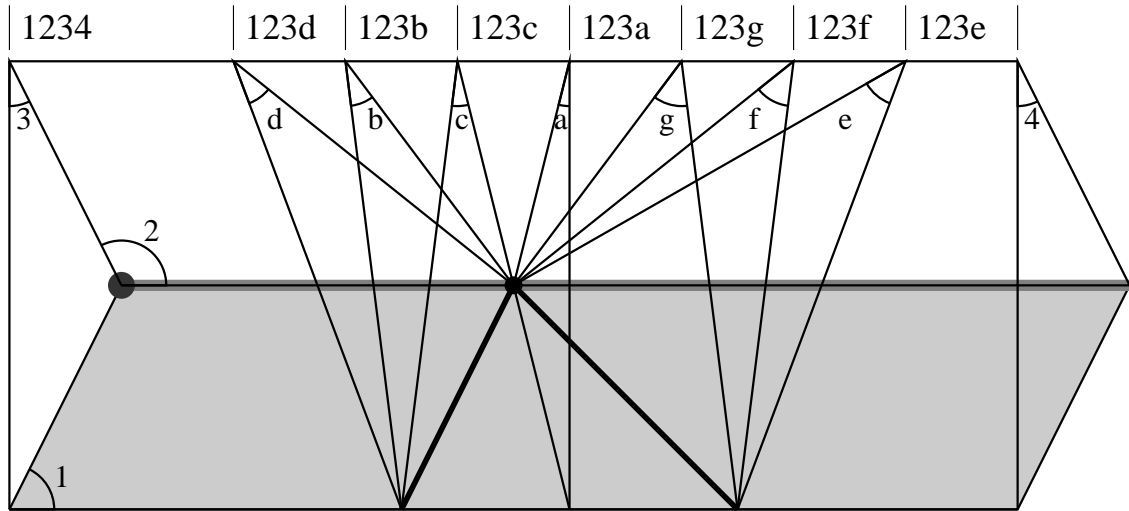


Figure 4.5 : un exemple de rang 4 pour *Oribas2*

**Proposition 4.3.1.**

*Oribas2* coïncide avec *Oribas* dans le cas uniforme, et dans le cas général pour les bases d'activités  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ .

*Preuve.* Pour une réorientation  $M$  d'activités  $(1, 0)$  ou  $(0, 1)$ , si  $A\mathcal{O}_\omega(M) \neq \emptyset$  alors  $\mathcal{O}(M) \neq \emptyset$  et donc  $M$  totalement cyclique, et si  $A\mathcal{O}_\omega^*(M) \neq \emptyset$  alors  $\mathcal{O}^*(M) \neq \emptyset$  et donc  $M$  acyclique. Donc *Oribas* et *Oribas2* coïncident pour ces réorientations.

Dans le cas d'un matroïde orienté  $M$  uniforme sur  $E = e_1 < \dots < e_n$ , toute réorientation est soit acyclique soit totalement cyclique, et on a  $\max(A\mathcal{O}_\omega(M)) = \max(A\mathcal{O}(M)) = e_{o(M)}$ , et  $\max(A\mathcal{O}_\omega^*(M)) = \max(A\mathcal{O}^*(M)) = e_{o^*(M)}$  (voir chapitre 6 pour plus de détails sur ces simplifications des activités dans le cas uniforme). Les passages 'choix' des deux algorithmes sont donc évidemment équivalents et les deux correspondances coïncident.  $\square$

### *Exemple.*

La Figure 4.5 représente quelques régions d'un exemple de rang 4. Elle reprend la Figure 2.7 et la Figure 4.4 à laquelle elle doit être comparée. L'ordre est  $1 < 2 < 3 < 4 < a < \dots < g$ , la base minimale est 1234. L'image de chaque région par *Oribas2* est écrite au dessus de chaque région. Ces images se calculent facilement à partir de la définition inductive, en ajoutant les éléments successivement. Les suites de fermés dessinées en gras sont les suites décomposantes associées aux régions, qui ici, contrairement au calcul de *Oribas*, n'interviennent pas. On pourra aussi consulter la partie 3 du chapitre 6 consacrée aux arrangements hyperrésolubles ; la Figure 4.5 y illustre une fibre de rang 4 d'un tel arrangement.

## 4.4 Récapitulatif des propriétés

Dans cette partie on récapitule les propriétés fondamentales de *Oribas*, car on a vu dans les chapitres précédents que cette application peut-être caractérisée de différentes façons, par des propriétés combinées entre elles d'adjacence, de décomposition des activités, d'induction, ou de dualité.

Par définition,  $Oribas^{(1,0)}$  est l'unique application qui a un matroïde orienté ordonné d'activités  $(1,0)$  associe une de ses bases vérifiant les propriétés suivantes :

$(OB1^{(1,0)})$  'préservation des éléments actifs $^{(1,0)}$ '

Pour tout matroïde orienté ordonné  $M$  d'activités  $(1,0)$ ,  $B = Oribas^{(1,0)}(M)$  est une base d'activités  $(1,0)$  de  $M$

$(OB8^{(1,0)})$  'adjacence'

Pour tout  $M$  d'activités  $(1,0)$ , avec  $Oribas^{(1,0)}(M) = B = b_1 < \dots < b_r$ ,  $C^*(B; b_1)$ ,  $C^*(B; b_1) \circ C^*(B; b_2)$ , ...,  $C^*(B; b_1) \circ C^*(B; b_2) \circ \dots \circ C^*(B; b_r) = E$ , sont des covecteurs positifs de  $M$ .

$(OB8^{(1,0)*})$  'adjacence duale'

Pour tout  $M$  d'activités  $(1,0)$  avec  $E \setminus Oribas^{(1,0)}(M) = E \setminus B = c_1 < \dots < c_{n-r}$ ,  $C(B; c_1)$ ,  $C(B; c_1) \circ C(B; c_2)$ , ...,  $C(B; c_1) \circ C(B; c_2) \circ \dots \circ C(B; c_{n-r}) = E$ , sont des vecteurs positifs de  $-_{f_1} M$ .

En utilisant le théorème d'extension 2.3.1, l'application *Oribas* est définie comme étant l'unique application qui a un matroïde orienté ordonné associe une de ses bases vérifiant les propriétés suivantes :

$(OB1^{(1,0)})$  'préservation des éléments actifs $^{(1,0)}$ '

$(OB8^{(1,0)})$  'adjacence'

$(OB8^{(1,0)*})$  'adjacence duale'

$(OB5)$  'décomposition'

Pour tout  $M$  ayant pour suite décomposante associée  $\emptyset = F_\varepsilon^* \subset \dots \subset F_0^* = F_c = F_0 \subset \dots \subset F_\iota = E$  on a  $Oribas(M) \cap (F_k \setminus F_{k-1}) = Oribas(M(F_k)/F_{k-1})$  pour  $1 \leq k \leq \iota$  et  $Oribas(M) \cap (F_{k-1}^* \setminus F_k^*) = (F_{k-1}^* \setminus F_k^*) \setminus Oribas(M^*(F_{k-1}^*)/F_k^*)$  pour  $1 \leq k \leq \varepsilon$ .

Les trois propriétés suivantes (OB6) (OB7) et (OB4) se déduisent de la décomposition, et celles qui viennent ensuite (OB1) et (OB2) sont moins fortes respectivement que (OB6) et (OB7) (cf. chapitre 2 partie 3). Les trois dernières viennent directement de la définition.

$(OB6)$  'préservation de la partition active'

Pour tout  $M$ ,  $M$  et  $Oribas(M)$  ont la même partition active : pour tout  $e \in E$

$$\alpha_M(Oribas(M); e) = \alpha(M; e)$$

(OB7) ‘retournements’

Pour tout  $M$  sur  $E$  et tout  $A \subseteq E$ , la classe d’activité de  $-_A M$  est

$$Oribas_M^{-1}(Oribas_M(A))$$

En d’autres termes, cette propriété signifie que l’on peut réorienter les unions de cocircuits ou circuits positifs de plus petit élément supérieur à un élément quelconque sans changer la base associée (d’où le nom ‘retournements’).

(OB4) ‘dualité’

Pour tout  $M$ ,

$$Oribas(M^*) = E \setminus Oribas(M)$$

ou autrement dit pour toute base  $B$  de  $M$

$$Basori_M(B) = Basori_{M^*}(E \setminus B)$$

(OB1) ‘préservation des éléments actifs’

Pour tout  $M$

$$\mathcal{O}(M) = Ext_M(Oribas(M))$$

$$\mathcal{O}^*(M) = Int_M(Oribas(M))$$

(OB2) ‘correspondance numérique’

Pour tout  $M$  et pour toute base  $B$  de  $M$  le nombre de sous-ensembles  $A \subseteq E(M)$  tels que  $Oribas(-_A M) = B$  est égal à  $2^{\iota_M(B) + \epsilon_M(B)}$

(OB2<sup>(1,0)</sup>) ‘bijectivité<sup>(1,0)</sup>’

Pour tout  $M$ ,  $Oribas_M^{(1,0)}$  induit une bijection entre les bases d’activité  $(1, 0)$  et les paires de réorientations opposées d’activité  $(1, 0)$  de  $M$ .

- ‘réorientation’

Pour tout  $M$  et tout  $A, A' \subseteq E$

$$Basori_{-_A M} = A \triangle Basori_M$$

$$Oribas_{-_A M}(A') = Oribas_M(A \triangle A')$$

- ‘passage à l’opposé’

Pour tout  $M$  et tout  $A \subseteq E$

$$Oribas_M(A) = Oribas_M(E \setminus A)$$

La propriété suivante exprime que  $Oribas$  est compatible avec les bijections des propriétés 0.6 et 0.9 liant les bases, et respectivement les réorientations, d’activités  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ . On en déduit la propriété (OB9<sup>(1,0)</sup>) ‘dualité forte’ qui étend

remarquablement la propriété de dualité de la programmation linéaire (cf. remarques dans le chapitre 5).

#### Propriétés 4.4.1.

Pour tout matroïde orienté ordonné  $M$  d'activités  $(1, 0)$  ou d'activités  $(0, 1)$ ,

$$\text{Oribas}(-_{f_1}M) = \text{Oribas}(M) \triangle \{f_1, f_2\}$$

$(\text{OB9}^{(1,0)})$  'dualité forte $^{(1,0)}$ ' ,

Pour tout matroïde orienté ordonné  $M$  d'activités  $(1, 0)$ ,

$$\text{Oribas}^{(1,0)}(M) = (E \setminus \text{Oribas}^{(1,0)}(-_{f_1}M^*)) - f_2 \cup f_1$$

*Preuve.* Pour  $M$  d'activités  $(1, 0)$ , soit  $B = \text{Oribas}(M)$  et  $B' = B \setminus f_1 \cup f_2$ . D'après la propriété 0.6,  $B'$  est d'activités  $(0, 1)$ . D'autre part, d'après la propriété 0.9,  $-_{f_1}M$  est d'activités  $(0, 1)$ , et donc  $-_{f_1}M^*$  est d'activités  $(1, 0)$ . D'après la propriété (OB4) 'dualité' on a, pour tout  $M$ ,  $\text{Oribas}(M^*) = E \setminus \text{Oribas}(M)$ .

Les cocircuits fondamentaux de  $B'$  s'obtiennent par l'élimination modulaire (qui est unique) de  $f_2$  entre  $C^*(f_1, B) = C^*(f_2, B') = D$  et les  $C^*(b, B)$ ,  $b \in B - f_1$ . Ainsi  $C^*(B; b)$  et  $C^*(B'; b)$  ont les mêmes éléments n'appartenant pas à  $D$ . Le premier algorithme de la proposition 3.2 pour  $B$  dans  $M$  et le second algorithme de la proposition 3.2 pour  $E \setminus B'$  dans  $M^*$  définissent la même suite de covecteurs de  $M$ , c'est-à-dire  $E \setminus B' = \text{Oribas}(-_{f_1}M^*) = E \setminus \text{Oribas}(-_{f_1}M)$ .

□

#### Proposition 4.4.2.

L'application  $\text{Oribas}^{(1,0)}$  est l'unique application qui a un matroïde orienté ordonné d'activités  $(1, 0)$  associe une de ses bases vérifiant les propriétés suivantes.

$(\text{OB1}^{(1,0)})$  'préservation des éléments actifs $^{(1,0)}$ ' ,

$(\text{OB8}^{(1,0)})$  'adjacence'

$(\text{OB9}^{(1,0)})$  'dualité forte $^{(1,0)}$ ' ,

*Preuve.* En bref, la propriété  $(\text{OB8}^{(1,0)*})$  'adjacence duale' dans  $M$  est équivalente, par définition, à la propriété  $(\text{OB8}^{(1,0)})$  'adjacence' dans  $-_{f_1}M^*$ . Plus précisément, soit  $\psi$  une application satisfaisant  $(\text{OB1}^{(1,0)})$ ,  $(\text{OB8}^{(1,0)})$  et  $(\text{OB9}^{(1,0)})$ , soit  $M$  un matroïde orienté ordonné d'activités  $(1, 0)$ , soit  $B = \psi(M)$  et  $E \setminus B = c_1 < c_2 < \dots < c_{n-r}$ . On sait que  $f_1 \in B$  et  $f_2 \notin B$ , c'est-à-dire  $c_1 = f_2$ . D'après la propriété  $(\text{OB9}^{(1,0)})$ , on a  $\psi(-_{f_1}M^*) = f_1 < c_2 < \dots < c_{n-r}$ , d'après la propriété  $(\text{OB8}^{(1,0)})$ , la suite de covecteurs de  $-_{f_1}M^*$  définie par  $f_1 < c_2 < \dots < c_{n-r}$  est une suite de covecteurs positifs de  $-_{f_1}M^*$ . C'est donc une suite de vecteurs positifs de  $-_{f_1}M$ . De la même manière que dans la preuve précédente (propriétés 4.4.1), cette suite de vecteurs est la même que la suite de vecteurs définie par  $c_1 < c_2 < \dots < c_{n-r}$ , c'est-à-dire, par définition,  $\psi$  satisfait la propriété  $(\text{OB8}^{(1,0)*})$  'adjacence duale'. □

*Remarque.* On a choisi de définir d'abord la correspondance active pour les activités  $(1, 0)$  (chapitre 3), et on en a déduit la correspondance pour les activités  $(0, 1)$  par le 'théorème d'extension' (chapitre 2) en imposant la propriété (OB4) 'dualité'. On aurait pu aussi définir tout naturellement la correspondance pour les activités  $(0, 1)$  via les bijections des propriétés 0.6 et 0.9. La propriété (OB9) 'dualité forte' prouve que ces deux définitions reviennent au même, ce qui montre à quel point cette propriété est fondamentale.

Par ailleurs,  $Oribas^{(1,0)}$  satisfait (propriété 3.7) :

(OB3<sup>(1,0)</sup>) 'induction<sup>(1,0)</sup>'

Pour tout  $M$  d'activités  $(1, 0)$  avec  $\omega = \max(E(M))$  :

$\omega \in \psi(M)$  implique  $M/\omega$  d'activités  $(1, 0)$  et  $\psi(M/\omega) = \psi(M) \setminus \omega$ ,

$\omega \notin \psi(M)$  implique  $M \setminus \omega$  d'activités  $(1, 0)$  et  $\psi(M/\omega) = \psi(M)$ .

et  $Oribas$  satisfait plus généralement (propriété 4.2.1) :

(OB3) 'induction'

pour tout  $M$  sur  $E(M)$  de plus grand élément  $\omega$  on a

(OB3.1) si  $\omega$  est un isthme de  $M$  alors  $Oribas(M) = Oribas(-_\omega M) = Oribas(M/\omega) \cup \{\omega\}$

(OB3.2) si  $\omega$  est une boucle de  $M$  alors  $Oribas(M) = Oribas(-_\omega M) = Oribas(M \setminus \omega)$

(OB3.3) si  $\omega$  n'est ni un isthme ni une boucle de  $M$  alors

$$\{Oribas(M), Oribas(-_\omega M)\} = \{Oribas(M \setminus \omega), Oribas(M/\omega) \cup \{\omega\}\}$$

L'application  $Oribas^{(1,0)}$  est déterminée par les propriétés suivantes (théorème 3.8) :

(OB2<sup>(1,0)</sup>) 'bijectivité<sup>(1,0)</sup>'

(OB3<sup>(1,0)</sup>) 'induction<sup>(1,0)</sup>'

(OB8<sup>(1,0)</sup>) 'adjacence'

et aussi par les propriétés suivantes :

(OB2<sup>(1,0)</sup>) 'bijectivité<sup>(1,0)</sup>'

(OB3<sup>(1,0)</sup>) 'induction<sup>(1,0)</sup>'

(OB8<sup>(1,0)\*</sup>) 'adjacence duale'

Pour terminer, au vu des différentes caractérisations de  $Oribas^{(1,0)}$  précédentes, on peut se demander si les propriétés (OB8<sup>(1,0)</sup>) 'adjacence' et (OB2<sup>(1,0)</sup>) 'bijectivité<sup>(1,0)</sup>' suffisent à déterminer  $Oribas^{(1,0)}$ . C'est faux en général. Néanmoins on a les résultats suivants, qui seront démontrés dans le chapitre 6 (respectivement parties 4 et 1), à partir de résultats du chapitre 5 (où le 'graphe actif des cocircuits' sera défini précisément : il s'agit d'orienter les pseudosegments portés par les pseudocercles de l'arrangement vers le plus petit élément, depuis le second plus petit ; et où

le terme ‘euclidien’ sera défini aussi : en bref on est dans le cas euclidien lorsque les arêtes d’une région n’ont pas de cycle de sommets dans le graphe actif, c’est ce qui se passe dans le cas réalisable).

(i) (proposition 6.4.1)

*Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné de rang inférieur ou égal à 3.*

*L’application  $\text{Oribas}_M^{(1,0)}$  est déterminée par les propriétés  $(\text{OB8}^{(1,0)})$  ‘adjacence’ et  $(\text{OB2}^{(1,0)})$  ‘bijectivité’.*

(ii) (proposition 6.1.9)

*Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné uniforme.*

*L’application  $\text{Oribas}_M^{(1,0)}$  est déterminée par les propriétés  $(\text{OB8}^{(1,0)})$  ‘adjacence’ et  $(\text{OB2}^{(1,0)})$  ‘bijectivité’ si et seulement si le graphe actif des cocircuits contenant  $f_1$  et  $f_2$  n’a pas de cycles.*

*C’est le cas, en particulier, si  $M$  est réalisable.*

*Ce n’est pas le cas, par exemple, si le programme  $(M, f_1, f_2)$  n’est pas euclidien.*

**Conjecture.** (en travaux... voir chapitre 5)

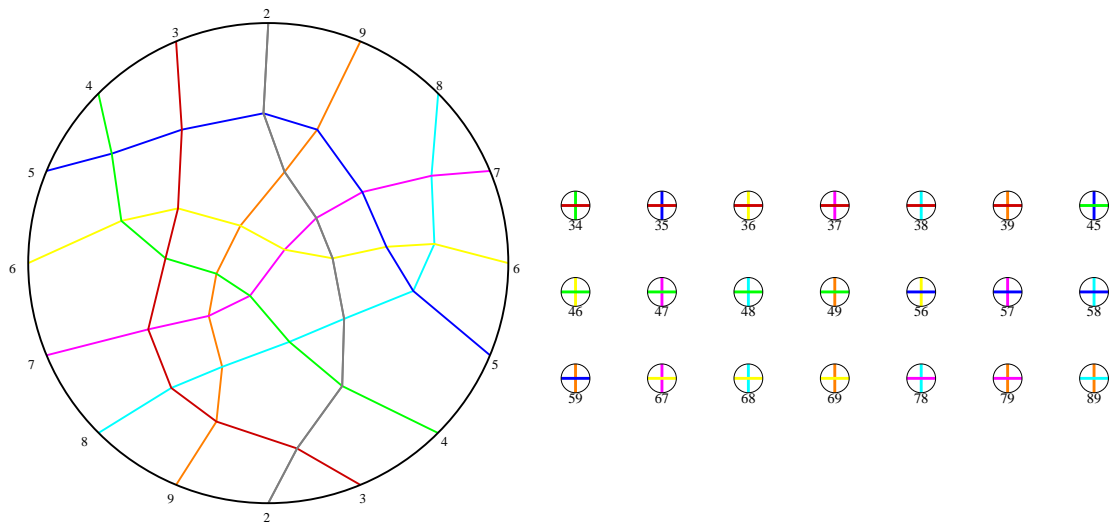
*Pour  $M$  réalisable,  $\text{Oribas}_M^{(1,0)}$  est déterminée par  $(\text{OB8}^{(1,0)})$  ‘adjacence’ et  $(\text{OB2}^{(1,0)})$  ‘bijectivité’.*

Les deux résultats précédents sont illustrés par les deux petits jeux de la Récréation.

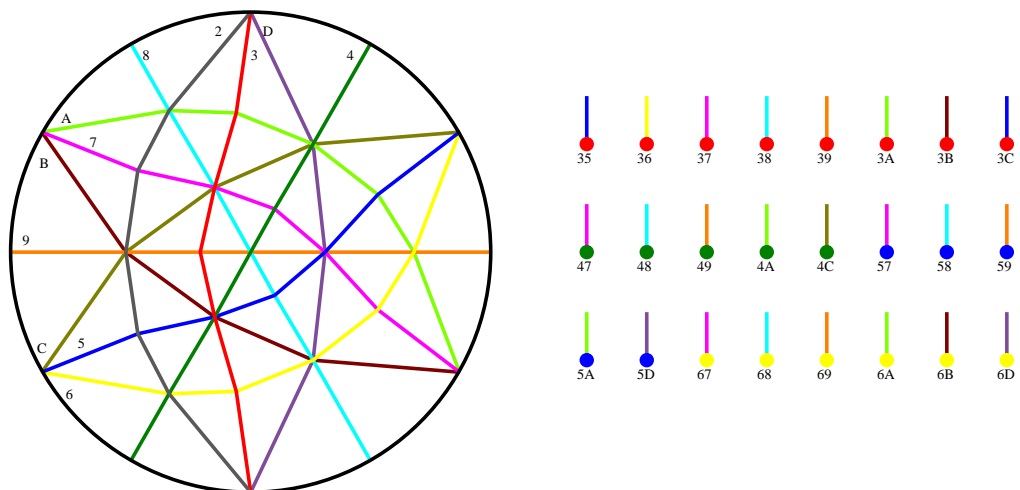
# Intermède récréatif

Voici deux petits jeux qui ne nécessitent aucune connaissance mathématique préalable. Pour leurs énoncés en grand format, leurs solutions et des explications voir

## Annexe 3 Récréation



Il faut disposer les 21 pièces de droite dans les 21 régions ne touchant pas le cerclce noir de gauche, de sorte que les couleurs de la pièce soient celles de deux bords qui se croisent de la région.



Il faut disposer les 24 pièces de droite dans les 24 régions ne touchant pas le cerclce noir de gauche, de sorte que :

- la couleur du segment de la pièce soit la couleur d'un bord de la région ;
- la couleur du point de la pièce soit une couleur passant par une extrémité de ce bord.



## Chapitre 5

# Extensions de la programmation linéaire combinatoire

Ce chapitre présente l'application *Oribas* dans un contexte d'optimisation. Un matroïde orienté ordonné  $M$  peut être considéré comme un 'programme de matroïde orienté ordonné' ayant pour unique solution sa base 'optimale'  $Oribas(M)$ . Un programme de matroïde orienté est une abstraction combinatoire de la programmation linéaire en termes de matroïdes orientés. La notion de 'programme de matroïde orienté ordonné' étend celle de 'programme de matroïde orienté' dans plusieurs directions. L'application *Oribas* se ramène entièrement à la programmation linéaire classique dans le cas des matroïdes orientés uniformes (voir la partie 1 du chapitre 6 et [GiLV1]). Les extensions introduites étudient le cas général, lorsque le matroïde orienté ordonné n'est plus nécessairement uniforme.

Le fait important est que l'ordre total sur les éléments du matroïde orienté permette d'inscrire les problème de programmation linéaire classique dans un cadre plus général où la notion d'optimalité devient naturellement inscrite dans la structure.

En bref, en programmation matroïde classique, deux éléments seulement du matroïde orienté sont distingués (le plan à l'infini et la fonction objective) et l'on cherche une face optimale d'une région bornée donnée. Dans le cadre des matroïdes orientés ordonnés, ces éléments distingués sont les deux plus petits. Lorsque l'ordre tout entier intervient, on cherche en revanche une suite 'optimale' (par analogie) de faces dans la région pour une suite de fonctions objectives. La construction donne lieu à une bijection lorsqu'on considère toutes les régions bornées, bijection qui s'étend en une correspondance définie sur toutes les régions, et plus généralement sur toutes les réorientations.

De façon intuitive et visuelle, ce problème d'optimisation étendu décrit un phénomène d'attraction dirigée par l'ordre des éléments, d'où le nom donné à *Oribas* de *fonction attractive des matroïdes orientés ordonnés*.

Ce chapitre repose essentiellement sur le chapitre 3. On peut le lire indépendamment des autres. En effet, bien que les notions d'activités des bases et des réorientations jouent un rôle fondamental dans les constructions de l'application *Oribas* (chapitre 4), le point de vue adopté ici fait se concentrer naturellement sur le cas des matroïdes orientés ordonnés d'activités  $(1, 0)$  - c'est-à-dire le cas des régions bornées - auquel se ramène le cas général par des décompositions (chapitre 2). De fait, le seul résultat antérieur utilisé dans le chapitre est le théorème fondamental du chapitre 3 qui permet de définir *Oribas*. Hormis la définition et les résultats concernant le *graphe actif des cocircuits d'un matroïde orienté ordonné* dans la partie 2, ce chapitre ne donne pas de résultats nouveaux, mais plutôt une reformulation et des illustrations des précédents dans le formalisme matriciel usuel dans ce contexte.

Avant tout, on reprend la définition de l'application *Oribas* en termes de tableaux fondamentaux des bases, équivalents aux graphes fondamentaux puisque l'on écrit simplement les cocircuits, resp. les circuits, comme colonne, resp. ligne, d'une matrice à valeur dans  $\{0, +, -\}$ .

Pour un matroïde orienté  $M$  de rang  $r$ , la base 'optimale'  $Oribas(M)$  est l'unique base satisfaisant une condition sur les signes de son tableau fondamental.

Dans la première partie on montre quel est le lien entre *Oribas* et la version 'matroïdes orientés' de la programmation linéaire, que l'on rappelle très brièvement. Pour une introduction plus complète à ce sujet, on peut consulter la partie 6 de l'annexe A, et pour (beaucoup) plus d'informations, on pourra consulter [OM, chapitre 10] ou [BaKe 92].

Dans la deuxième partie, on décrit en détails la première extension de la programmation linéaire, intitulée multiprogrammation, pour laquelle l'optimisation se fait par rapport à une suite de  $r - 1$  fonctions objectives indépendantes, qui sont les éléments de la base minimale moins le premier, qui correspond, lui, à l'infini. On introduit ensuite la notion de 'programmation en drapeaux', par analogie avec la programmation classique via l'application *Oribas*.

- Tableau fondamental d'une base.

Traditionnellement et par analogie avec les matrices du cas réel, des 'tableaux' sont utilisés pour représenter les bases (simplexes).

*Définition.* Etant donné une base  $B$  d'un matroïde orienté ordonné  $M$  sur  $E = e_1 < \dots < e_n$ , le *tableau fondamental* de  $B$  noté  $\mathcal{T}_M(B)$  est une matrice  $n \times n$  de  $E \times E$  à valeurs dans  $\{+, -, 0\}$ , telle que, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , la colonne  $i$  est  $C^*(B; e_i)$  si  $e_i \in B$  et la ligne  $i$  est  $-C(B; e_i)$  si  $e_i \notin B$  (les autres valeurs sont nulles et sans intérêt).

Cette définition est valide par orthogonalité des circuits et cocircuits fondamentaux, et on a évidemment (avec  $^t$  désignant la transposition)

$$\mathcal{T}_{M^*}(E \setminus B) = {}^t \mathcal{T}_M(B)$$

Cet objet est une représentation matricielle du graphe biparti fondamental de la base. Il est légèrement différent de celui utilisé dans [OM] (on a ajouté les lignes correspondant aux éléments de la base pour avoir à la fois une représentation des circuits et des cocircuits fondamentaux, c'est-à-dire la propriété de transposition ci-dessus).

Il y a une analogie avec la programmation linéaire réelle où des matrices interviennent. Comme on le verra dans la partie suivante, le cocircuit fondamental par rapport à  $f_1$  (élément représentant l'infini), correspond au sommet (intersection des  $r - 1$  hyperplans autres de la base) du simplexe dont on cherche à savoir si il est optimal, ce qui peut se lire avec les signes des éléments de ce tableau. La 'méthode du simplexe' dans les matroïdes orientés consiste à passer d'un tableau à un autre meilleur par un 'pivot', similairement avec le cas réel, mais ici on ne tient compte que des signes des éléments non nuls, et non pas de leur valeur.

*Remarques.*

- L'activité d'une base se lit immédiatement sur son tableau fondamental : un élément est intérieurement (resp. extérieurement) actif si il est dans  $B$  et le plus petit (non nul) de sa colonne (resp. ligne).

- On peut définir les 'tableaux' plus généralement comme des objets équivalents aux graphes bipartis (entre les éléments qui ne sont pas seuls dans leur ligne et ceux qui ne sont pas seuls dans leur colonne) : étant donné un ensemble fini totalement ordonné  $E = e_1 < \dots < e_n$ , un *tableau* peut être défini de façon générale comme étant un sous ensemble de  $E \times E$  vérifiant, pour tout  $i \in E$ , soit  $\{i\} \times E \cap T = (i, i)$ , soit  $E \times \{i\} \cap T = (i, i)$ .

- On peut alors définir des décompositions de tableaux, similairement à la décomposition des graphes bipartis du chapitre 2 partie 1 (les décompositions des activités des bases ne reposaient que sur le graphe fondamental de la base) : on peut définir un tableau 'simple' comme étant un tableau dont le seul élément plus petit de sa colonne ou de sa ligne est  $(f_1, f_1)$ . Ces tableaux correspondent dans le matroïde aux tableaux fondamentaux des bases d'activités  $(1, 0)$  ou  $(0, 1)$ , et les décompositions de la partie 1 du chapitre 2 ont pour traduction matricielle la décomposition du tableau fondamental d'une base en tableaux simples.

- La fonction attractive *Oribas*.

**Proposition 5.1.** (définition de  $Basori^{(1,0)}$  en termes de tableau)

*Soit  $B$  une base de  $M$  d'activités  $(1, 0)$ .*

*Les deux réorientations opposées  $Basori^{(1,0)}(B)$  sont celles dans lesquelles le tableau fondamental de  $B$  vérifie : le signe du plus petit élément (non nul) de chaque colonne est  $+$  et le signe du plus petit élément (non nul) de chaque ligne est  $-$ , sauf pour la première ligne.  $\square$*

La bijectivité de  $Basori^{(1,0)}$  ('théorème fondamental' 3.6) qui permet de définir l'application  $Oribas^{(1,0)}$  se traduit alors de la façon suivante.

**Théorème de la 'programmation ordonnée dans les matroïdes orientés' :**

*Pour tout matroïde orienté ordonné  $M$  d'activités  $(1, 0)$ , il existe une unique base  $Oribas(M)$  d'activités  $(1, 0)$  de  $M$  dont le tableau fondamental satisfait : le signe du plus petit élément (non nul) de chaque colonne est  $+$  et le signe du plus petit élément (non nul) de chaque ligne (sauf la première) est  $-$ .*

Le fait de prendre en compte les signes du premier cocircuit fondamental et du premier circuit fondamental (première colonne et première ligne non réduite à un élément) revient à chercher la face optimale pour une seule fonction objective (programmation linéaire 'classique' partie 1); le fait de prendre en compte les plus petits éléments de chaque cocircuit fondamental (chaque colonne) revient à optimiser selon la suite de fonctions objectives définie par la base minimale ('multiprogrammation' partie 2) ; et le fait de prendre en compte les plus petits éléments de chaque circuit fondamental (chaque ligne) revient à optimiser une suite de faces selon l'ordre tout entier ('programmation en drapeaux' partie 2).

Les réorientations d'activités  $(1, 0)$  sont les 'régions bornées' de l'arrangement de pseudosphères, en considérant, par analogie avec la programmation classique l'élément  $f_1$  comme l'infini.

D'un point de vue algorithmique, la *base optimale*  $Oribas^{(1,0)}(M)$  du matroïde orienté ordonné  $M$  d'activités  $(1, 0)$ , se calcule dans le théorème 3.8 par induction relativement au plus grand élément.

*Remarques.*

- La propriété de dualité des programmes de matroïdes orientés se généralise à ce 'programme étendu' par la propriété (OB9<sup>(1,0)</sup>) 'dualité forte' (propriété 4.4.1).

- Plus généralement *Oribas* s'applique à toutes les réorientations, non seulement celles d'activités  $(1, 0)$  (régions bornées), mais aussi les régions non bornées et les produits de régions de  $M$  et  $M^*$ . Ceci revient étant donné la définition de *Oribas* par décomposition des activités (chapitre 2), à appliquer le programme étendu précédent dans les mineurs définis par la partition active de  $M$ . En termes de tableaux, avec la remarque précédente la décomposition des activités se traduisant en décomposition du tableau fondamental en tableaux simples, on peut exprimer un théorème encore plus général que le précédent : *Oribas(M) est l'unique base de M dont chaque tableau simple de la décomposition de son tableau fondamental satisfait les conditions sur les signes du théorème précédent.*

## 5.1 Lien entre la fonction attractive et la programmation linéaire dans les matroïdes orientés.

Les résultats et définitions de cette partie ne seront plus utilisés ensuite, ils servent juste à faire ressortir les similitudes et les différences avec la partie suivante. En programmation classique dans les matroïdes orientés, un élément  $g$  représente l'infini, et un élément  $f$  représente une fonction objective à optimiser sur une région. La principale différence est que dans le cadre classique on cherche un sommet 'maximal' pour la fonction objective  $f$  dans une région, sans s'occuper de la position de cette région par rapport à la représentation géométrique de  $f$ . Dans le contexte de *Oribas*, l'optimisation par rapport à  $f$  reviendra à une 'maximisation' d'un côté de  $f$ , et à une 'minimisation' de l'autre côté. Les deux points de vue coïncident sur un demi-espace délimité par  $f$ .

Les régions bornées étant celles qui ne touchent pas  $g$ , il est naturel de les considérer comme les réorientations acycliques d'activités  $(1, 0)$  du matroïde orienté ordonné pour  $g = f_1 = e_1$  (on suppose le matroïde simple). Les sommets optimaux correspondront aux cocircuits fondamentaux des bases internes d'activité 1 par rapport à  $e_1$ . L'optimisation se fera par rapport à  $f = e_2 = f_2$ . On considèrera ainsi que l'ensemble  $E$  est ordonné par  $E = g < f < e_3 < \dots < e_n$

### • Rappels sur la programmation linéaire dans les matroïdes orientés.

Les définitions et résultats connus suivants sont présentés ici de façon à être succints. On peut lire l'Annexe 2 partie 6 ou [OM] chapitre 10 pour leur présentation traditionnelle.

*Définitions.*

- Un *programme de matroïde orienté* est un triplet  $(M, g, f)$  où  $M$  est un matroïde orienté sur  $E = E_n + \{f, g\}$ ,  $g$  n'est pas une boucle,  $f$  n'est pas un isthme, et  $f \neq g$ .
- Le programme  $(M, g, f)$  est *admissible* si il y a un cocircuit positif de  $M \setminus f$  contenant  $g$ . Il est *borné* si il y a un circuit positif de  $M/g$  contenant  $f$ .
- Le *graphe du programme*  $(M, g, f)$  est le graphe dont les sommets sont les cocircuits de  $M$  positifs sur  $E \setminus f$  et dont les arêtes sont les paires modulaires de cocircuits positifs, il est *partiellement dirigé* de la façon suivante : géométriquement, les segments des pseudocercles (faces de dimension 1) non parallèles à  $f$ , et non portés par  $g$ , sont dirigés de  $f$  vers  $g$ , d'un demi-espace choisi délimité par  $f$  vers l'autre, dans le sens dit *croissant*. Les faces de dimension 1 non dirigées sont celles qui sont portées par un élément  $e$  tel que  $efg$  est un circuit du matroïde sous-jacent, elles sont *parallèles* à  $f$ .
- Les *cocircuits optimaux* d'un programme de matroïde orienté admissible borné sont ceux qui n'ont pas d'arête sortante dans le graphe du programme. Le *covecteur optimal* (face optimale) d'un programme est la composition de ses cocircuits optimaux (géométriquement, il est la plus grande face de  $M$  parallèle à  $f$  contenant un sommet optimal quelconque).

**Résultats connus.**

- ‘Théorème principal de la programmation linéaire dans les matroïdes orientés’.
- Si  $(M, g, f)$  est admissible et borné, alors il existe un covecteur optimal.
- ‘Critère du simplexe’.

Un cocircuit est optimal si et seulement si il est le cocircuit fondamental de  $g$  dans une base ne contenant pas  $f$ , telle que ce cocircuit est positif sur ses éléments appartenant à  $E_n \cup g$  et le circuit fondamental de  $f$  dans cette base est négatif sur ses éléments appartenant à  $E_n \cup f$ .

Autrement dit un cocircuit  $C$  est optimal si et seulement si il existe une base  $B$ ,  $g \in B$ ,  $f \notin B$ ,  $C = C^*(B; g)$ , la colonne  $g$  de  $\mathcal{T}_M(B)$  est positive sauf éventuellement sur  $f$ , la ligne  $f$  de  $\mathcal{T}_M(B)$  est négative sauf éventuellement sur  $g$ .

*Remarques.*

- Géométriquement, le signe de  $f$  dans un cocircuit optimal indique simplement de quel côté de la représentation géométrique de la fonction objective  $f$  ce sommet optimal se trouve.

- Il y a une complication essentielle dans la version matroïdes orientés de la programmation linéaire : le graphe d’un programme admissible et borné a effectivement des sommets sans arête sortante, mais peut en général comporter des cycles, le programme est appelé alors *non euclidien*, alors que dans le cas réalisable ceci ne peut pas arriver.

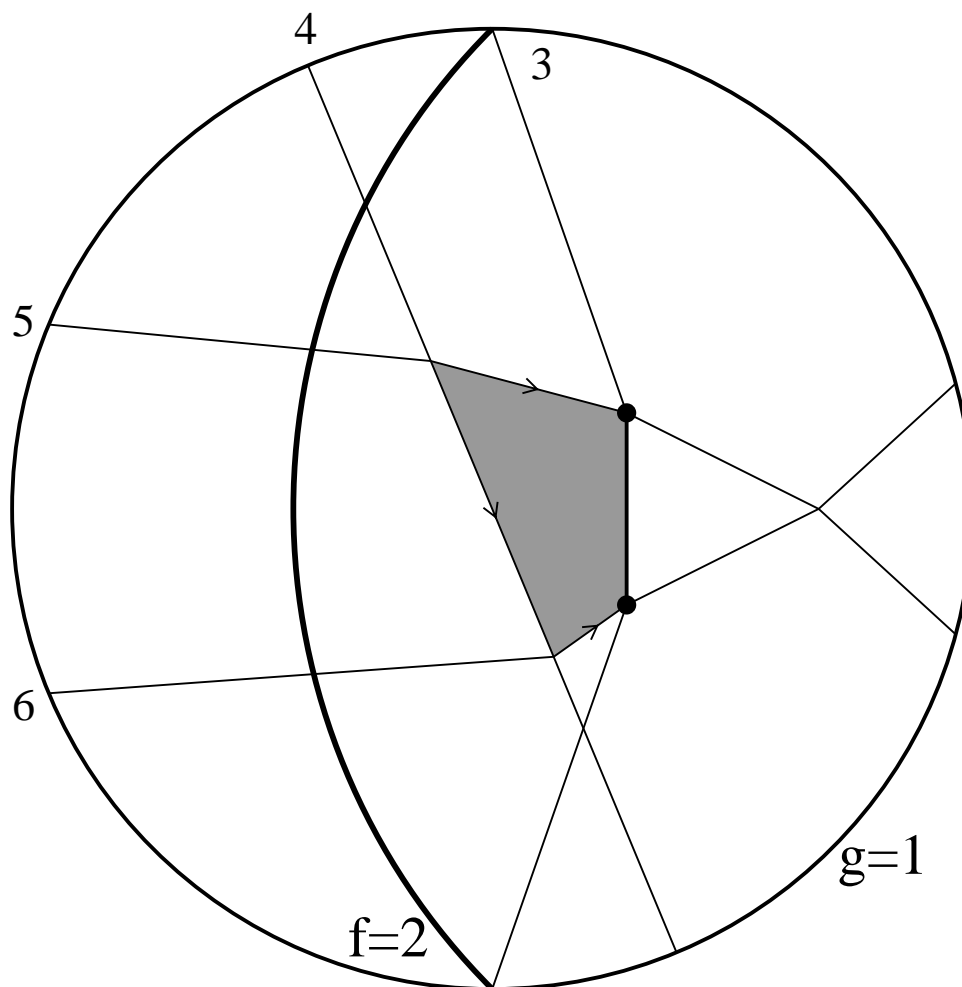
*Exemples.*

Les deux exemples suivants seront repris dans la partie suivante pour illustrer en quoi *Oribas* constitue une extension du problème en question ici.

1 - Sur la Figure 5.1 est représenté le graphe du programme défini par la région grisée. On trouve deux cocircuits optimaux représentés par des ronds noirs, et le covecteur optimal maximal est la face (en gras), parallèle à  $f$ , joignant ces deux cocircuits. Ce sont les cocircuits fondamentaux de  $g = 1$  par rapport aux bases 135 et 136. On vérifie sur les tableaux fondamentaux de ces bases (ci-après) qu’ils vérifient les conditions du ‘critère du simplexe’ et on note bien que seule la première colonne  $g$  et la première ligne  $f$  sont à considérer pour caractériser l’optimalité. On a représenté dans les tableaux fondamentaux seulement les signes utiles : par définition les éléments diagonaux de la base (resp. de son complémentaire) sont signés + (resp. -), et la première colonne est positive, la première ligne est négative sauf sur  $g$ .

135	1	2	3	4	5	6
1	+					
2	+	-	-			
3			+			
4	+		x	-	x	
5					+	
6	+		x		x	-

136	1	2	3	4	5	6
1	+					
2	+	-	-			
3			+			
4	+		x	-		x
5	+		x		-	x
6						+



**Figure 5.1 : premier exemple de programme de matroïde orienté**

2 - Sur la Figure 5.2 sont représentés le graphe du programme défini par chacune des deux régions grisées, qui ont le même cocircuit optimal représenté par un rond noir. Ce cocircuit est le cocircuit fondamental commun de  $g = 1$  par rapport aux bases 145 et 146, dont les tableaux fondamentaux sont écrits ci-après, en ne laissant que les signes utiles (qui coïncident pour les deux régions grisées).

145	1	2	3	4	5	6
1	+					
2	+	-		-	-	
3	+		-	x	x	
4				+		
5					+	
6				x	x	-

146	1	2	3	4	5	6
1	+					
2	+	-		-	-	
3	+		-	x		x
4				+		
5				x	-	x
6						+

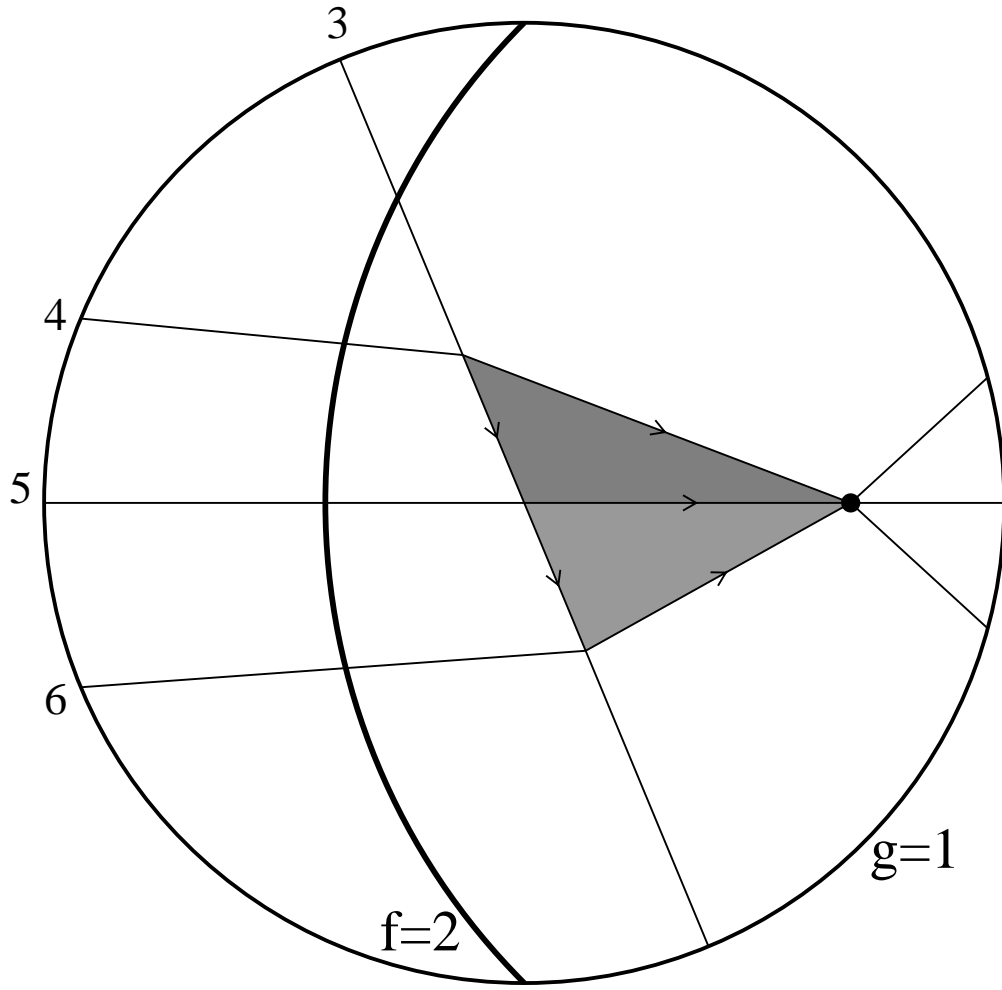


Figure 5.2 : second exemple de programme de matroïde orienté

- Lien avec  $Oribas^{(1,0)}$ .

**Proposition 5.1.1.**

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné sur  $E = g < f < e_3 < \dots < e_n$ , d'activités  $(1, 0)$ .

- (i) Le programme  $(M, g, f)$  est admissible et borné.
- (ii) Le cocircuit fondamental de  $g$  par rapport à  $Oribas^{(1,0)}(M)$  est un cocircuit optimal de  $(M, g, f)$ .

*Preuve.* (i) Le matroïde orienté  $M$  étant acyclique, il existe un cocircuit positif de  $M \setminus f$  contenant  $g$  et le programme  $(M, g, f)$  est admissible. De plus, l'activité duale de  $M$  étant 1,  $-_g M$  est totalement cyclique (propriété 0.9), et il existe un circuit positif de  $M/g$  contenant  $f$ , donc  $(M, g, f)$  est borné. (ii) Par définition de  $B = Oribas^{(1,0)}(M)$  (proposition 3.2), on a  $C^*(B; g)$  positif et  $C(B; f)$  a pour seul élément négatif  $g$ , ce qui est exactement le critère d'optimalité précédent.  $\square$



*Remarques.*

- En termes de matroïdes orientés, le problème de programmation linéaire dual est traité par le matroïde orienté dual en permutant  $f$  et  $g$  : par le programme  $(M^*, f, g)$ . Ceci se retrouve dans  $Oribas^{(1,0)}$  avec la propriété (OB9<sup>(1,0)</sup>) 'dualité forte<sup>(1,0)</sup>' de la proposition 4.4.1 :  $f_1$  et  $f_2$  jouent des rôles duaux.

- Par définition, un programme  $(M, g, f)$  admissible borné ne suppose pas que  $M$  soit acyclique : la région dans laquelle on cherche un sommet 'maximal' pour  $f$  est une région de  $M \setminus f$ , et l'orientation de  $f$  indique le sens 'croissant' de  $f$ . Le cas où la région considérée est du côté négatif de  $f$  n'est donc pas pris en compte par  $Oribas^{(1,0)}$ , et c'est la seule 'perte' par rapport aux programmes de matroïdes orientés classiques. En revanche,  $Oribas^{(1,0)}$  ne dépend pas d'une orientation de référence de  $M$ , ce qui se traduit en termes d'optimisation par le fait que, un sens 'croissant' de  $f$  étant choisi,  $Oribas^{(1,0)}$  calcule pour les régions du côté 'croissant' de  $f$  leur sommet 'maximal' pour  $f$ , et pour les régions du côté 'décroissant' de  $f$  leur sommet 'minimal'. C'est pourquoi on parle simplement de sommet 'optimal' calculé par  $Oribas$ . De plus, lorsqu'on modélise un problème de programmation linéaire par un programme de matroïde orienté, on peut toujours remédier à la 'perte' en question, puisqu'il suffit d'ajouter l'hyperplan affine  $f$  représentant la forme linéaire à optimiser hors des régions bornées (elles sont alors toutes du même côté de  $f$  dans le matroïde orienté).

- Si  $M$  est uniforme (c'est-à-dire lorsque tous les éléments y compris  $f$  et  $g$  sont en position générale), le cocircuit fondamental de  $g$  par rapport une base détermine cette base. La bijection  $Oribas^{(1,0)}$  revient à associer à chaque région bornée son sommet optimal, au sens ci-dessus. Le programme 'étendu' défini par  $Oribas^{(1,0)}$  coïncide avec le programme classique du côté croissant de  $f$  et la seule nouveauté est alors que l'on s'intéresse à toutes les régions bornées à la fois (cf. chapitre 6 partie 1).

- La complexité exponentielle du calcul de  $Oribas(M)$  (cf. partie 3 du chapitre 4 'Compléments') n'est pas étonnante, les 'méthodes du simplexe' étant elles mêmes de complexité exponentielle. Cependant la construction de  $Oribas$  par induction n'est pas la même : elle revient à chercher un sommet optimal en supprimant et en contractant successivement des éléments, c'est-à-dire en supprimant successivement des contraintes ou des variables dans le programme linéaire (voir en particulier le cas uniforme chapitre 6 partie 1).

## 5.2 Multiprogrammation et programmation en drapeaux

- Multiprogrammation : optimisation selon une suite de fonctions objectives.

La principale nouveauté de cette partie est la définition du *graphe actif des cocircuits d'un matroïde orienté ordonné*, qui consiste à orienter le graphe des cocircuits, d'une façon dépendant de l'ordre des éléments, mais invariante par réorientation.

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné sur  $E$  d'activités  $(1, 0)$ . On appelle *cocircuit optimal* de  $M$  le cocircuit fondamental de  $g$  par rapport à  $Oribas^{(1,0)}(M)$ . On montre que ce cocircuit est l'unique sommet sans arête sortante du graphe actif des cocircuits de  $M$ .

Plus précisément, on a vu dans la partie précédente que ce cocircuit est un sommet sans arête sortante du graphe du programme  $(M, f_1, f_2)$ , optimal au sens de ce programme. L'application *Oribas* calcule donc pour une région donnée un cocircuit optimal particulier, alors que l'ensemble des solutions du programme  $(M, f_1, f_2)$  au sens traditionnel est une face, parallèle à  $f_2$ . En fait, pour les faces parallèles à  $f_2$ , *Oribas* résout encore un problème d'optimisation mais cette fois par rapport au plus petit élément non parallèle à  $f_2$  (au sens employé dans ce chapitre), c'est-à-dire le plus petit élément indépendant de  $f_1$  et  $f_2$ , c'est-à-dire  $f_3$ , le troisième élément de la base minimale. Pour les faces parallèles à  $f_3$  parmi celles ci, on optimise par rapport à  $f_4$  et ainsi de suite...

L'optimisation se fait en général par rapport à l'ensemble ordonné  $f_2 < \dots < f_r$  (éléments de la base minimal moins  $f_1$ ), et conduit pour toute région bornée à un unique sommet optimal : le cocircuit fondamental de *Oribas*( $M$ ) par rapport à  $f_1$ .

Comparativement à la partie précédente, cette 'multiprogrammation' revient à prendre en compte, dans le tableau fondamental de la base, les signes des plus petits de *chaque* cocircuit fondamental (chaque colonne), alors que dans le cas classique on ne prend en compte ceux-ci que lorsqu'ils appartiennent au circuit fondamental de la fonction objective (première ligne non réduite à un élément).

*Définition.* Le *graphe des cocircuits* d'un matroïde orienté  $M$  est le graphe dont :

- les sommets sont les cocircuits de  $M$ ,
- les arêtes (non orientées) sont les paires modulaires de cocircuits conformes de  $M$  (i. e. les paires de cocircuits dont l'intersection des complémentaires est un fermé de rang  $r - 2$ , et dont les signes coïncident sur leur intersection).

On appelle *graphe actif des cocircuits*, noté  $G_M$ , d'un matroïde orienté ordonné  $M$  le graphe orienté dont le graphe sous-jacent est le graphe des cocircuits et tel que :

- si  $M$  de rang  $r = 2$  de base minimale  $g < f$ , le graphe des cocircuits de  $M$  étant un cycle, il est orienté depuis les deux cocircuits opposés ne contenant pas  $f$  vers les deux cocircuits opposés ne contenant pas  $g$ ,
- si  $r > 2$ , les arêtes sont orientées de façon cohérente avec l'orientation dans les contractions  $M/F$  où  $F$  est un fermé de rang  $r - 2$  (i. e.  $(D_1, D_2)$  orientée de  $D_1$  vers  $D_2$  dans  $M$  si et seulement si  $(D_1, D_2)$  orientée de  $D_1$  vers  $D_2$  dans  $M/F$  où  $F = (E \setminus D_1) \cap (E \setminus D_2)$ ).

Il faut noter que le graphe actif des cocircuits  $G_M$  de  $M$  est invariant par réorientation de  $M$ .

*Interprétation géométrique.* Le graphe des cocircuits, parfois appelé *squelette*, est simplement le graphe des faces de dimensions 0 (sommets) et 1 (arêtes) dans une représentation topologique du matroïde orienté. Le graphe actif des cocircuits s'obtient alors en considérant tous les pseudocercles dans l'arrangement (contractions de rang 2), et en orientant les faces de dimension 1 qu'ils portent (arêtes) vers le plus petit élément coupant le pseudocercle ( $g$ ), depuis le plus petit élément coupant le pseudocercle en un sommet distinct du précédent ( $f$ ).

**Propriété 5.2.1.** (graphe actif des cocircuits et base minimale)

Avec  $f_1 < \dots < f_r$  désignant la base minimale de  $M$ . Soit  $(D_1, D_2)$  une arête de  $G_M$ . Soit  $f_i = \min(D_1)$  et  $f_j = \min(D_2)$ .

Si  $i < j$  (resp.  $i > j$ ) alors  $(D_1, D_2)$  orientée de  $D_1$  vers  $D_2$  (resp. de  $D_2$  vers  $D_1$ ).

Si  $i = j$  alors soit  $D$  obtenu par élimination modulaire (unique) de  $f_i = f_j$  entre  $D_1$  et  $-D_2$ , et soit  $f_k = \min(D)$ . Si  $f_k$  a un signe opposé dans  $D$  et  $D_1 \circ D_2$ , alors  $(D_1, D_2)$  orientée depuis  $D_1$  vers  $D_2$ . Si  $f_k$  a le même signe dans  $D$  et  $D_1 \circ D_2$ , alors  $(D_1, D_2)$  orientée depuis  $D_2$  vers  $D_1$ .

*Preuve.* Le plus petit élément d'un cocircuit est toujours un élément de la base minimale (proposition 0.5)). Pour  $M$  de rang 2, si  $i < j$  alors  $f_i = g$  et  $f_j = f$ , et si  $i = j$  alors  $f_i = f_j = f$  (sinon  $M$  serait de rang 1) et  $f_k = g$ . Dans les deux cas, les deux définitions coïncident évidemment ( $f$  a un signe opposé dans  $D$  et  $D_1$  si et seulement si  $f$  est sur le chemin de  $D_1$  vers  $D$  ne passant pas par  $D_2$ ). On suppose ensuite  $M$  de rang supérieur à 2.

Si  $i < j$ , on a  $cl(\{f_1, \dots, f_{i-1}\}) \subseteq F$  ( $F = (E \setminus D_1) \cap (E \setminus D_2)$ ), or  $f_i = \min(E \setminus cl(\{f_1, \dots, f_{i-1}\}))$  par définition, donc  $f_i = \min(E \setminus F) = g$ . D'autre part pour tout  $k < j$ , on a  $f_k \in E \setminus D_2$ , donc  $cl_M(\{f_1, \dots, f_{j-1}\} \setminus F) \subseteq cl_{M/F}(f_i)$  (car  $F$  fermé de rang  $r - 2$  de  $E \setminus D_2$  fermé de rang  $r - 1$  et  $f_i \in (E \setminus D_2) \setminus F$ ). D'autre part  $f_j$  est indépendant de  $f_i$  dans  $M/F$ , sinon  $f_j \in cl_M(F \cup f_i) = E \setminus D_2$ . Donc  $f_j = \min(E \setminus cl_M(\{f_1, \dots, f_{j-1}\})) = \min((E \setminus F) \setminus cl_{M/F}(f_i)) = f$ .

Si  $i = j$ , alors  $f_k = \min(D)$  vérifie  $k < i$ , et donc  $f_k = g$  et  $f_i = f_j = f$  avec le même raisonnement (qui utilise seulement la modularité de  $D_1$  et  $D_2$ ).  $\square$

*Exemple.* Le graphe actif des cocircuits est entièrement représenté sur les exemples des Figures 6.1.2 et 6.4.8 du chapitre 6.

*Remarques.*

- Si  $M$  d'activités  $(1, 0)$ , les orientations des arêtes orientées du graphe du programme  $(M, f_1, f_2)$  coïncident avec celles du graphe actif des cocircuits de  $M$ .

- Pour  $M$  de rang 2, on a déjà construit le graphe actif des cocircuits de  $M$  pour construire  $Oribas_M^{(1,0)}$  dans l'exemple à la fin du chapitre 3.

**Lemme 5.2.2.**

Les graphes  $G_{M/\omega}$  et  $G_{M \setminus \omega}$  se déduisent de  $G_M$  avec une direction cohérente pour les arêtes induites.

Précisément, soit  $M$  de rang strictement supérieur à 2, sur  $E$  de plus grand élément non isthme  $\omega$ , et  $(D, D')$  dirigée de  $D$  vers  $D'$  dans  $G_M$ . Si  $\omega \notin D$  et  $\omega \notin D'$  alors,  $(D, D')$  est une arête de  $G_{M/\omega}$ , dirigée de  $D$  vers  $D'$ . Si  $\omega \in D$  et  $\omega \in D'$  alors  $(D \setminus \omega, D' \setminus \omega)$  est une arête de  $G_{M \setminus \omega}$ , dirigée de  $D \setminus \omega$  vers  $D' \setminus \omega$ . Si  $\omega \in D$ ,  $\omega \notin D'$  et  $D'$  est un cocircuit de  $M \setminus \omega$  alors  $(D \setminus \omega, D')$  est une arête de  $G_{M \setminus \omega}$ , dirigée de  $D \setminus \omega$  vers  $D'$ . Si  $\omega \in D$ ,  $\omega \notin D'$  et  $D'$  n'est pas un cocircuit de  $M \setminus \omega$  alors il existe  $D''$  avec  $\omega \in D''$  de signe opposé à celui de  $\omega$  dans  $D$ , avec  $(D'', D')$  dirigée de  $D'$  vers  $D''$  dans  $G_M$ , et  $(D \setminus \omega, D'' \setminus \omega)$  arête de  $G_{M \setminus \omega}$ , dirigée de  $D \setminus \omega$  vers  $D'' \setminus \omega$ .

*Preuve.* Le premier cas est évident. Dans les autres cas, l'arête considérée est une arête de  $M/F$  de rang 2, avec  $\omega \in E \setminus F$ , on a alors  $\omega \notin fg$  (sinon  $\omega = f$ ,  $cl_M(F \cup g) = E \setminus \omega$  et  $n$  est un isthme de  $M$ ), et les directions dans  $G_M$  se déduisent de celles dans  $G_{M/F}$ , d'où évidemment les résultats (dans le dernier cas, si  $\omega \notin D'$  et  $D'$  n'est pas un cocircuit, on sait que  $D'$  s'obtient par élimination modulaire de  $\omega$  entre deux cocircuits, conformes avec  $D'$ , qui sont donc  $D$  et  $D''$ ).  $\square$

**Théorème 5.2.3.**

Soit  $M$  d'activités  $(1, 0)$ , et  $B = \text{Oribas}^{(1,0)}(M)$ . Alors  $C^*(B; f_1)$  est l'unique sommet sans arête sortante (puits) de la restriction de  $G_M$  aux cocircuits positifs de  $M$ .

*Preuve.* On note  $D = C^*(B; f_1)$ . Soit  $(D, D')$  une arête dans la restriction de  $G_M$  aux cocircuits positifs de  $M$ , il existe  $D'$  positif avec  $\min(D') = f_1$  (activité duale 1), et on définit  $D''$  par élimination modulaire de  $f_1$  entre  $D'$  et  $-D$ , avec  $\min(D'') = f_k$ ,  $k > 1$ . Alors puisque  $B - f_1 \subseteq E \setminus D$  et  $D'$  positif, on a  $D'' \cap B \subseteq D''^+$ . Si  $f_k \in B$ , alors avec  $E \setminus B = c_1 < \dots < c_{n-r}$  et  $c_i = \min(C^*(B; f_k))$ , le vecteur  $C(B; f_2) \circ C(B; c_2) \circ \dots \circ C(B; c_i)$  a pour seul élément négatif  $f_1$  (définition de  $\text{Oribas}^{(1,0)}$  3.2), ne contient pas d'élément de  $E \setminus B$  inférieur à  $f_k$  et ne peut donc pas être orthogonal à  $D''$ . Donc  $f_k \notin B$ ,  $f_k = c_j$  et le vecteur  $C(B; f_2) \circ C(B; c_2) \circ \dots \circ C(B; c_j)$  a pour seul élément négatif  $f_1$ , ne contient pas d'élément de  $E \setminus B$  inférieur à  $f_k$  autre que  $f_k$ , donc, par orthogonalité avec  $D''$ ,  $f_k$  doit être négatif dans  $D''$ , c'est-à-dire  $(D, D')$  orientée de  $D'$  vers  $D$  dans  $G_M$  (lemme 5.2.1). le cocircuit  $D$  est donc un puits dans la restriction de  $G_M$  aux cocircuits positifs de  $M$ .

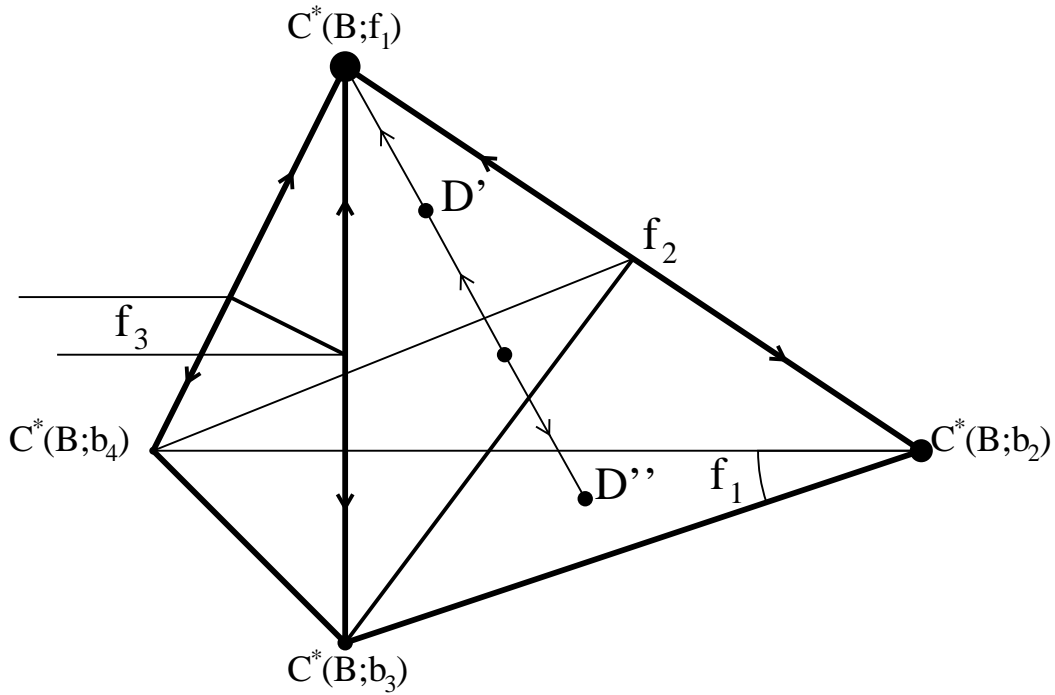
Ensuite, on montre par induction que pour tout matroïde orienté ordonné  $M$  (d'activités quelconques), la restriction de  $G_M$  aux cocircuits positifs de  $M$  a au plus un puits. Si  $M$  est de rang inférieur à 2, c'est évident. On suppose maintenant que  $D$  et  $D'$  sont deux tels puits. Soit  $\omega$  le plus grand élément de  $E$  qui ne soit pas un isthme.

Si  $\omega \notin D$  et  $\omega \notin D'$ , alors  $D$  et  $D'$  sont des puits de la restriction de  $G_{M/\omega}$  aux cocircuits positifs de  $M/\omega$  (lemme 5.2.2), donc  $D = D'$  par hypothèse d'induction.

Si  $\omega \in D$  et  $\omega \in D'$ , alors  $D \setminus \omega$  et  $D' \setminus \omega$  sont des puits de la restriction de  $G_{M \setminus \omega}$  aux cocircuits positifs de  $M \setminus \omega$  (une arête sortante dans  $G_{M \setminus \omega}$  induirait une arête sortante dans  $G_M$ , lemme 5.2.2), donc  $D = D'$  par hypothèse d'induction.

Si  $\omega \in D$  et  $\omega \notin D'$ , alors si  $D'$  n'est pas un cocircuit de  $M \setminus \omega$ , il existe deux arêtes  $(D', D_1)$  et  $(D', D_2)$  dans  $G_M$  avec  $D_1$  positif,  $\omega \in D_1$ , et  $D_2$  ayant pour seul élément négatif  $\omega$ , les deux arêtes sont dirigées vers  $D'$  par hypothèse, ce qui contredit le lemme 5.2.2. Donc  $D'$  est un cocircuit de  $M \setminus \omega$ ,  $D \setminus \omega$  et  $D'$  sont deux puits de la restriction de  $G_{M \setminus \omega}$  aux cocircuits positifs de  $M \setminus \omega$  et  $D = D'$ .

□



**Figure 5.3 : illustration pour le théorème 5.2.3**

*Interprétation géométrique.* Suivant l'interprétation géométrique de la définition de  $Oribas^{(1,0)}$  (proposition 3.2), les segments de pseudodroites, dans l'hyperoctant défini par  $B$  contenant la région associée à  $B$ , ayant pour une extrémité  $C^*(B; f_1)$  et pour l'autre un sommet de  $f_1$  sont coupés par les éléments de la base minimale qui définissent cet hyperoctant, et sont donc dirigés vers  $C^*(B; f_1)$ . En reprenant le dessin du haut de la Figure 3.3, la Figure 5.3 illustre le théorème 5.2.3 et sa preuve.

*Remarque.* Le cocircuit  $C^*(B; f_1)$  calculé par  $Oribas^{(1,0)}$  est donc 'optimal' pour une suite de fonctions objectives, combinant 'maximisations' et 'minimisations' selon la position de la région par rapport aux éléments de la base minimale. Cependant, comme remarqué dans la partie précédente, on peut choisir le type d'optimisation que l'on veut effectuer pour un problème réel en choisissant la position de la base minimale par rapport aux régions bornées de l'espace affine, avant d'en considérer le matroïde orienté.

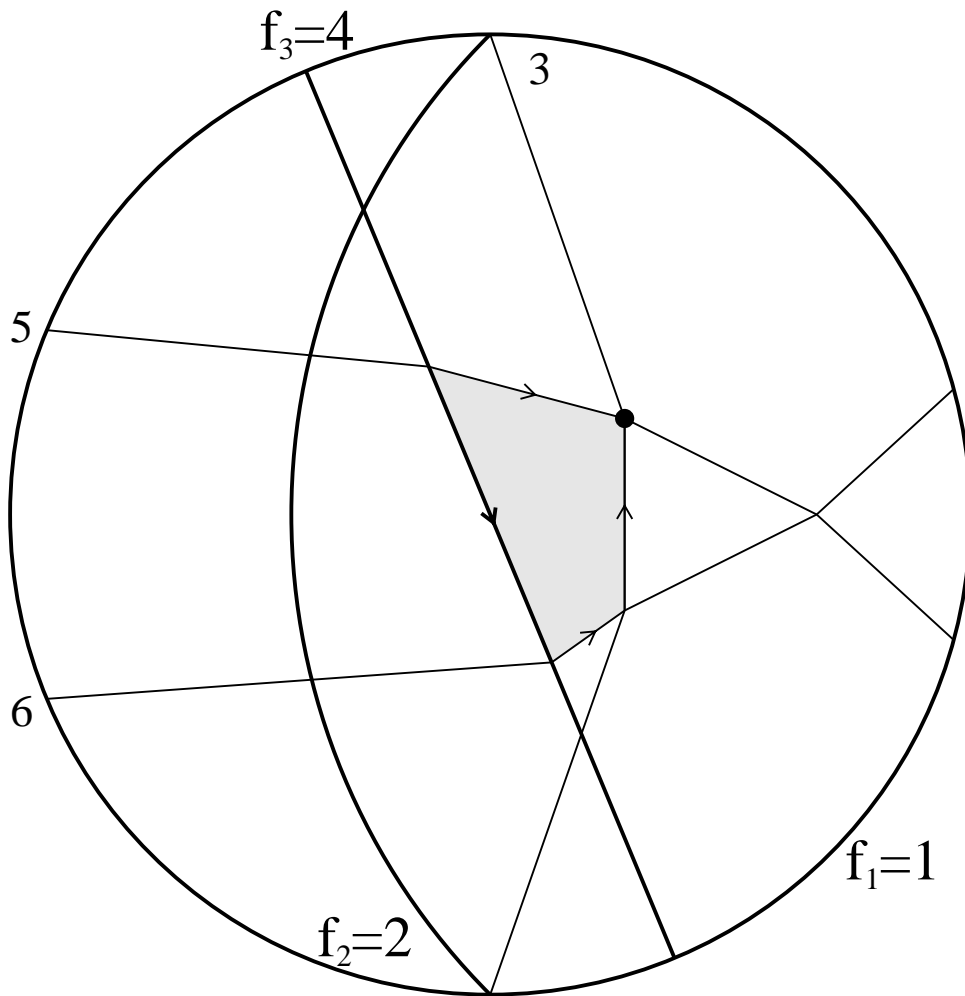


Figure 5.4 : première extension (multiprogrammation)

*Exemple.*

135	1	2	3	4	5	6
1	+					
2	+	-	-			
3			+			
4	+		x	-	-	
5					+	
6	+		x		x	-

La Figure 5.4 illustre le théorème 5.2.3, le cocircuit fondamental de  $f_1$  par rapport à la base est l'unique puits de la région grisée. Cette figure doit être comparée à la Figure 5.1. Pour la base 135, le cocircuit fondamental de 1 (colonne 1) est positif, le circuit fondamental de 2 (ligne 2) est négatif sur 1, et en outre le cocircuit

fondamental de 5 (colonne 5) a un signe opposé pour 5 et son plus petit élément 4. La base 135 est donc la base associée à la région par *Oribas*. Par contre la base 136 ne satisfait pas la définition de *Oribas*<sup>(1,0)</sup> : dans le cocircuit fondamental de 6 (colonne 6), le plus petit élément 4 et 6 sont de même signe.

136	1	2	3	4	5	6
1	+					
2	+	-	-			
3			+			
4	+		-	-		+
5	+		+		-	-
6						+

- Programmation en drapeaux : optimisation d'une suite de faces.

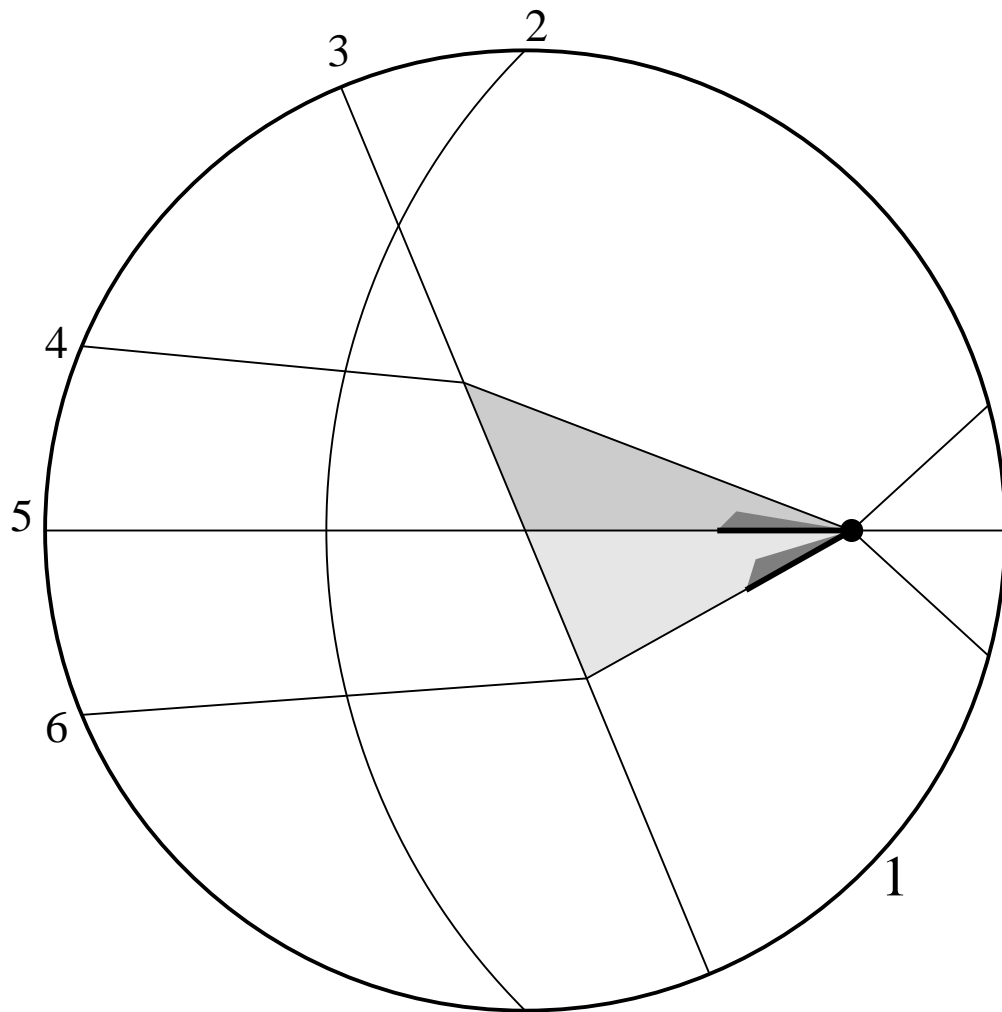
En général deux régions peuvent avoir le même sommet optimal. Pourtant *Oribas* distingue toutes les régions, car ce sont des suites de faces qui sont prises en compte et non plus seulement des sommets.

Comparativement à la partie 2, cette 'programmation en drapeaux' revient à prendre en compte, dans le tableau fondamental de la base, le signes des plus petits éléments de *chaque* circuit fondamental (chaque ligne) alors qu'en programmation linéaire classique, on ne prend ces signes en comptes que lorsqu'ils appartiennent au cocircuit fondamental de  $f_1$  (première colonne).

Plus précisément dans la programmation linéaire habituelle dans les matroïdes orientés (partie 1), on définit un cocircuit optimal en ne s'intéressant qu'au premier cocircuit fondamental de la base (ou première colonne de son tableau fondamental) et son premier circuit fondamental (ou première ligne), qui doivent satisfaire une condition sur les signes ('critère du simplexe'). Cette condition est la même que dans la définition de *Basori*<sup>(1,0)</sup> (proposition 3.2 en ne s'occupant que du premier covecteur (le cocircuit  $C^*(B; f_1)$ ) et du premier vecteur (le circuit  $C^*(B; f_2)$ ) de la suite de  $r$  covecteurs et de  $n - r$  vecteurs de la définition, d'où l'on a déduit la proposition 5.1.1.

Par analogie, *Oribas*<sup>(1,0)</sup>( $M$ ) peut donc être pris comme définition de la solution d'un *programme de matroïde orienté ordonné* ( $M, E, <$ ) qui calcule une 'base optimale', en prenant en compte cette fois tous les cocircuits fondamentaux et tous les circuits fondamentaux de la base : *Oribas*<sup>(1,0)</sup>( $M$ ) est l'unique base satisfaisant la condition générale de la proposition 3.2 sur leurs signes.

Etant donné l'importance de l'ordre, et la définition de *Basori*<sup>(1,0)</sup> par adjacence, on pourrait dire que la suite de covecteurs  $C^*(B; b_1)$ ,  $C^*(B; b_1) \cup C^*(B; b_2)$ , ...,  $C^*(B; b_1) \cup C^*(B; b_2) \cup \dots \cup C^*(B; b_r) = E$ , avec  $B = \text{Oribas}(M)$ , est la *suite optimale de faces* de ( $M, E, <$ ).



**Figure 5.5 : seconde extension (programmation en drapeaux)**

*Exemple.* Sur la Figure 5.5 sont représentés les ‘suites de faces optimales’ pour chacune des deux régions grisées. Elles correspondent aux suites de covecteurs définis par les bases 145 et 146. Leurs tableaux fondamentaux, signés chacun selon la région associée, sont écrits ci-après (en ne laissant que les signes utiles). La Figure 5.5 et les tableaux fondamentaux doivent être comparés à la Figure 5.2 et aux tableaux de l’exemple 2 de la partie précédente.

145	1	2	3	4	5	6
1	+					
2	+	-		-	-	
3	+		-	x	x	
4				+		
5					+	
6				+	x	-

146	1	2	3	4	5	6
1	+					
2	+	-		-	-	
3	+		-	x		x
4				+		
5				+	-	x
6						+



Sur les exemples des Figures 5.4 et 5.5 la différence avec les programmes de matroïde orienté respectivement des Figures 4.1 et 5.2 de la partie 1 n'apparaît que par un signe du tableau fondamental qui pouvait être arbitraire, et qui est maintenant imposé (le plus petit élément du circuit fondamental de 6 dans 145 et de 5 dans 146). Evidemment, plus la taille et le rang du matroïde orienté augmentent, plus le nombre de signes concernés augmentent. Les signes qui sont imposés sont tous les plus petits éléments de lignes et colonnes non réduites à un élément, alors que seule la première ligne et la première colonne intervient pour la programmation classique.

**Questions.** *Comment la notion de ‘faces optimales’ se traduit-elle, en retour, dans le cadre classique de l’algèbre linéaire? Le ‘programme étendu’ revient-il à une suite de ‘sous-programmes’ de matroïdes orientés usuels? Se traduit-il dans le graphe actif des cocircuits, ou, plus probablement, se traduit-il dans un objet similaire plus général?*

Ces questions (actuellement à l’étude...) sont en liaison avec la Conjecture faite à la fin du chapitre 4 partie 4.

• Conclusion : liens entre structure et optimisation apparaissant à travers *Oribas*.

L’application *Oribas* constitue aussi une généralisation du ‘point de vue’ sur le problème de programmation linéaire. On s’intéresse en effet habituellement à l’optimisation sur une région bornée donnée, alors que les propriétés de bijectivité de *Oribas* concernent l’ensemble des régions bornées. En introduisant un ordre total sur les éléments, il apparaît que la notion d’optimalité s’inscrit naturellement dans la structure, reliée aux activités et à des propriétés bijectives.

Les deux façons disponibles pour l’instant de calculer *Oribas* directement sont soit d’utiliser la définition inductive du chapitre 4 partie 2 (théorème 4.2.3), soit, en commençant par une décomposition des activités du matroïde orienté du chapitre 2 partie 2 (théorème 2.2.5), d’utiliser la définition inductive du chapitre 3 pour les activités (1, 0) (théorème 3.8). Ces constructions inductives reposent d’ailleurs fondamentalement sur des comparaisons d’éléments actifs, et montrent ainsi à quel point les divers points de vue sur *Oribas* s’assemblent : optimalité, activités, induction, adjacence, bijections...

Le fait que dans le cas uniforme l’application qui à une région donnée associe son optimum soit une bijection avec les sommets portés ni par  $f_1 = g$  ni par  $f_2 = f$ , (bien qu’assez simple à démontrer dans ce cas particulier, cf. chapitre 6) semble nouveau (il n’est en tout cas pas cité dans [OM]). Plus précisément, en application du théorème 5.2.3, on montre (chapitre 6) que pour un matroïde orienté ordonné  $M$  uniforme dont le graphe actif des cocircuits est sans cycle,  $Oribas_M$  est l’unique façon d’associer à une région bornée un sommet adjacent porté ni par  $f_1$  ni par  $f_2$  de manière bijective.

Ici ce ne sont plus seulement les éléments particuliers  $g$  (l’infini) et  $f$  (la fonction objective) qui agissent pour l’optimisation, mais l’ordre tout entier de l’ensemble sur lequel est défini le matroïde orienté. Intuitivement, l’attraction à laquelle serait soumise une suite de faces élémentaires dans une région, qui irait se placer à la position ‘optimale’ décrite par la base associée, est dirigée par l’ordre des éléments, notamment par le biais des activités, d’où le nom donné à *Oribas* de *fonction attractive des matroïdes orientés ordonnés*.

# Chapitre 6

## Cas particuliers

Ce chapitre présente des applications des chapitres précédents à quelques objets particuliers :

- les matroïdes orientés uniformes (ou arrangements en position générale),
- les graphes,
- les régions des arrangements d'hyperplans hyperrésolubles,
- les matroïdes orientés de rang 3 (ou arrangements de pseudodroites).

La correspondance active canonique est redéfinie dans chaque cas, sans référence aux résultats antérieurs, à partir de ses particularités, qui font apparaître en outre des propriétés spécifiques. Par contre les preuves peuvent utiliser les résultats généraux précédents, et elles ne sont données que pour les résultats nouveaux et non immédiats.

### 6.1 Matroïde orienté uniforme

Les matroïdes orientés uniformes jouent un rôle fondamental dans les matroïdes orientés, alors que leurs matroïdes sous-jacents sont 'triviaux' : il y a de nombreuses façons d'avoir des points en position générale dans l'espace, lorsque l'on tient compte de leurs positions relatives. Dans ce sens ils illustreront bien l'aspect 'optimisation d'un sommet' (chapitre 5) et les propriétés géométriques du 'cas douteux' de *Oribas* (chapitre 4) cependant que les techniques de décomposition (chapitre 2) y seront triviales. La correspondance active canonique d'un matroïde orienté uniforme, en liaison directe avec la programmation linéaire, est aussi traitée dans [GiLV1].

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné uniforme de rang  $r$  sur  $E = e_1 < e_2 < \dots < e_n$  de cardinal  $n$ . Son matroïde sous-jacent est  $U_{n,r}$  dont les bases sont toutes les parties de  $E$  à  $r$  éléments.

#### Proposition 6.1.1.

*Soit  $B \in \mathcal{B}$ .*

*$Int(B) = \{1, \dots, \iota\}$  où  $\iota$  est le plus grand possible tel que  $\{1, \dots, \iota\} \subseteq B$ .*

*$Ext(B) = \{1, \dots, \varepsilon\}$  où  $\varepsilon$  est le plus grand possible tel que  $\{1, \dots, \varepsilon\} \subseteq E \setminus B$ .*

□

Ainsi,

$$B^{min} = f_1 < \dots < f_r = e_1 < \dots < e_r$$

De plus pour  $0 < r < n$ , on a  $b_{i,0}(U_{r,n}) = \sum_{i=1}^{i=r} \binom{n-i-1}{r-i} b_{0,j}(U_{r,n}) = \sum_{j=1}^{j=n-r} \binom{n-j-1}{n-r-j}$ , et  $b_{i,j}(U_{r,n}) = 0$  for  $i, j > 0$ .

Ainsi, pour  $0 < r < n$ ,

$$t(U_{r,n}; x, y) = \sum_{i=1}^{i=r} \binom{n-i-1}{r-i} x^i + \sum_{j=1}^{j=n-r} \binom{n-j-1}{n-r-j} y^j$$

En particulier :  $t(U_{n,n}; x, y) = x^n$  et  $t(U_{0,n}; x, y) = y^n$ .

• Décomposition des activités.

Comme dans le cas général, la construction de la correspondance active canonique se ramène aux activités  $(1, 0)$ .

On note que le matroïde orienté obtenu en supprimant ou en contractant des arêtes d'un matroïde orienté uniforme est lui aussi uniforme, et que les seuls fermés cycliques sont  $E$  et  $\emptyset$ .

**Proposition 6.1.2.** (décomposition active des bases, cas uniforme)

*Toutes les bases sont soit d'activité interne nulle soit d'activité externe nulle. Les bases de  $M$  d'activité interne  $\iota > 0$  sont les bases de  $M/e_1 \dots e_{\iota-1}$  d'activité interne 1 auxquelles on ajoute les éléments  $e_1 \dots e_{\iota-1}$ .*

□

**Proposition 6.1.3.** (décomposition active des réorientations, cas uniforme)

*$M$  est soit acyclique soit totalement cyclique.  $M$  est d'activité duale  $\iota > 0$  si et seulement si  $M/e_1 \dots e_{\iota-1}$  est d'activité duale 1.*

□

La classe d'activité de  $M$  d'activité (primale) ou d'activité duale  $a > 0$  est l'ensemble des  $-_A M$  avec  $A \subseteq \{e_1, \dots, e_{a-1}\}$ .

• Bijection pour les activités  $(1, 0)$ , correspondance active canonique.

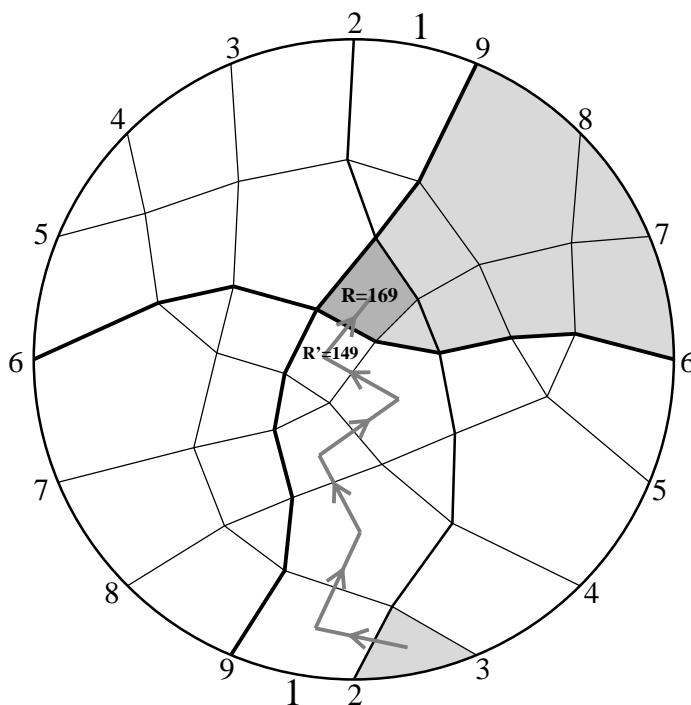
Une base  $B$  est d'activités  $(1, 0)$  si et seulement si  $e_1 \in B$  et  $e_2 \notin B$ , elle est déterminée par le cocircuit fondamental de  $e_1$  par rapport à  $B$  :

$$B = e_1 \cup E \setminus C^*(B; e_1)$$

Géométriquement ce cocircuit fondamental est une paire de sommets opposés, il est l'intersection des  $r - 1$  pseudosphères de  $B - e_1$ .

*Définition.* Pour  $B$  d'activités  $(1, 0)$ , avec  $D = C^*(B; e_1)$  et  $C = C(B; e_2)$ , on définit  $Basori_M^{(1,0)}(B) = \{A, E \setminus A\}$  avec  $A = (D^- \cup C^-) \setminus e_1$ .

*Interprétation géométrique.* D'un côté choisi de  $e_1$ , les éléments  $B - e_1$  définissent  $2^{r-1}$  *hyperoctants* (ensembles des covecteurs ayant les mêmes signes pour tous les éléments de  $B$ ), de sommet  $v$  correspondant au cocircuit  $D$ . La région associée à



**Figure 6.1.1 :** chemin dans les régions définissant  $Basori^{(1,0)}$

$B$  est celle qui est incidente à  $v$ , dans l'unique hyperoctant qui a une intersection bornée (i. e. qui ne touche pas  $e_1$ ) avec  $e_2$ .

Si  $M$  est acyclique, les côtés positifs et négatifs des pseudosphères représentant  $M$  sont définis par une *région fondamentale*, du côté positif de toutes les pseudosphères (elle correspond au covecteur maximal positif). Dans ce cas  $A = (D^- \cup C^-) \setminus e_1$  est l'ensemble des pseudosphères qui doivent être traversées depuis la région fondamentale pour atteindre la région  $R$  associée à  $B$  du même côté de  $e_1$ . Plus précisément,  $D^-$  permet d'atteindre une région  $R'$  incidente à  $v$  dans le même hyperoctant que la région fondamentale, et  $C^- \setminus (D^- \cup e_1)$  permet d'aller de  $R'$  à  $R$ . Selon des propriétés connues des matroïdes orientés [OM], cette suite de traversées de pseudosphères peut être ordonnée en un chemin sur l'ensemble des régions, allant de la région fondamentale à  $R'$  puis de  $R'$  à  $R$ .

La Figure 6.1.1 illustre cette construction : la région gris clair est la région fondamentale, la région gris foncé  $R$  est associée à  $B$ , et l'hyperoctant gris est celui contenant  $R$ .

Le 'théorème fondamental' 3.2 est :  $Basori_M^{(1,0)}$  induit une bijection entre bases d'activités  $(1,0)$  et paires de réorientations opposées d'activités  $(1,0)$ . Sa preuve est grandement simplifiée dans le cas uniforme, elle vient immédiatement du lemme suivant.

**Lemme 6.1.4.** (théorème fondamental 3.6 dans le cas uniforme)

Dans un matroïde orienté uniforme il y a au plus un cocircuit positif  $D$  contenant deux éléments  $e, f$  tels que le circuit  $C = (E \setminus D) \cup \{e, f\}$  vérifie  $C^- = \{e\}$ .

*Preuve.* Supposons que deux bases distinctes  $B_1, B_2$  contiennent  $e$  mais pas  $f$  telles

que les circuits  $C_1 = B_1 \cup \{f\}$  et  $C_2 = B_2 \cup \{f\}$  vérifient  $C_1^- = C_2^- = \{e\}$  et les cocircuits  $D_1 = (E \setminus B_1) \cup \{e\}$  et  $D_2 = (E \setminus B_2) \cup \{e\}$  sont positifs.

Soit  $b \in B_1 \setminus B_2 = C_1 \setminus C_2 = D_2 \setminus D_1$ . Soit  $C$  un circuit obtenu par élimination de  $f$  entre  $C_1$  et  $-C_2$ , tel que  $b \in C$ . On a  $b \in C \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{f\} = B_1 \cup B_2$ ,  $C \cap (B_1 \setminus B_2) \subseteq C^+$  et  $C \cap (B_2 \setminus B_1) \subseteq C^-$ . Soit  $D$  un cocircuit obtenu par élimination de  $e$  entre  $-D_1$  et  $D_2$ , tel que  $b \in D$ . On a  $b \in D \subseteq (D_1 \cup D_2) \setminus \{e\} = E \setminus (B_1 \cap B_2)$ ,  $D \cap (B_1 \setminus B_2) \subseteq D^+$  et  $D \cap (B_2 \setminus B_1) \subseteq D^-$ .

On a  $b \in C \cap D \subseteq (B_1 \setminus B_2) \cup (B_2 \setminus B_1)$ . Les signes de  $C$  et  $D$  coïncident sur leur intersection non vide, ce qui contredit l'orthogonalité.

Le tableau suivant qui récapitule les signes dans  $C_1, C_2, C, D_1, D_2, D$ , illustre cette preuve.

	$e$	$f$	$b$	$B_1 \setminus B_2$	$B_2 \setminus B_1$	$(B_1 \cap B_2) \setminus e$	$E \setminus (B_1 \cup B_2 \cup f)$
$C_1$	−	+	+	+	0	+	0
$-C_2$	+	−	0	0	−	−	0
$C$	$\pm/0$	0	+	$+/0$	$-/0$	$\pm/0$	0
$D$	0	$\pm/0$	+	$+/0$	$-/0$	0	$\pm/0$
$-D_1$	−	−	0	0	−	0	−
$D_2$	+	+	+	+	0	0	+

□

*Définition.* On définit pour  $M$  d'activités  $(1, 0)$  :  $Oribas^{(1,0)}(M) = (Basori_M^{(1,0)})^{-1}(\emptyset)$  ; pour  $M$  d'activité duale  $a > 0$  :  $Oribas(M) = Oribas(M/\{e_1, \dots, e_{a-1}\}) \cup \{e_1, \dots, e_{a-1}\}$  ; et pour  $M$  d'activité  $a > 0$  :  $Oribas(M) = E \setminus Oribas(M^*)$ .

$Oribas$  induit une bijection entre bases et classes d'activités, préservant les activités. Pour  $M$  d'activités  $(1, 0)$ ,  $Oribas(M)$  est déterminé par son premier cocircuit fondamental, qui joue ici un rôle essentiel, on l'appelle le *cocircuit optimal*, ou *sommet optimal* de  $M$  :

$$Opt(M) = C^*(Oribas^{(1,0)}(M); e_1)$$

- Optimisation.

Le *graphe actif des cocircuits*  $G_M$  de  $M$  est le graphe orienté dont les sommets sont cocircuits de  $M$  (faces de dimension 0 d'une représentation topologique de  $M$ ), et les arêtes paires de cocircuits modulaires et conformes (faces de dimension 1). Dans une représentation topologique, une arête est portée par un quart de pseudocercle délimité par les deux plus petits éléments coupant le pseudocercle, elle est dirigée vers l'intersection avec le plus petit élément.

**Proposition 6.1.5.** (théorème 5.2.3, cas uniforme)

Soit  $M$  uniforme d'activité duale 1. La restriction du graphe actif des cocircuits aux cocircuits positifs de  $M$  a pour unique puits  $\text{Opt}(M)$ .  $\square$

En considérant  $e_1$  comme l'infini, les réorientations d'activité duale 1 sont appelées *régions bornées*. Le cocircuit  $\text{Opt}(M)$  est l'unique cocircuit optimal pour le programme de matroïde orienté  $(M, e_1, e_2)$ .

**Corollaire 6.1.6.**

Soit  $M$  uniforme d'activité duale  $a > 0$ . La restriction du graphe actif des cocircuits aux cocircuits positifs de  $M$  a pour unique puits  $C^*(\text{Oribas}(M); e_a)$ .

*Preuve.* Le cocircuit fondamental de  $e_a$  par rapport à  $\text{Oribas}(M/e_1 \dots e_{a-1})$  est l'unique puits pour ce mineur (définition de  $\text{Oribas}$  par décomposition des activités 6.1.3). D'autre part toute arête  $(D, C^*(\text{Oribas}(M); e_a))$  dans  $G_M$ , avec  $\min(D) > e_a$  est dirigée vers  $C^*(\text{Oribas}(M); e_a)$  par définition de  $G_M$ . Donc  $C^*(\text{Oribas}(M); e_a)$  est un puits pour la restriction de  $G_M$  aux cocircuits positifs de  $M$ . Comme il existe au plus un tel puits (preuve du théorème 5.2.3) on a le résultat voulu.  $\square$

*Exemple.* La Figure 6.1.2 montre la correspondance active canonique pour les réorientations acycliques du matroïde orienté de Ringel. La portion grisée incidente à un sommet désigne la région bornée associée à ce sommet.

Pour un matroïde uniforme de rang  $r$ , un sommet dans la représentation topologique est à l'intersection de exactement  $r - 1$  pseudosphères. Les choses se compliquent lorsque plus d'éléments passent par un même sommet. En général dans ce cas pour les bases d'activités  $(1, 0)$  le cocircuit fondamental de  $f_1$  ne suffit plus à déterminer la base, et de plus cet ensemble d'éléments contient un circuit, donc un fermé cyclique qui interviendra comme mineur dans les décompositions actives.

- Indépendance vis à vis de l'ordre.

On déduit immédiatement de ce qui précède que dans un matroïde orienté ordonné uniforme  $M$  de rang  $r$  à  $n$  éléments, la correspondance  $\text{Oribas}_M^{(1,0)}$  ne dépend de l'ordre que pour  $E = e_1 < e_2 < E \setminus e_1 e_2$ , et la correspondance  $\text{Oribas}_M$  ne dépend de l'ordre que pour  $E = e_1 < e_2 < \dots < e_k < E \setminus e_1 \dots e_k$  avec  $k = \max(r, n - r)$ .

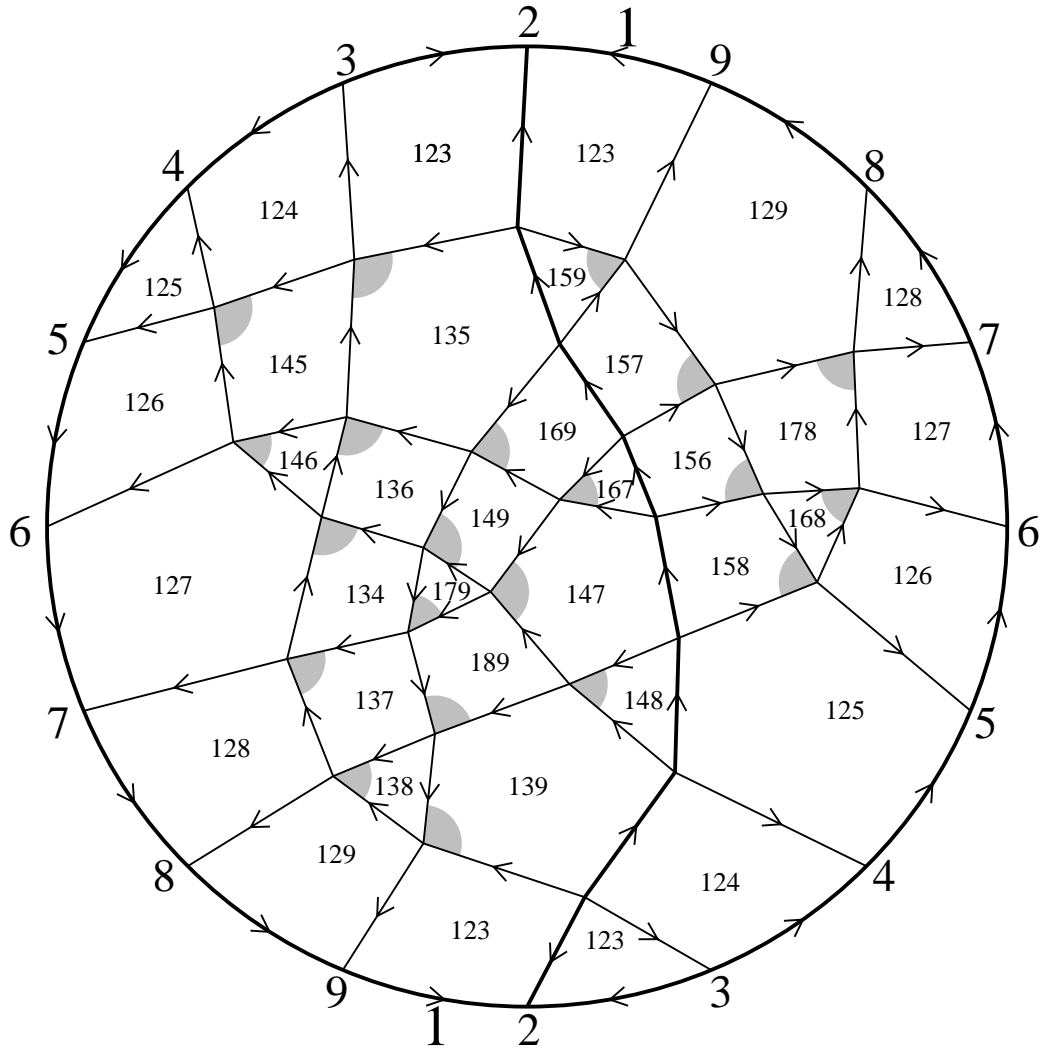
**Proposition 6.1.7.**

(i) Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné uniforme sur  $E = e_1 < \dots < e_n$ ,  $p$  une permutation de  $1 \dots n$  telle que  $p(1) = 1$  et  $p(2) = 2$ , et  $M_p$  le matroïde orienté ordonné sur  $E = e_{p(1)} < \dots < e_{p(n)}$  définissant le même matroïde orienté que  $M$  sur  $E$  non ordonné.

Alors pour tout  $A \subseteq E$  tel que  $-_A M$  acyclique d'activité duale 1 on a

$$\text{Oribas}_{M_p}(A) = \text{Oribas}_M(A)$$

(ii) Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné uniforme de rang  $r$  sur  $E = e_1 < \dots < e_n$ ,  $p$  une permutation de  $1 \dots n$  telle que  $p(i) = i$  pour tout  $i \leq \max(r, n - r)$  et  $M_p$



**Figure 6.1.2 : programmation linéaire combinatoire, cas uniforme**

le matroïde orienté ordonné sur  $E = e_{p(1)} < \dots < e_{p(n)}$  définissant le même matroïde orienté que  $M$  sur  $E$  non ordonné.

Alors pour tout  $A \subseteq E$  on a

$$Oribas_{M_p}(A) = Oribas_M(A)$$

□

- Construction inductive.

Lorsque le matroïde orienté est uniforme, la définition inductive de  $Oribas^{(1,0)}$  revient à la construction inductive classique en programmation linéaire d'un sommet optimal d'une région bornée par suppressions successives de contraintes et de variables.

**Proposition 6.1.8.** (théorème 3.8 géométrique, cas uniforme)

*L'application qui à une région bornée associe son sommet optimal est déterminée par l'algorithme géométrique suivant.*

Soit  $R$  une région bornée d'un arrangement de pseudosphères représentant un matroïde orienté ordonné uniforme sur  $E$  de plus grand élément  $\omega$ . On note  $-\omega R$  la région obtenue en traversant  $\omega$  depuis  $R$  si c'en est une.

- (i) Si  $|E| = 2$  alors  $R$  est un point et le sommet optimal est ce point.
- (ii) Si  $-\omega R$  n'est pas une région alors  $\lambda(R) := 0$ .
- (iii) Si  $-\omega R$  est une région non bornée alors  $\lambda(R) := 1$ .
- (iv) Si  $-\omega R$  est une région bornée alors
  - Si le sommet optimal de la région contenant  $R$  dans l'arrangement obtenu en supprimant  $\omega$  touche  $R$  alors  $\lambda(R) = 0$ .
  - Sinon  $\lambda(R) := 1$ .

Enfin si  $\lambda(R) = 0$  alors le sommet optimal de  $R$  est le même que dans la région contenant  $R$  dans l'arrangement obtenu en supprimant  $\omega$

et si  $\lambda(R) = 1$  alors le sommet optimal de  $R$  est le même que dans la région touchant  $R$  dans l'arrangement obtenu en prenant l'intersection avec  $\omega$ .

□

D'après la proposition 6.1.7  $\omega$  peut-être en fait choisi comme étant un élément quelconque de  $E - e_1 e_2$ .

• Caractérisation de *Oribas* par 'adjacence' et 'bijectivité'.

**Théorème 6.1.9.**

*Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné uniforme.*

*L'application  $Oribas^{(1,0)}$  est déterminée par les deux propriétés suivantes*  
 *$(OB2^{(1,0)})$  'bijectivité<sup>(1,0)</sup>'*

*$Oribas_M^{(1,0)}$  induit une bijection entre les paires de réorientations opposées d'activités  $(1, 0)$  et les bases d'activités  $(1, 0)$*

*$(OB8_{unif}^{(1,0)})$  'adjacence, cas uniforme'*

*$Oribas^{(1,0)}(M)$  a pour cocircuit fondamental par rapport à  $e_1$  un cocircuit positif de  $M$*

*si et seulement si le graphe actif des cocircuits de  $M$ , restreint aux cocircuits contenant  $e_1$  et  $e_2$ , est sans cycle.*

*C'est vrai en particulier si  $M$  est réalisable.*

*C'est faux par exemple si le programme  $(-{}_A M, e_1, e_2)$  n'est pas euclidien, pour un  $-{}_A M$  d'activités  $(1, 0)$ .*

*Preuve.* Soit  $V$  l'ensemble des sommets qui ne sont ni sur  $e_1$  ni sur  $e_2$  (correspondant aux cocircuits contenant  $e_1$  et  $e_2$ ), et  $f$  une bijection de  $V$  dans l'ensemble des régions bornées, telle que le cocircuit associé à une région soit incident à cette région. On dit qu'un sommet est le 'puits' d'une région si il est le puits de la restriction du graphe actif des cocircuits à cette région.



Si le graphe actif des cocircuits est sans cycle sur  $V$ , il induit un ordre partiel sur  $V$ . La bijection  $f$  induit une application  $g$  de  $V$  dans  $V$  : l'image d'un sommet  $v$  est l'unique puits  $g(v)$  de la région  $f(v)$ . Puisque  $M$  est uniforme, un sommet  $v$  est un puits dans au plus une région bornée  $R$  (les  $2^{r-1} - 1$  autres régions incidentes à  $v$  ont une arête sortante de  $v$ , qui suit sur son pseudocercle une arête entrante en  $v$  dans  $R$ ). Donc  $g$  est une bijection de  $V$  dans  $V$ . De plus  $g$  vérifie  $v \leq g(v)$  pour l'ordre induit sur  $V$  par le graphe actif des cocircuits, pour tout  $v \in V$ . La seule bijection croissante d'un ensemble ordonné fini dans lui-même est l'identité, donc  $v$  est l'unique puits de  $f(v)$  et  $f$  est unique. Donc  $Oribas^{(1,0)}$  est bien déterminé par les propriétés 'bijectivité' et 'adjacence'.

Réciproquement on suppose qu'il existe un cycle  $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_k \rightarrow C_1$  dans le graphe actif des cocircuits restreint à  $V$ . Chaque sommet  $C_i$  est le cocircuit fondamental d'une base d'activités  $(1, 0)$  qui est associée par  $Oribas^{(1,0)}$  à une région bornée  $R_i$ . Mais  $C_{i-1} \rightarrow C_i$  implique  $C_{i-1}$  touche  $R_i$  (sinon  $D$  étant le cocircuit suivant  $C_i$  sur le pseudocercle portant  $(C_{i-1}, C_i)$ ,  $R_i$  devrait toucher  $D$ , ce qui contredirait soit l'optimalité de  $C_i$ , soit le fait que  $R_i$  est bornée). Donc on peut modifier la bijection en associant  $R_i$  et  $C_{i-1}$  pour tout  $i$  modulo  $k$ , sans perdre les deux propriétés.

Si  $M$  est réalisable, le graphe actif des cocircuits restreint à  $V$  est sans cycle, car dans une réalisation de  $M$ , la direction des arêtes correspond à la relation d'ordre pour la valeur des sommets dans la forme linéaire dont  $e_2$  est le noyau.

Si  $(-{}_A M, e_1, e_2)$  n'est pas euclidien, il existe un cycle dans la restriction de  $G_M$  aux cocircuits positifs de  $-{}_A M$ , et donc un cycle dans  $V$ .  $\square$

La proposition précédente signifie que la condition de 'bijectivité' peut remplacer la condition  $C_M(B; e_2)^- = e_1$  pour  $B = Oribas(M)$  dans la définition de  $Oribas$  lorsque le matroïde est réalisable, cette condition étant la condition 'adjacence' dans le dual au retournement de  $e_1$  près. Par contre en général, on a besoin de ces deux conditions duales d'adjacence pour définir  $Oribas$  (voir chapitre 4 partie 4).

## 6.2 Graphes

A partir d'un graphe orienté, on peut définir naturellement un matroïde orienté : les circuits sont les cycles minimaux du graphe, dont les éléments sont signés lorsqu'on parcourt le cycle selon qu'ils sont orientés dans le sens de parcours ou le sens contraire. Les réorientations du matroïde orienté graphique sont en bijection canonique avec les orientations du graphe, et on retrouve la même terminologie (orientations acycliques, et caetera). D'autre part les bases sont les arbres couvrants du graphe (supposé connexe). L'annexe 2 détaille les passages d'un langage à l'autre.

C'est dans le contexte des graphes qu'est né le polynôme de Tutte point de départ de ce travail. L'application *Oribas* établit une correspondance préservant les activités entre les orientations et les arbres couvrants d'un graphe ordonné. La correspondance active canonique dans le cas graphique est aussi traitée dans [GiLV2].

Dans cette partie on redéfinit brièvement *Oribas* dans le langage des graphes, puis on fait apparaître des propriétés spécifiques aux graphes qui font intervenir les sommets du graphe. Le point de vue des matroïdes orientés, qui ne s'occupe que des arêtes, permet de faire ressortir des propriétés de dualité. Premièrement, les orientations d'activités  $(1, 0)$  sont les orientations acycliques ayant un unique puits et une unique source adjacents fixés, donc on obtient une bijection (chapitre 3) entre ces orientations et les arbres couvrants d'activités  $(1, 0)$ , définie par deux algorithmes duaux (l'un en termes de cycles, l'autre en termes de cocycles). Deuxièmement, on montre que pour certains ordres qui existent toujours, il existe une et une seule orientation acyclique ayant un unique puits fixé dans chaque classe d'activité d'orientations acycliques (chapitre 2). On aura donc une bijection (préservant les activités) entre ces orientations et ces classes d'activités, or ces classes d'activités sont en bijection (préservant les activités) avec les arbres couvrants internes.

Une bijection entre ces orientations et les arbres couvrants internes est apparue récemment dans la littérature [GeSa 00], mais elle ne préserve pas les activités (exemple plus loin). La bijection  $Oribas^{(1,0)}$  répond d'ailleurs à une question de [GeSa 00] (question (a) p. 145).

D'autre part, un algorithme avait déjà été proposé par Michel Las Vergnas dans [LV 83] pour construire une telle correspondance dans un graphe, partant aussi d'une bijection pour les activités  $(1, 0)$ . C'est historiquement le premier travail dans la problématique de cette thèse. Cependant cette bijection est distincte de  $Oribas^{(1,0)}$  (exemple plus loin) et on ne sait pas si elle se généralise au delà des matroïdes réguliers. En particulier elle ne vérifie pas la propriété  $(OB8^{(1,0)})$  'adjacence', qui est ici fondamentale.

On illustrera cette partie avec l'exemple de la roue à 4 rayons,  $W_4$ .

Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe dont l'ensemble des arêtes est totalement ordonné.

- Bijection pour les activités  $(1, 0)$ .

**Proposition 6.2.1.** (activités  $(1, 0)$  des orientations dans le cas graphique)

Soit  $G$  un graphe orienté ordonné, de plus petite arête  $e_1 = s's''$  dirigée de  $s'$  vers  $s''$ . Alors  $o^*(G) = 1$  et  $o(G) = 0$  si et seulement si  $G$  est acyclique avec une unique source  $s'$  et un unique puits  $s''$ .

*Preuve.* Un graphe orienté a pour activité externe 0 si et seulement si il est acyclique par définition. Dans un graphe acyclique,  $e_1$  appartient à un cocycle, il est donc le plus petit élément d'un cocycle. Un graphe acyclique a une source (autrement on pourrait facilement construire un cycle positif). L'ensemble des arêtes ayant cette source comme extrémité est alors un cocycle positif.

Si le graphe est d'activité duale 1, cette source doit être une extrémité de  $e_1$  (car  $e_1$  est le seul plus petit élément possible d'un cocycle). Les mêmes propriétés pour l'orientation opposée impliquent que le graphe a un puits et que ce puits ait  $e_1$  pour extrémité. Ainsi le graphe a un unique puits  $s''$  et une unique source  $s'$ .

Réciproquement si le graphe a pour unique source  $s'$  et pour unique puits  $s''$  alors les deux sous graphes connexes induits par la partition de  $V$  définie par un cocycle sont aussi acycliques. Ils doivent donc avoir une source et un puits. Si le cocycle est positif, il existe une source dans une composante et un puits dans l'autre. Nécessairement ces deux sommets sont  $s'$  et  $s''$  et  $e_1$  appartient au cocycle.  $\square$

*Définition.* (proposition 3.2, cas graphique)

On note  $e_1 = s's''$  la plus petite arête de  $G$ . L'application  $Basori^{(1,0)}$  de l'ensemble des arbres couvrants d'activités  $(1, 0)$  dans celui des orientations acycliques ayant pour unique source  $s'$  et unique puits  $s''$  est définie par l'un des deux algorithmes duaux équivalents suivants.

(i) Soit  $T$  un arbre couvrant d'activités  $(1, 0)$ , avec  $T = \{b_1 = e_1 < b_2 < \dots < b_r\}$ .

Pas 0 : orienter  $e_1$  de  $s'$  vers  $s''$ .

Pas 1 : orienter toutes les arêtes de  $C^*(T; b_1) \setminus e_1$  dans la direction définie par  $e_1$  dans le cocycle.

Pas  $i = 2, \dots, r$  : orienter les arêtes de  $C^*(T; b_i)$  qui n'ont pas encore été orientées dans la direction opposée dans le cocycle à la direction de sa plus petite arête.

(ii) Soit  $T$  un arbre couvrant d'activités  $(1, 0)$ , avec  $E \setminus T = \{a_1 = e_2 < a_2 < \dots < a_{n-r}\}$ .

Pas 0 : orienter  $e_1$  de  $s'$  vers  $s''$ .

Pas  $i = 1, 2, \dots, n-r$  : orienter les arêtes de  $C(T; a_i)$  qui n'ont pas encore été orientées dans la direction opposée dans le cycle à la direction de sa plus petite arête.

Cette application est une bijection ('théorème fondamental' 3.6), et sa réciproque est notée  $Oribas^{(1,0)}$ , c'est la restriction aux graphes orientés ordonnés d'activités  $(1, 0)$  de l'application  $Oribas$  que l'on va définir.

*Exemple.* La Figure 6.2.1 illustre ces deux algorithmes duaux simultanément sur un même arbre couvrant de  $W_4$ .

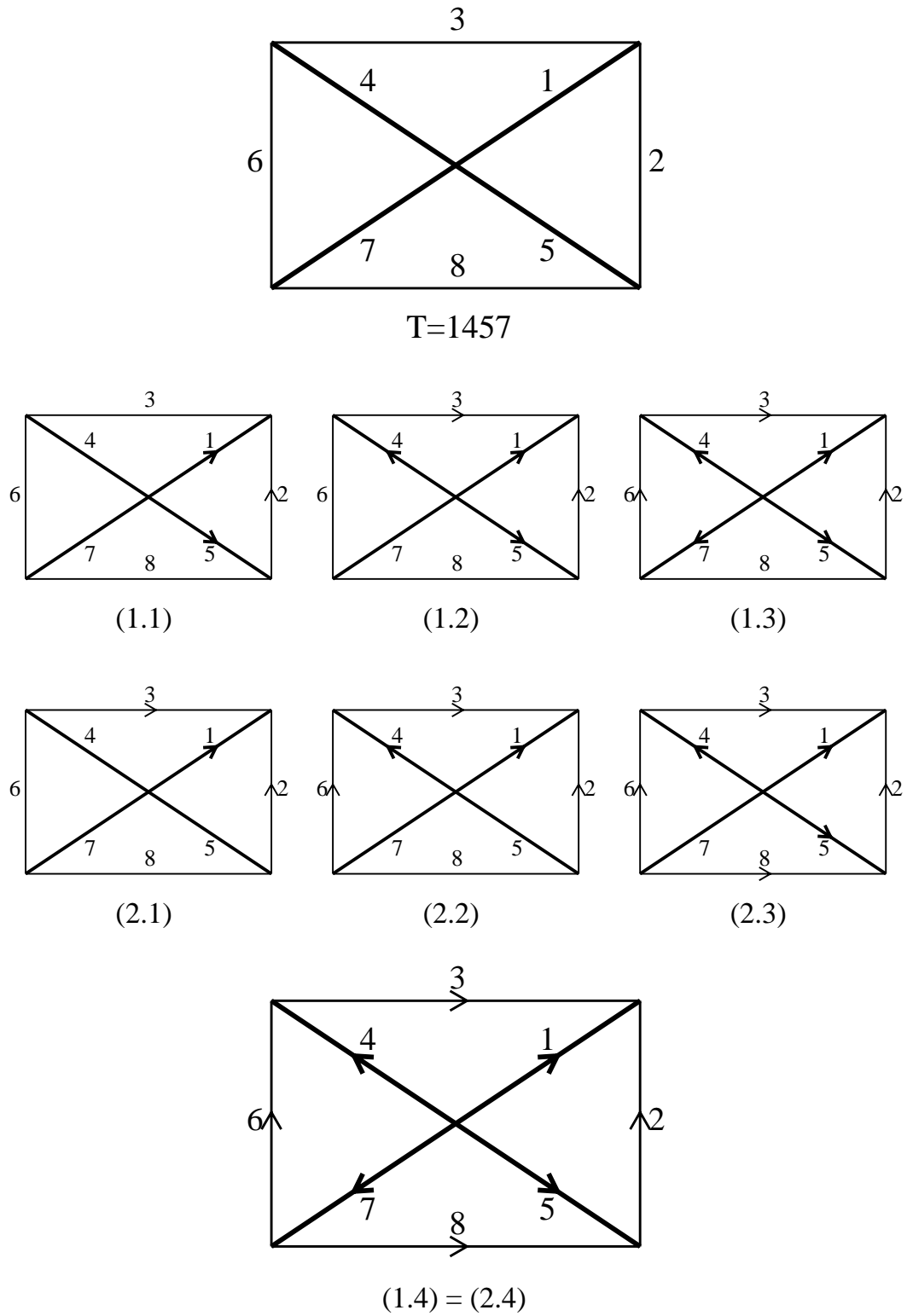


Figure 6.2.1 : algorithmes duaux définissant  $Basori^{(1,0)}$  du graphe  $W_4$

- Bijection duale pour les activités  $(0, 1)$ .

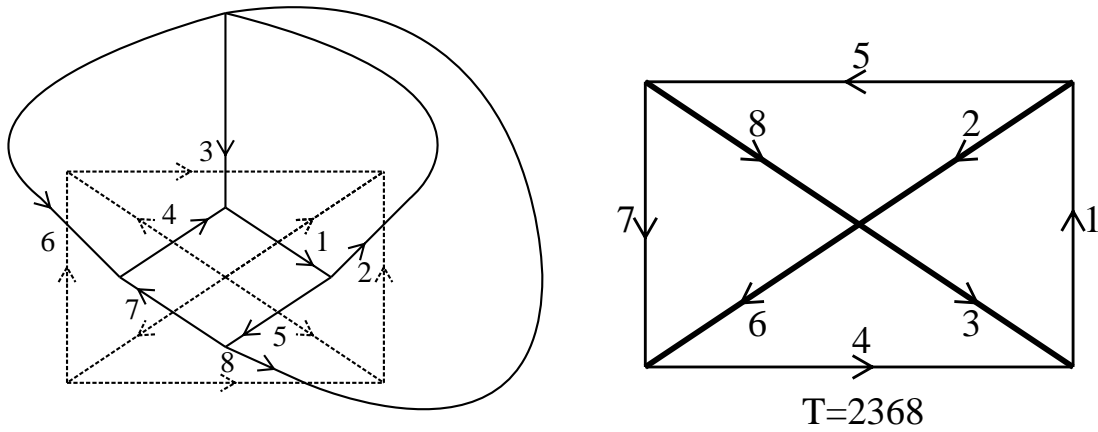
Les arbres couvrants d'activités  $(0, 1)$  se déduisent de ceux d'activités  $(1, 0)$  en échangeant  $e_1$  et  $e_2$  (proposition 0.6). D'autre part, les orientations d'activités  $(0, 1)$  se déduisent de celles d'activités  $(1, 0)$  en réorientant  $f_1$  (proposition 0.9).

On déduit donc immédiatement de la bijection précédente une bijection entre arbres couvrants d'activités  $(0, 1)$  et orientations d'activités  $(0, 1)$  (ces orientations sont les orientations fortement connexes pour lesquelles tout cycle contient  $e_1$ ).

On étend ainsi l'application *Oribas* aux orientations d'activités  $(0, 1)$ .

*Exemple.* La Figure 6.2.2 montre cette construction pour un arbre de  $W_4$ . Pour un graphe planaire, le complémentaire d'un arbre couvrant est un arbre couvrant du dual. Si le graphe est non planaire, c'est une base du matroïde dual. La Figure 6.2.2 illustre aussi la propriété (OB9<sup>(1,0)</sup>) 'dualité forte' de la proposition 4.4.1.

De plus cet exemple montre que la bijection n'est pas la même que celle de [LV 83] : l'arête 8 de [LV2 Fig. 4] y est renversée (et on peut vérifier que la propriété d'adjacence qui est fondamentale pour *Oribas*<sup>(1,0)</sup> n'y est pas satisfaite).



**Figure 6.2.2 : dualité forte dans  $W_4$  (propriété 4.4.1)**

- Bijection active entre arbres couvrants et classes d'activités.

*Définitions.* (chapitre 2 partie 2)

La *partition active* d'un graphe orienté  $\vec{G}$  est la partition  $\alpha^{-1}$  de  $E$  où  $\alpha(e)$  est le plus grand élément actif tel que  $e$  appartienne à un cycle orienté (circuit positif) de  $\vec{G}$  de plus petit élément  $\alpha(e)$  si  $e$  appartient à un cycle orienté de  $\vec{G}$ , resp. le plus grand élément dual actif tel que  $e$  appartienne à un cocycle orienté (cocircuit positif) de  $\vec{G}$  de plus petit élément  $\alpha(e)$  si  $e$  appartient à un cocycle orienté de  $\vec{G}$ .

La *classe d'activité* d'une orientation  $\vec{G}$  de  $G$  est l'ensemble des orientations obtenue en réorientant n'importe quelles parties de la partition active de  $G$ . On sait que toutes ces réorientations ont mêmes activités (propriété (OB7) 'retournements' corollaire 2.2.6).

*Définition.* (chapitre 4 partie 1)

Soit un graphe orienté  $\vec{G}$  d'activité (primale)  $a_1^* < \dots < a_\varepsilon^*$  et d'activité duale  $a_1 < \dots < a_\iota$ , de partition active  $\alpha^{-1}$ .

On définit la fonction attractive *Oribas* par

$$\begin{aligned} \text{Oribas}(\vec{G}) &= \text{Oribas}(\vec{G}(\alpha^{-1}(a_\varepsilon^*))) + \\ &\left( \biguplus_{1 \leq k \leq \varepsilon-1} \left( \text{Oribas}(\vec{G}(\alpha^{-1}(a_k^* \dots a_\varepsilon^*))/\alpha^{-1}(a_{k+1}^* \dots a_\varepsilon^*)) \right) \right) + \\ &\biguplus_{1 \leq k \leq \iota-1} \text{Oribas}(\vec{G}(\alpha^{-1}(a_1 \dots a_{k+1}))/\alpha^{-1}(a_1 \dots a_k)) + \text{Oribas}(\vec{G}(\alpha^{-1}(a_1))) \end{aligned}$$

où les mineurs qui apparaissent sont soit d'activités  $(0, 1)$  soit d'activités  $(1, 0)$ .

On montre ('théorème d'extension' 2.3.1) que cette application est bien définie à partir de l'application *Oribas* pour les activités  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ , a pour image un arbre couvrant de mêmes activités  $(\iota, \varepsilon)$  que  $\vec{G}$ , et que l'image réciproque de cet arbre est la classe d'activité de  $\vec{G}$ .

Autrement dit, *Oribas* induit une bijection (préservant les activités) entre arbres couvrants et classes d'activités de réorientations, que l'on appelle *correspondance active canonique de G*.

• Bijection active entre arbres internes et orientations acycliques à unique puits fixé.

On dira qu'un arbre couvrant  $T$  d'un graphe ordonné est *croissant depuis un sommet s* si les arêtes sont en ordre croissant dans tout chemin dans  $T$  partant de  $s$ .

**Proposition 6.2.2.**

Soit  $G$  un graphe sans boucle. Soit  $T_0 = B^{\min}(G)$  l'arbre couvrant minimal de  $G$  pour l'ordre lexicographique, et  $s$  un sommet de  $G$ . On suppose que  $T_0$  est croissant depuis  $s$ .

Alors il existe une et une seule orientation acyclique ayant pour unique puits  $s$  dans chaque classe d'activité d'orientations acycliques de  $G$ .

On remarque que  $s$  doit alors être une extrémité de  $e_1$ , qui est dans  $T_0$ .

De plus, étant donné un arbre couvrant  $T$  et un sommet  $s$  de  $G$ , on peut toujours - facilement - définir un ordre sur  $E$  tel que  $T$  soit la base minimale de  $G$  et ait ses branches partant de  $s$  croissantes : il suffit d'ordonner  $e_1 < \dots < e_{m_0}$  les arêtes de  $T$  incidentes à  $s$ , puis les arêtes à distance  $k+1$  de  $s$  dans  $T$  comme supérieures à celles à distance  $k$  :  $e_{m_k} < e_{m_k+1} < \dots < e_{m_{k+1}}$  pour  $k > 0$ , et enfin les arêtes de  $E \setminus T$  comme supérieures à celles de  $T$ .

*Preuve.*

(1) Les arêtes d'un cocycle positif  $D$  défini par une 2-partition  $V = V_1 + V_2$  est une orientation acyclique  $\vec{G}$  de  $G$  ayant un unique puits en  $s \in V_1$  sont dirigés de  $V_2$  vers  $V_1$ .

Puisque  $\vec{G}$  est acyclique,  $\vec{G}(V_2)$  contient au moins un puits  $s'$ . Si les arêtes de  $D$  étaient orientées de  $V_1$  vers  $V_2$ , alors  $s'$  serait un puits de  $G$  avec  $s \neq s'$ , ce qui contredirait l'unicité.

(2) Si  $\vec{G}$  est une orientation acyclique de  $G$  ayant un unique puits  $s$ , alors les éléments dual-actifs de  $T_0$  sont dirigés vers  $s$ .

Soit  $a$  une arête dual-active de  $\vec{G}$ , et  $D$  un cocycle positif de plus petit élément  $a$ . Par définition de  $T_0 = B^{min}$  on a  $a \in T_0$  (proposition ). Puisque  $T_0$  est croissant depuis  $s$  et  $a$  minimal dans  $D$ , il n'y a pas d'arête de  $D$  dans le chemin dans  $T_0$  de  $s$  vers l'extrémité la plus proche de  $a$ . Donc avec les notations de (1), ce chemin est dans  $V_1$ , et par (1)  $a$  est dirigé vers  $s$ .

Réciproquement soit  $\vec{G}$  l'(unique) graphe dans une classe d'activité d'orientation acyclique de  $G$  telle que les éléments dual-actifs de cette classe sont dirigés vers  $s$  dans  $T_0$ . Le graphe  $\vec{G}$  existe et est unique par définition des classes d'activités (partie 4 du chapitre 2)

(3) Le graphe  $\vec{G}$  a un unique puits  $s$ .

Puisque  $\vec{G}$  est acyclique, il a au moins un puits  $s'$ . La plus petite arête  $a$  de  $\vec{G}$  incidente à  $s'$  est dans  $T_0$  par définition de  $T_0$ . Puisque l'arête  $a$  est dirigée vers  $s$  dans  $T_0$  par construction de  $\vec{G}$ , et  $T_0$  est croissant depuis  $s$ , si  $s \neq s'$  alors il existe une autre arête  $b < a$  dans  $T_0$  incidente à  $s'$ , ce qui contredit la minimalité de  $a$ .  $\square$

La correspondance *Oribas* donne donc une bijection (préservant les activités) entre les arbres couvrants internes (i. e. d'activité externe nulle) et les orientations acycliques ayant un unique puits fixé. On obtient ainsi une preuve bijective du résultat connu suivant [GrZa 83] (voir aussi [BrOx 92]).

### Corollaire 6.2.3.

Pour tout sommet  $s$  de  $G$ , le nombre d'orientations acycliques de  $G$  ayant un unique puits  $s$  est  $t(G; 1, 0)$ .  $\square$

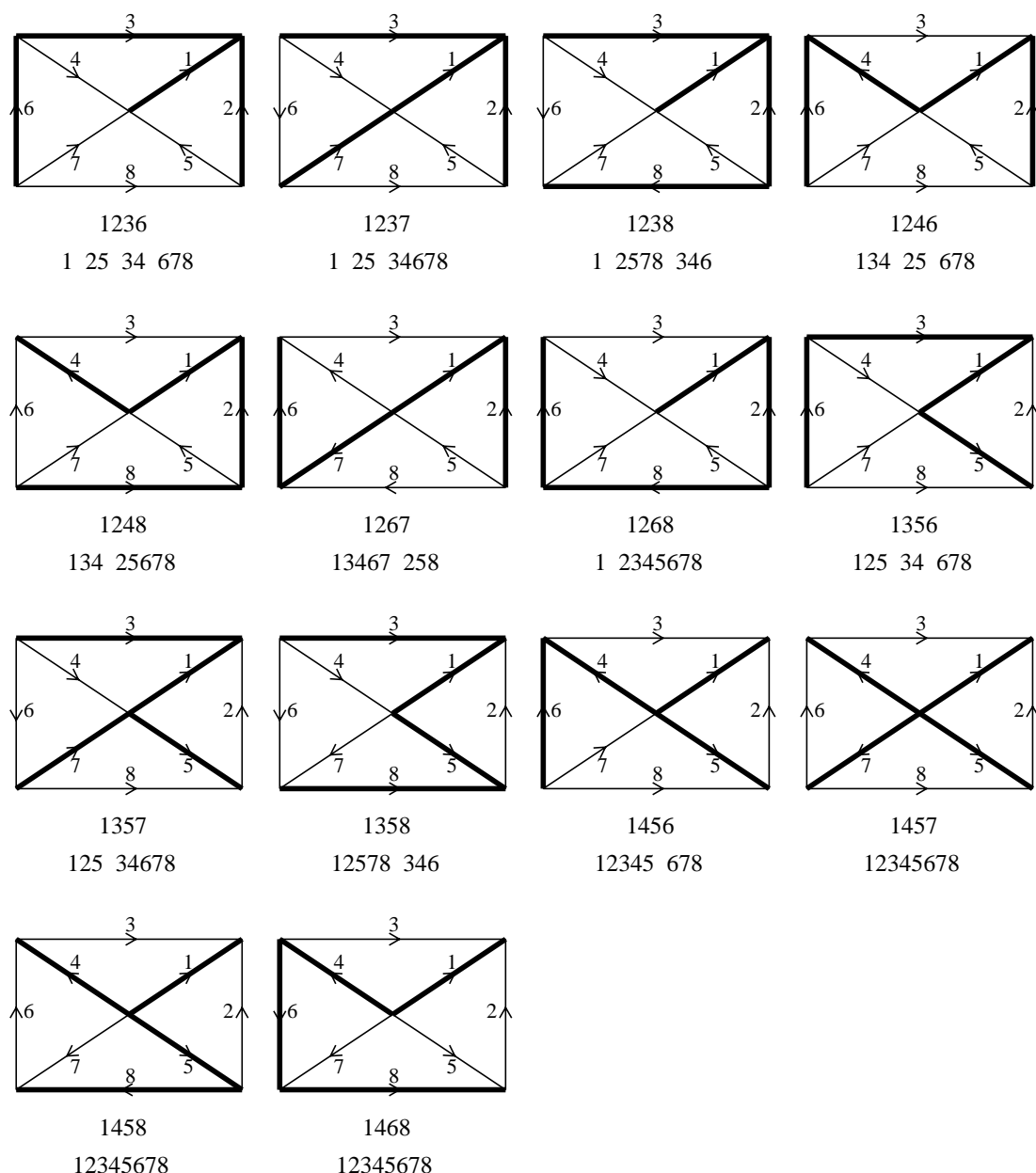
Cette bijection qui préserve l'activité interne/duale est différente de celles de Gebhard-Sagan [GeSa 00], qui n'ont pas cette propriété. L'orientation de [GeSa 00, Fig. 1 p.139] a une activité duale 2 mais l'arbre correspondant y a une activité interne 3.

*Remarque.* Le polynôme chromatique  $\chi(G; q)$  qui compte le nombre de  $q$ -colorations du graphe  $G$  est une particularisation du polynôme de Tutte (historiquement ce dernier a été inventé par Tutte comme le polynôme dichromatique, en introduisant la dualité grâce à une deuxième variable) :

$$\chi(G; q) = (-1)^{r(G)} t(G; 1 - q, 0)$$

où l'on suppose  $G$  connexe ( $r(G)$  est le rang de  $G$ ).

Les coefficients du polynôme chromatique développé en puissance de  $1 - q$  sont, en valeur absolue, les coefficients du polynôme de Tutte de type  $t_{i,0}$ ,  $i \geq 0$ .



**Figure 6.2.3 : bijections arbres-classes-‘unique puits’ pour  $W_4$**

L'énumération des orientations acycliques avec unique puits fixé par ces coefficients rappelle les ‘composantes’ de ces orientations, définies par Viennot dans [Vie 86], à partir cette fois d'un ordre total sur les sommets. Ainsi  $t_{i,0}$  est le nombre d'orientations acycliques avec un unique puits fixé ayant  $i + 1$  composantes. Plus généralement, les coefficients du polynôme chromatique énumèrent le nombre de composantes d'orientations acycliques.

Puisque ces constructions dépendent d'un ordre sur les sommets, elles ne redonnent pas les constructions de cette partie. Le fait de ne s'intéresser ici qu'aux arêtes permet d'exploiter la dualité entre cycles et cocycles, et de prendre en compte toutes les orientations du graphe, sans se restreindre aux acycliques.



*Exemples.*

- La Figure 6.2.3 illustre cette bijection sur  $W_4$ .

Le polynôme de Tutte de  $W_4$  est

$$t(W_4; x, y) = x^4 + y^4 + 4x^3 + 4x^2y + 4xy^2 + 4y^3 + 6x^2 + 9xy + 6y^2 + 3x + 3y$$

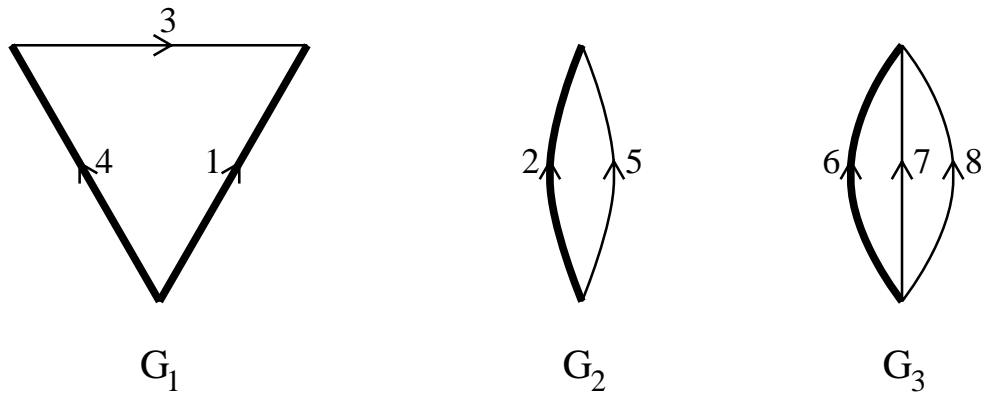
Le graphe  $W_4$  a  $t(W_4; 1, 0) = 14$  arbres couvrants internes.

L'arbre couvrant minimal pour l'ordre lexicographique 1236 est croissant depuis le sommet Nord-Est NE. Pour toute orientation acyclique ayant un unique puits au sommet NE on a représenté l'arbre couvrant interne correspondant (ses arêtes sont représentées en gras). On a aussi indiqué la partition active, commune à l'arbre et à l'orientation (chapitre 2).

L'activité interne/duale est le nombre de parties de la partition active, et les éléments actifs sont les plus petits éléments de chaque partie. En renversant les directions des arêtes dans n'importe quelles parties de la partition active, on obtient la classe d'activité de l'orientation, associée à l'arbre par *Oribas*.

D'après la proposition précédente 6.2.3, il y a exactement une orientation acyclique ayant pour unique puits le sommet NE dans chaque classe d'activité d'orientation acyclique, c'est celle qui est représentée sur la Figure 6.2.3.

Ainsi cette figure illustre aussi la bijection *Oribas* entre arbres couvrants internes et classes d'activité d'orientations acycliques.



**Figure 6.2.4 : décomposition d'une orientation de  $W_4$**

- La Figure 6.2.4 illustre le détail de la construction de *Oribas* pour l'arbre couvrant  $T = 1246$ . La partition active est  $134 + 25 + 678$ . Les mineurs utilisés sont donc  $G_1 = G \setminus 25678$ ,  $G_2 = G/134 \setminus 678$ ,  $G_3 = G/12345$ . Les arbres couvrants d'activité  $(1, 0)$  étant uniques dans ces cas très simples on a  $T_1 = 14$ ,  $T_2 = 2$ ,  $T_3 = 6$ , et bien sûr  $1246 = 14 + 2 + 6$ .

- Orthogonalité du cas graphique.

Pour terminer, le cas graphique se distingue du cas général par des propriétés d'orthogonalité plus fortes [Mi 66], qui permettent d'obtenir des propriétés spécifiques aux graphes ou parfois des preuves plus simples de résultats généraux. Ici, les preuves

ne sont pas réellement simplifiées dans le cas graphique. On donne juste, pour l'anecdote, un lemme spécifique plus fort que le 'lemme des croissants' 3.4 (avec lequel on montre le 'théorème fondamental' 3.6).

**Lemme 6.2.4.** (orthogonalité dans le cas graphique)

*Soit un graphe orienté avec un cycle  $C$  et un cocycle  $D$ , alors*

$$|(C^+ \cap D^+) \cup (C^- \cap D^-)| = |(C^- \cap D^+) \cup (C^+ \cap D^-)|$$

□

Cette propriété d'orthogonalité forte reste valide dans les matroïdes réguliers. Dans les matroïdes orientés en général, on sait juste que les deux membres de cette égalité sont soit vides soit non vides simultanément.

**Lemme 6.2.5.** (lemme des croissants 3.4 dans le cas graphique)

*Soit  $\vec{G}$  un graphe orienté,  $C$  et  $C'$  deux cycles,  $D$  et  $D'$  deux cocycles tels que  $C \cap D = C' \cap D' = ab$  avec  $a \in C^+ \cap C'^+$  et  $b \in D^+ \cap D'^+$ .*

*On suppose que :*

(i)

$$C \cap D' - ab \subseteq C^+ \cap D'^+$$

(ii)

$$C' \cap D - ab \subseteq C'^+ \cap D^+$$

*Alors*

$$C \cap D' - ab = \emptyset$$

*et*

$$C' \cap D - ab = \emptyset$$

*Preuve.* On suppose  $e \in C \cap D' - ab$ , alors  $e \in C^+ \cap D'^+$  (par (i)), alors  $a \in D'^-$  or  $b \in C^-$  (par (i), (iii), (iv) et l'orthogonalité).

Si  $a \in D'^-$ , alors  $b \in C'^+$  (par (iii), (iv) et l'orthogonalité avec  $C' \cap D' = ab$ ), c'est-à-dire  $b \in D^+ \cap C'^+$ , donc  $a \in D^-$  comme ci-dessus, et donc  $b \in C^+$  comme précédemment. Mais on a alors  $eb \subseteq C^+ \cap D'^+$  et  $(C^+ \cap D'^-) \cup (C^- \cap D'^+) = (C^+ \cap D'^-) = a$  ce qui contredit l'orthogonalité.

Similairement, si  $b \in C^-$ , alors  $a \in D^+$  (par (iii), (iv) et l'orthogonalité avec  $C \cap D = ab$ ), c'est-à-dire  $a \in D^+ \cap C'^+$ , donc  $b \in C'^-$  comme ci-dessus, et donc  $a \in D'^+$  comme ci-dessus. Mais on a alors  $ea \subseteq C^+ \cap D'^+$  et  $(C^+ \cap D'^-) \cup (C^- \cap D'^+) = (C^- \cap D'^+) = b$  ce qui contredit l'orthogonalité.

□

On vérifie facilement que ce lemme est plus fort que le lemme des croissants 3.4 pour un matroïde graphique, ainsi il peut aussi être utilisé dans la preuve du théorème fondamental 3.6.

### 6.3 Régions des arrangements hyperrésolubles

La structure très particulière de ces arrangements d'hyperplans permet d'illustrer la définition inductive de *Oribas* et ses propriétés géométriques liées à la suite de fermés emboîtés minimaux, à l'adjacence entre bases et régions, ainsi que le raffinement des activités par les partitions actives. Le calcul de la correspondance active canonique peut se faire directement à partir du graphe d'adjacence des régions.

La référence pour ce qui suit concernant la structure d'un arrangement hyperrésoluble est l'article de Björner, Edelman et Ziegler [BjEdZi 90]. Celui-ci donne aussi une définition de matroïdes orientés hyperrésolubles, généralisation directe de ces arrangements. Ce qui est fait dans cette partie se généralise aussi immédiatement à ces matroïdes orientés particuliers.

- Définitions et propriétés [BjEdZi 90].

Le *graphe d'adjacence des régions* d'un arrangement d'hyperplans  $H$  est le graphe ayant pour sommets les régions, reliées si et seulement si elles sont adjacentes (i. e. si on passe de l'une à l'autre par réorientation d'un élément).

*Définition.* Tout arrangement d'hyperplans de rang au plus 2 est *hyperrésoluble*.

Un arrangement d'hyperplans  $H$  de rang  $d \geq 3$  est *hyperrésoluble* si et seulement si il peut être écrit  $H = H_0 + H_1$ , ( $H_1 \neq \emptyset$ ) où  $H_0$  est un arrangement hyperrésoluble de rang  $d - 1$  et pour tout  $H'$  et  $H''$  distincts dans  $H_1$ , il existe  $H$  dans  $H_0$  tel que  $H' \cap H'' \subseteq H$ .

On note  $\Pi(R)$  la région de  $H_0$  qui contient la région  $R$  de  $H$ . On appelle *fibre* d'une région  $R$  de  $H = H_0 + H_1$  l'ensemble  $\Pi^{-1}(\Pi(R))$  des régions de  $H$  contenues dans la même région de  $H_0$  que  $R$ ,

**Propriété 6.3.1.** ([BjEdZi 90])

*Soit  $H = H_0 + H_1$  un arrangement hyperrésoluble. La restriction du graphe d'adjacence à une fibre est un arbre à deux extrémités, à  $|H_1| + 1$  sommets.*

*Preuve abrégée explicative.* L'intersection des éléments de  $H_0$  est une droite,  $H_0$  est l'ensemble des hyperplans de  $H$  contenant cette droite (i. e.  $H_0$  est un fermé du matroïde orienté associé), donc les hyperplans de  $H_1$  coupent chaque région de l'arrangement  $H_0$ . Etant donnée une région  $R_0$  de  $H_0$ , comme les hyperplans de  $H_1$  coupent tous cette région et ne se coupent entre eux que sur des hyperplans de  $H_0$ , le graphe d'adjacence des régions incluses dans  $R_0$  est un arbre à deux extrémités à  $|H_1| + 1$  éléments.  $\square$

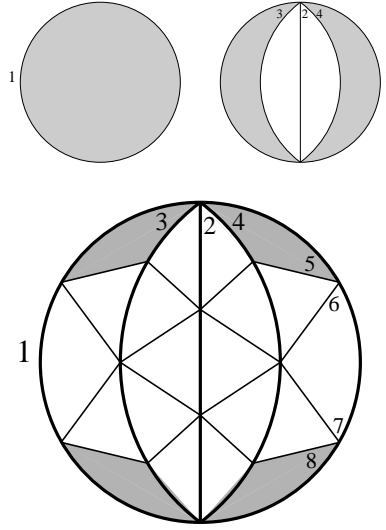
Le graphe d'adjacence d'une fibre induit un graphe sur  $H_1$ , arbre à deux extrémités, dont les arêtes correspondent aux régions qui ne sont pas des extrémités de la fibre.

$H$  étant hyperrésoluble, on peut définir une suite d'arrangements hyperrésolubles  $H_i$  de rang  $i$  :  $H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_r = H$  tels que pour tout  $i$ ,  $2 \leq i \leq r - 1$ ,  $H_i$  est le  $H_0$  dans la définition de  $H_{i+1}$  (\*).

---

(\*) Contrairement à [BjEdZi 90] on inclut ici  $H_0 \subset H_1 \subset H_2$  dans la structure.

Soit  $\omega$  un élément de  $H_r \setminus H_{r-1}$  que l'on suppose non réduit à un élément. L'arrangement  $H \setminus \omega$  obtenu en supprimant  $\omega$  de  $H$ , est évidemment hyperrésoluble pour la suite  $H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{r-1} \subset H_r \setminus \omega = H \setminus \omega$



**Figure 6.3.1 : exemple d'arrangement hyperrésoluble**

*Exemple.* La Figure 6.3.1 montre une suite d'arrangements hyperrésolubles :  $1 \subset 1234 \subset 12345678$ . Les régions canoniques pour cette suite sont grisées. Les fibres sont les segments formés par les régions d'un arrangement contenues dans une même région du précédent.

• Correspondances *Oribas* et *Oribas2* d'un arrangement hyperrésoluble.

Soit  $H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_r = H$  une suite d'arrangements hyperrésolubles. La correspondance *Oribas* entre les régions de  $H$  et les bases internes de  $H$  se calcule simplement, à condition toutefois de choisir un ordre sur les éléments compatible avec la structure hyperrésoluble de  $H$ .

Par la suite, on suppose que  $H$  est totalement ordonné, avec  $(H_1 \setminus H_0) < \dots < (H_r \setminus H_{r-1})$ , c'est à dire que : pour tout  $i \leq r$ ,

$$F_i^{min} = H_i$$

et donc

$$f_i = \inf(H_i \setminus H_{i-1})$$

On rappelle que  $B^{min} = f_1 < \dots < f_r$  est la plus petite base pour l'ordre lexicographique (proposition 0.5).

**Proposition 6.3.2.** (activités des bases, cas hyperrésoluble)

Les bases internes sont les  $B = b_1 < \dots < b_r$  avec pour tout  $1 \leq i \leq r$ ,

$$b_i \in H_i \setminus H_{i-1}$$

On a alors

$$Int(B) = B \cap B^{min}$$

*Preuve.* On note  $H = h_1 < h_2 < \dots < h_n$ , et on montre les résultats par induction. Pour  $r = 1$ ,  $b_1 = h_1 = f_1$ . Soit  $B = b_1, \dots, b_{i-1}$  est une base interne de  $H_{i-1}$ . Si  $b_i \in H_i \setminus H_{i-1}$ , alors  $B \cup b_i$  est une base de  $H_i$ , interne car  $H_{i-1} < H_i \setminus H_{i-1}$  et les intersections d'hyperplans de  $H_i \setminus H_{i-1}$  sont dans  $H_i$ .

Réciproquement, si une base  $b_1 < b_2 \dots < b_r$  n'est pas de ce type, c'est qu'il existe  $i$  et  $j$  et  $k$  tels que  $\{b_i, b_j\} \subseteq H_k \setminus H_{k-1}$ , or  $b_i$  et  $b_j$  doivent se couper sur  $H_{k-1}$  donc il existe un circuit contenant  $b_i, b_j$ , et un élément de  $H_{k-1}$ , qui est plus petit que les deux autres par hypothèse, donc la base n'est pas interne.

L'inclusion  $Int(B) \subseteq B \cap B^{min}$  est toujours vraie (proposition 0.5). Si  $b_i \in B \cap B^{min}$ , le fermé engendré par les  $b_j$ ,  $j < i$ , est  $H_{i-1}$ , et  $b_i \in H_i \setminus H_{i-1}$ , donc  $b_i = f_i = \min(H_i \setminus H_{i-1}) = \min(E \setminus cl(B - b_i))$  c'est-à-dire  $b_i \in Int(B)$ .  $\square$

**Proposition 6.3.3.** (activités des régions, cas hyperrésoluble)

Soit  $M$  une région de  $H$ . Si  $M$  n'est pas extrême dans sa fibre  $\Pi(M)$  alors  $AO^*(M) = AO^*(\Pi(M))$ . Si  $M$  est extrême dans sa fibre  $\Pi(M)$  alors  $AO^*(M) = AO^*(\Pi(M)) \cup f_r$ .

*Preuve.* L'élément  $f_{i+1}$ ,  $i < r - 1$ , est dual actif dans la région  $\Pi(M)$  de  $H_{r-1}$  si cette région est adjacente au fermé  $H_{i-1}$  de  $H_{r-1}$  (interprétation géométrique des activités des réorientations, chapitre 0). Si  $\Pi(M)$  est adjacente au fermé  $H_i$ ,  $i < r - 1$ , et si  $\Pi(M)$  est coupée dans  $H = H_r$  par un hyperplan  $e$ , alors  $e$  coupe  $H_i$ . D'après la propriété 6.3.3, la région  $M$  a au plus deux hyperplans frontières dans  $H_r$ . L'intersection éventuelle de ces hyperplans à la frontière de  $M$  est incluse, par définition d'un arrangement hyperrésoluble, dans un hyperplan de  $H_{r-1}$ . Donc pour tout  $i < r - 1$ ,  $M$  est adjacent à  $H_i$  dans  $H_r$  si et seulement si  $\Pi(M)$  est adjacente à  $H_i$  dans  $H_{r-1}$ . Donc  $\Pi(M)$  et  $M$  ont les mêmes éléments dual-actifs, sauf peut-être  $f_r$ .

Les régions extrêmes de la fibre dans  $H$  sont celles qui touchent le fermé  $H_{r-1}$  de  $H$ , c'est-à-dire géométriquement qui touchent la droite intersection des éléments de  $H_{r-1}$  dans  $H$  (par définition inductive des arrangements hyperrésolubles), c'est-à-dire celles pour lesquelles  $f_r$  est dual-actif. Réciproquement les régions non extrêmes ne touchent pas cette droite et  $f_r$  n'y est pas dual-actif.  $\square$

**Lemme 6.3.4.**

Pour toute région  $M$  de  $H$ ,

$$Oribas(M) \setminus \max(Oribas(M)) = Oribas(\Pi(M))$$

$$Oribas2(M) \setminus \max(Oribas2(M)) = Oribas2(\Pi(M))$$

*Preuve.* Le raisonnement suivant s'applique de la même façon à  $\psi = \text{Oribas}$  et  $\psi = \text{Oribas2}$ , et repose sur leurs définitions inductives. Tout d'abord,  $\omega$  étant le plus grand élément de  $H$ , si  $\omega \in \psi(M)$  alors  $\psi(M) = \psi(M/\omega) \cup \omega$  et si  $\omega \notin \psi(M)$  alors  $\psi(M) = \psi(M \setminus \omega)$ . Si  $\omega = f_r$ , c'est un isthme et le résultat est évident. On suppose désormais  $\omega > f_r$ .

Puisque  $H \setminus \omega$  est aussi hyperrésoluble, et puisque les fibres de  $H \setminus \omega$  se déduisent évidemment des fibres de  $H$ , quitte à supprimer tous les éléments supérieurs à  $\max(\psi(M))$ , on peut supposer  $\omega = \max(\psi(M))$ . Ainsi  $\psi(M) \setminus \max(\psi(M)) = \psi(M/\omega)$ .

Soit  $e \in H$  avec  $f_r \leq e < \omega$ . Par définition d'un arrangement hyperrésoluble, l'intersection de  $e$  et  $\omega$  est incluse dans un hyperplan de  $H_{r-1}$ . Donc la face  $M/\omega \setminus e$  de  $H \setminus e$  ne peut être coupée par  $e$ . Autrement dit  $e$  n'appartient pas à un cocircuit positif de  $-_e M/\omega$ . Donc par définition  $\psi(M/\omega) = \psi(M/\omega \setminus e)$ . En appliquant successivement ceci à tout  $e \in ((H_r \setminus \omega) \setminus H_{r-1})$  on obtient donc  $\psi(M/\omega) = \psi(M/\omega \setminus ((H_r \setminus \omega) \setminus H_{r-1}))$ . Or  $\omega$  est un isthme de  $M \setminus ((H_r \setminus \omega) \setminus H_{r-1})$ , donc  $\psi(M/\omega \setminus ((H_r \setminus \omega) \setminus H_{r-1})) = \psi(M(H_{r-1})) = \psi(\Pi(M))$ .  $\square$

### Lemme 6.3.5.

*Pour toute région  $M$  de  $H$  qui n'est pas extrême dans sa fibre, le plus grand élément de  $\text{Oribas2}(M)$  est un hyperplan frontière de  $M$ . Pour toute région  $M$  de  $H_r$  extrême dans sa fibre, le plus grand élément de  $\text{Oribas2}(M)$  est  $f_r$ .*

*Preuve.* Soit  $\omega$  le plus grand élément de  $H_r$ . On montre le lemme par induction en le supposant vrai dans  $H \setminus \omega$ . Si  $\omega = f_r$ , c'est un isthme et les deux régions de chaque fibre sont extrêmes et  $f_r$  appartient à leur base associée. On suppose désormais  $\omega > f_r$ .

Soit  $M$  une région de  $H$ . Si  $\omega$  n'est pas un hyperplan frontière de  $M$ , alors  $\omega$  appartient à un circuit positif de  $-_\omega M$ , et  $\text{Oribas2}(M) = \text{Oribas2}(M \setminus \omega)$ , par définition de  $\text{Oribas2}$  (chapitre 4 partie 3). Donc la propriété reste vraie par hypothèse d'induction.

Si  $\omega$  est un hyperplan frontière de  $M$ , alors puisque  $\omega \in H_r$ , la région  $-_\omega M$  est dans la même fibre que  $M$ . Dans ce cas si  $-_\omega M$  est une région extrême de cette fibre, son activité est supérieure strictement à celle de  $M$  (proposition 6.3.3), donc  $\omega \in \text{Oribas2}(M)$  par définition de  $\text{Oribas2}$ , et  $f_r \in \text{Oribas2}(-_\omega M) = \text{Oribas2}(M \setminus \omega)$ . La propriété est donc vérifiée pour la région extrême et la région  $M$ .

Enfin si  $-_\omega M$  est une région non extrême de la fibre, ses éléments actifs sont les mêmes que ceux de  $M$  (proposition 6.3.3). On est alors dans le cas douteux de l'algorithme définissant  $\text{Oribas2}$ . Soit  $M \setminus \omega$  la région de  $H'$  qui contient la région  $M$  de  $H$ , soit  $B \cup e = \text{Oribas2}(M \setminus \omega)$  et soit  $\widetilde{M}$  la seule région parmi  $\{M, -_\omega M\}$  ayant  $e$  pour frontière. Par définition de  $\text{Oribas2}$  on a alors  $\text{Oribas2}(\widetilde{M}) = B \cup e$  et  $\omega \in \text{Oribas2}(-_\omega \widetilde{M})$ . Ainsi, la propriété du lemme est vraie pour  $\widetilde{M}$  et  $-_\omega \widetilde{M}$ , c'est-à-dire pour  $M$  et  $-_\omega M$ .  $\square$

**Théorème 6.3.6.** (correspondance *Oribas2*, cas hyperrésoluble)

Soit  $H$  un arrangement hyperrésoluble défini par la suite  $H_0 \subset \dots \subset H_r = H$ . L'image des régions par *Oribas2* se déduit directement par induction du graphe d'adjacence de  $H$ .

Pour chaque fibre, associée à une base interne  $B$  de  $H_{r-1}$ , les deux régions extrêmes de la fibre sont associées à  $B \cup f_r$ .

Si  $H_r \setminus H_{r-1}$  n'est pas réduit à  $w_r$ , le graphe d'adjacence des régions de la fibre, arbre à deux extrémités, induit un graphe ayant pour ensemble de sommets  $F_r$  et dont les arêtes sont les régions non extrêmes de la fibre. On oriente ce graphe depuis  $f_r$  vers les régions extrêmes. Une arête-région est associée par *Oribas2* à  $B \cup h$  où  $h$  est l'extrémité père de l'arête.

*Preuve.* On montre ce théorème par induction, en supposant qu'il est vrai dans  $H_{r-1}$ . D'après le lemme 6.3.4, si  $\Pi(M)$  est associée à  $B$  alors  $M$  est associée à  $B \cup e$  pour un  $e \in H_r \setminus H_{r-1}$ . Puisque le graphe d'adjacence restreint à une fibre est un arbre à deux extrémités, la définition de *Oribas2* du théorème est alors la seule façon de satisfaire le lemme 6.3.5.  $\square$

**Proposition.** (4.3.1).

La correspondance *Oribas* et la correspondance *Oribas2* coïncident pour les régions d'activités  $(1, 0)$ .

**Proposition 6.3.7.** (définition inductive 4.2.3 de *Oribas*, cas hyperrésoluble)

Soit  $H$  un arrangement hyperrésoluble défini par la suite  $H_0 \subset \dots \subset H_r = H$ . La correspondance *Oribas* de  $H$  se calcule en général par induction dans chaque fibre en ajoutant successivement les éléments dans l'ordre croissant de la façon suivante. Soit une fibre associée à une base interne  $B$  de  $H_{r-1}$ . Les deux régions extrêmes de la fibre sont associées à  $B \cup f_r$ . Si  $H_r \setminus H_{r-1}$  n'est pas réduit à  $f_r$ , soit  $M$  une région non extrême ayant pour frontière  $\omega$  le plus grand élément de  $H_r$ . La région opposée par rapport à  $\omega$  est  $-\omega M$ . L'arrangement obtenu en supprimant  $\omega$  est hyperrésoluble pour la même suite à laquelle on enlève  $\omega$ , et  $M \setminus \omega$  est la région de cet arrangement contenant la région  $M$ .

On note  $AO_\omega^*(M)$  l'ensemble des plus petits éléments de cocircuits positifs de  $M$  contenant  $\omega$ .

Si  $\max AO_\omega^*(M) > \max AO_\omega^*(-\omega M)$  alors  $Oribas(M) = B \cup e$  et  $Oribas(-\omega M) = B \cup \omega$

Si  $\max AO_\omega^*(M) < \max AO_\omega^*(-\omega M)$  alors  $Oribas(M) = B \cup \omega$  et  $Oribas(-\omega M) = B \cup e$

Si  $\max AO_\omega^*(M) = \max AO_\omega^*(-\omega M)$  alors avec  $B \cup e = Oribas(M \setminus \omega)$  et  $\widetilde{M}$  la seule région parmi  $\{M, -\omega M\}$  ayant  $e$  pour frontière,  $Oribas(\widetilde{M}) = B \cup e$  et  $Oribas(-\omega \widetilde{M}) = B \cup \omega$ .

*Preuve.* On montre ce théorème par induction, en supposant qu'il est vrai dans  $H_{r-1}$ . D'après le lemme 6.3.4, si  $\Pi(M)$  est associée à  $B$  alors  $M$  est associée à  $B \cup e$  pour

un  $e \in H_r \setminus H_{r-1}$ . Le calcul de  $\max(\text{Oribas}(M))$  est alors fait exactement comme dans la définition inductive de *Oribas* du théorème 4.2.3.  $\square$

*Remarques.*

- Dans la définition de *Oribas2*, toutes les régions non extrêmes d'une même fibre jouent des rôles similaires puisqu'elles ont les mêmes éléments actifs (proposition 6.3.3). La définition de *Oribas* est plus compliquée car ce ne sont plus seulement les éléments actifs qu'il faut considérer mais les partitions actives associées aux régions (chapitre 2 partie 2), ce qui se traduit dans le calcul de  $\text{Oribas}(M)$  par l'intervention de  $\max \text{ACO}_\omega^*(M)$  comme dans sa définition inductive (chapitre 4 partie 2).

- Les régions associées par *Oribas* à une même base se déduisent à partir de l'une (quelconque) d'entre elles en réorientant de toutes les façons possibles toutes les unions de cocircuits positifs de plus petit élément supérieurs à un élément quelconque (propriété (OB6) 'retournements' chapitre 2 partie 3). Géométriquement, réorienter une union de cocircuits positifs revient à réorienter le fermé complémentaire de cette union et d'une fibre à l'autre l'ordre des régions n'est pas le même selon le fermé qui a été réorienté. Grâce à ceci, il est possible de reconstruire les partitions actives (i. e. les unions de cocircuits positifs de plus petit élément supérieurs à un élément quelconque) uniquement à partir du graphe d'adjacence de l'arrangement hyperrésoluble. Les régions de  $H_r$  associées à une même base sont dans des fibres associées à une même base de  $H_{r-1}$ , et on peut finalement déduire *Oribas* uniquement à partir du graphe d'adjacence de l'arrangement hyperrésoluble. Ceci se fait de façon similaire à la définition de *Oribas2* du théorème 6.3.6, mais en considérant dans chaque fibre plusieurs sous arbres à deux extrémités, au lieu d'un seul. On passe les détails.

Puisque *Oribas2* se déduit directement de l'ordre dans les fibres et du plus petit hyperplan coupant chaque fibre, et que  $\text{Oribas}^{(1,0)} = \text{Oribas2}^{(1,0)}$  (proposition 4.3.1), on déduit immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 6.3.8.** (indépendance vis à vis de l'ordre)

Soit  $\mathcal{H}$  un arrangement hyperrésoluble définissant le matroïde orienté  $M$  ordonné sur  $E = e_1 < \dots < e_n$ ,  $p$  une permutation de  $1 \dots n$  telle que  $p(f_i) = w_i$  et  $p(F_i^{\min} \setminus F_{i-1}^{\min}) = F_i^{\min} \setminus F_{i-1}^{\min}$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ , et  $M_p$  le matroïde orienté ordonné sur  $\bar{E} = e_{p(1)} < \dots < e_{p(n)}$  définissant le même matroïde orienté que  $M$  sur  $E$  non ordonné.

Alors pour tout  $A \subseteq E$  tel que  $-_A M$  est acyclique on a

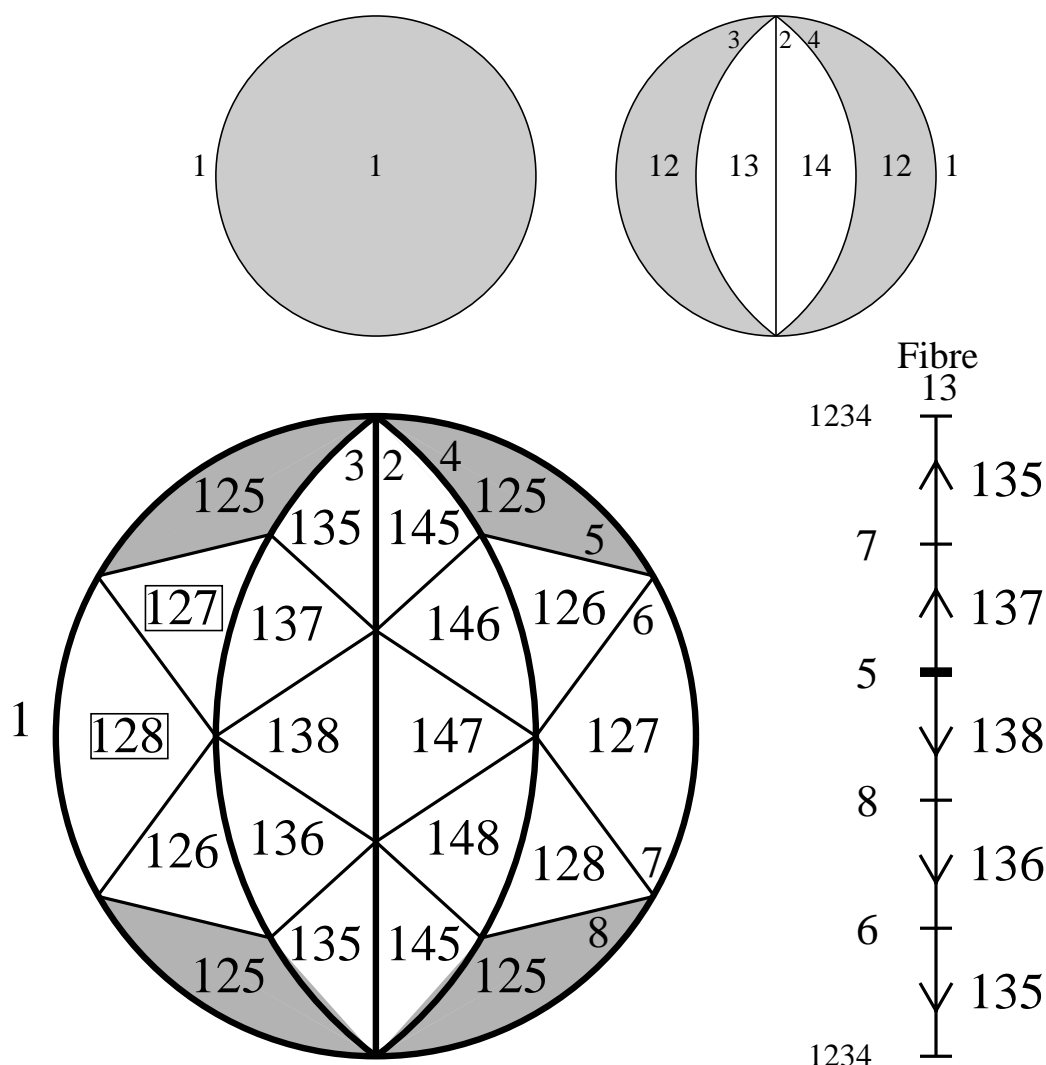
$$\text{Oribas2}_{M_p}(A) = \text{Oribas2}_M(A)$$

Et pour tout  $A \subseteq E$  tel que  $-_A M$  est acyclique d'activité duale 1 on a

$$\text{Oribas}_{M_p}^{(1,0)}(A) = \text{Oribas}_M^{(1,0)}(A)$$

$\square$





**Figure 6.3.2 : *Oribas2* d'un arrangement hyperrésoluble**

*Exemples.*

- La Figure 6.3.2 montre la correspondance *Oribas2* d'un arrangement hyperrésoluble  $1 \subset 1234 \subset 12345678$ . La fibre 13 de l'arrangement 1234 est détaillée. La Figure 6.3.3 montre la correspondance *Oribas* pour cet arrangement. Les deux bases encadrées ne sont pas associées à la même région que par *Oribas* : dans *Oribas* la propriété de 'retournements' (qui impose que les deux régions associées à 127 soient opposées dans la figure) l'emporte sur la propriété 'adjacence' (7 n'est plus adjacent à la région associée à 127, c'est parcequ'il est le plus petit élément supérieur à 1 du fermé cyclique 178), alors que c'est le contraire pour *Oribas2*.

- La Figure 2.7 montre les partitions actives des régions d'une fibre d'un arrangement hyperrésoluble de rang 4. Quitte à ajouter des éléments intermédiaires dans l'ordre entre les éléments représentés  $1 < 2 < 3 < 4 < a < \dots < g$ , mais qui ne coupent pas les régions représentées, on vérifie facilement que cette figure peut-être effectivement extraite d'une fibre d'arrangement hyperrésoluble. La Figure 4.4 et la Figure 4.5 donnent respectivement les applications *Oribas* et *Oribas2* pour les

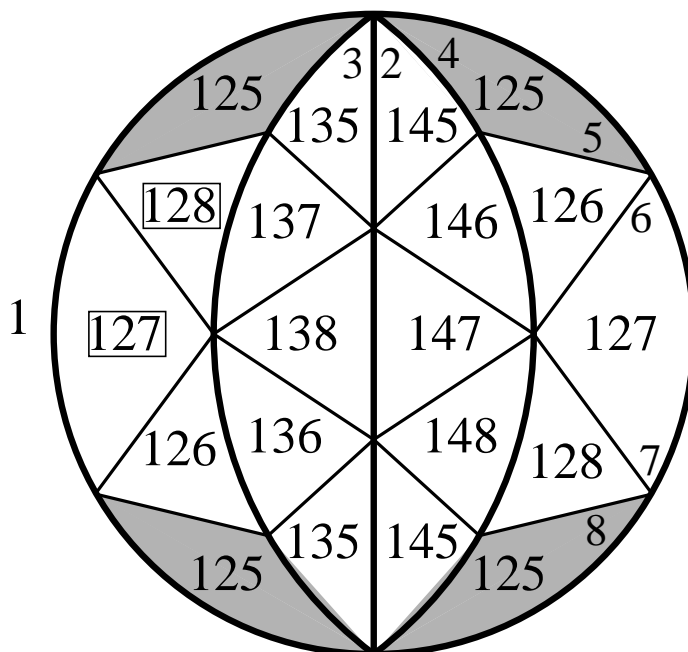


Figure 6.3.3 : *Oribas* d'un arrangement hyperrésoluble

régions de cette fibre.

*Remarques en liaison avec [BjEdZi 90].*

On appelle une région  $\bar{R}$  *canonique pour cette suite* si  $\Pi(\bar{R})$  est canonique dans la suite  $H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{r-1}$  et  $\bar{R}$  est extrémale dans le graphe d'adjacence de sa fibre. Pour  $d \leq 1$  toute région est canonique. Dans [BjEdZi 90] c'est  $d \leq 2$  et on dit juste *canonique*.

Pour l'anecdote, puisque dans chaque fibre les deux régions extrêmes sont les seules à avoir un nouvel élément actif, on déduit immédiatement le corollaire suivant des résultats précédents.

**Corollaire anecdotique.** *Soit  $H$  un arrangement hyperrésoluble de base minimale  $B^{\min}$ , alors  $\text{Oribas}_H^{-1}(B^{\min}) = \text{Oribas2}_H^{-1}(B^{\min})$  est l'ensemble des régions canoniques pour la suite d'arrangements qui définit  $H$ .*  $\square$

Pour information, un résultat principal de [BjEdZi 90] est que le graphe d'adjacence d'un arrangement hyperrésoluble, orienté depuis une région canonique, est un treillis.

Plus précisément, étant donnée une région de référence  $\bar{R}$ , le graphe d'adjacence d'un arrangement d'hyperplans représente un ordre sur les régions : une région  $R$  est plus petite qu'une autre  $R'$  si l'ensemble des hyperplans qui séparent  $R$  de  $\bar{R}$  est inclus dans l'ensemble des hyperplans qui séparent  $R'$  de  $\bar{R}$ . On peut ainsi orienter le graphe d'adjacence à partir de la région  $\bar{R}$  fixée, on le note alors  $P(H, \bar{R})$ .

Dans le cas d'un arrangement hyperrésoluble, l'inclusion des régions de  $H$  dans celles de  $H_0$  est donc une surjection canonique  $\Pi$  compatible avec la relation d'ordre,  $\Pi : P(H, \bar{R}) \rightarrow P(H_0, \Pi(\bar{R}))$ . Et le graphe d'adjacence restreint à une fibre est celui d'un ensemble totalement ordonné.

Dans ce contexte, une région  $\bar{R}$  est canonique si  $\Pi(\bar{R})$  est canonique et si fibre

est totalement ordonnée dans  $P(H, \bar{R})$ . Si  $\bar{R}$  est une région canonique, on connaît donc par induction la structure de l'ensemble ordonné  $P(H, \bar{R})$ .

Ici, la construction de la correspondance active canonique, qui utilise la forme du graphe d'adjacence via les fibres, pourrait aussi être formulée dans cet ensemble ordonné.

Dans un matroïde orienté en général, on retrouve dans la représentation géométrique de *Oribas* des sortes de ‘fibres’ dans lesquelles les bases moins leur plus grand élément sont égales et où le plus grand élément est celui que l'on traverse pour passer d'une région de la fibre à une autre adjacente, comme le lecteur pourra s'amuser à le voir dans les exemples donnés en annexe 1.

## 6.4 Réorientations acycliques de rang 3

Les matroïdes orientés de rang 3 sont représentés en toute généralité par les arrangements de pseudodroites dans le plan. Ce cas particulier est un bon support pour l'intuition concernant la construction de la correspondance et la façon dont elle généralise la traduction combinatoire de la programmation linéaire. Cependant certaines complications de cas général n'apparaissent pas dans ce cas particulier. Par exemple dans un arrangement de pseudodroites, comme dans le cas uniforme, tous les sommets d'une région sont portés par exactement  $r - 1$  (ici  $r - 1 = 2$ ) faces maximales de la région, alors que ceci est faux en général. Ce cas particulier est traité dans [GiLV1]. Le cas des réorientations acycliques des matroïdes orientés de rang 2 est donné en exemple à la fin du chapitre 5 partie 1 (Figure 3.5).

- Un exemple significatif.

On prendra comme exemple l'arrangement de pseudodroites associé à la configuration  $D_{13}$  de 13 points dans l'espace affiné réel projectif (Figure 6.4.1), qui contient tous les cas possibles du rang 3. Cette configuration s'obtient en ajoutant les 3 points  $BCD$  à une configuration de Desargue sur  $123456789A$ . Cette construction peut-être faite de diverses façons. L'arrangement de pseudodroites  $D_{13}$  a un groupe d'automorphismes d'ordre 24, avec 3 orbites :  $1457\ 23689A\ BCD$ . Ce groupe d'automorphismes sur  $1457$  est le groupe symétrique.

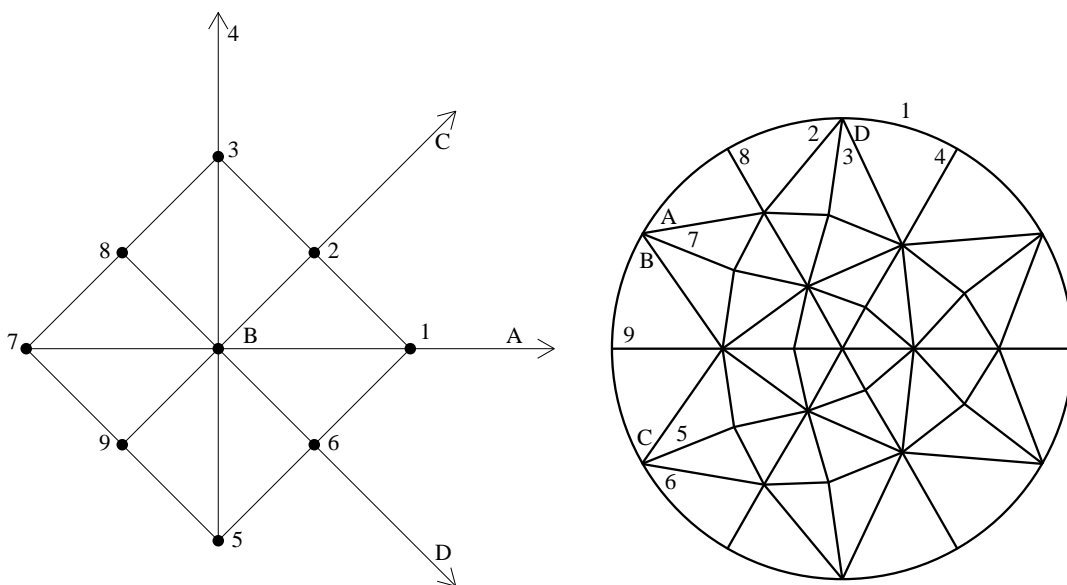


Figure 6.4.1 :  $D_{13}$

Le polynôme de Tutte de  $D_{13}$  est

$$t(D_{13}; x, y) = y^{10} + 3y^9 + 6y^8 + 10y^7 + 15y^6 + 21y^5 + 28y^4 + x^3 + 9xy^2 + 36y^3 + 10x^2 + 22xy + 36y^2 + 24x + 24y$$

Le matroïde  $D_{13}$  a 246 bases, et on a  $b_{1,0} = 24$   $b_{2,0} = 10$   $b_{3,0} = 1$ . L'arrangement de la Figure 6.4.1 a  $24 + 2.10 + 4.1 = 48$  régions, avec 24 régions bornées.

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné de rang 3 sur  $E$ .

Pour commencer, on remplace chaque classe d'éléments parallèles (au sens des matroïdes :  $e$  et  $f$  sont dans la même classe si  $ef$  est un circuit) par son plus petit élément (en effet cet élément serait extérieurement actif dans toute base contenant un autre élément de sa classe ; et on déduit la correspondance dans l'arrangement de départ en orientant tous les éléments d'une classe dans le même sens). On supprime aussi les boucles (sinon il n'y a pas de réorientations acycliques).

Par la suite on suppose donc que  $M$  est simple (les circuits sont de cardinal au moins 3).

*Notation.* On note  $e_m$  le plus petit élément ne passant pas par  $e_1 \cap e_2$  (ou 'non parallèle' à  $e_2$ ). Ainsi la base minimale est

$$B^{min} = e_1 e_2 e_m$$

- Des bases aux régions.

#### Activité interne 1

Soit  $B = \{e_1 < e_p < e_q\}$  une base d'activités  $(1, 0)$  de  $M$ .

On a  $e_p > e_2$ , on note  $v = e_p \cap e_q$  et  $F$  l'ensemble des pseudodroites passant par  $v$ . Alors  $e_p$  est le plus petit élément de  $F$  (sinon ce plus petit élément est extérieurement actif), en particulier  $e_2$  n'est pas dans  $F$ .

Soit  $R$  la région associée à  $B$  par *Oribas*.

**cas (1)** non dégénéré :  $e_p$  et  $e_q$  non parallèles à  $e_2$

$R$  = région incidente à  $v = e_p \cap e_q$ , bordée par  $e_q$ , dans le triangle  $e_2, e_p, e_q$  (Figure 6.4.2).

Le cas (1) est le seul si le matroïde orienté est uniforme. On appelle les autres cas *dégénérés* :  $e_p$  ou  $e_q$  parallèle à  $e_2$ . On a alors  $e_q \neq e_m$  sinon  $e_q$  serait intérieurement actif.

**cas (2.a)** dégénéré avec  $e_p$  parallèle à  $e_2$  et  $e_m$  ne passe pas par  $v = e_p \cap e_q$

$R$  = région incidente à  $v$ , bordée par  $e_q$ , du même côté de  $e_p$  que  $e_2$ , et du même côté de  $e_q$  que  $e_p \cap e_m$  (Figure 6.4.3).

**cas (2.b)** dégénéré avec  $e_p$  parallèle à  $e_2$  et  $e_m$  passe par  $v = e_p \cap e_q$ ,  $m \neq q$

$R$  = région incidente à  $v$ , bordée par  $e_q$ , dans le triangle  $e_2 e_q e_m$  (Figure 6.4.4).

**cas (3)** dégénéré avec  $e_q$  parallèle à  $e_2$

Dans ce cas  $e_m$  ne passe pas par  $v = e_p \cap e_q$ , sinon  $e_p$  étant non parallèle à  $e_2$  on aurait  $m \leq p$ , d'où  $m = p$ , et par suite  $e_p$  serait intérieurement actif.

$R$  = région incidente à  $v$ , bordée par  $e_q$ , du même côté de  $e_q$  que  $e_2$ , et du même côté de  $e_p$  que  $e_q \cap e_m$ .

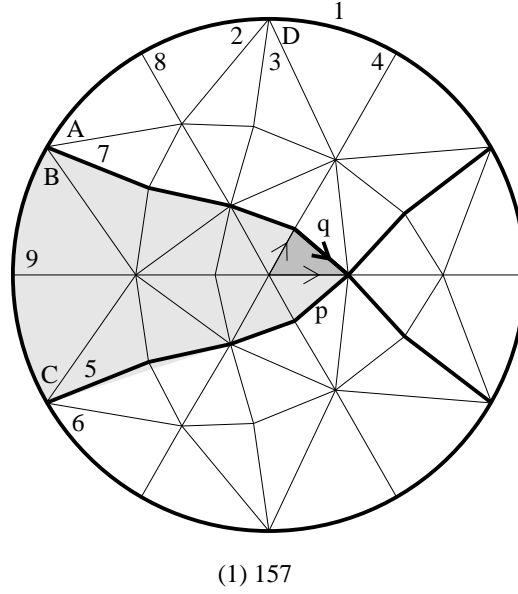


Figure 6.4.2 : cas (1) pour  $D_{13}$  activités (1, 0)

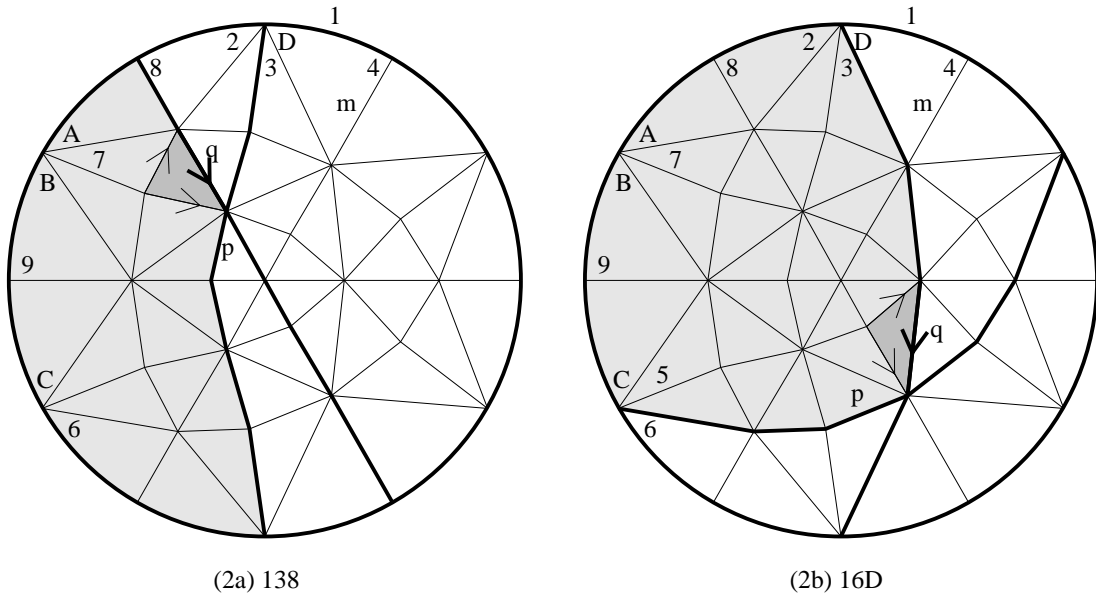


Figure 6.4.3 : cas (2a) et (2b) pour  $D_{13}$  activités (1, 0)

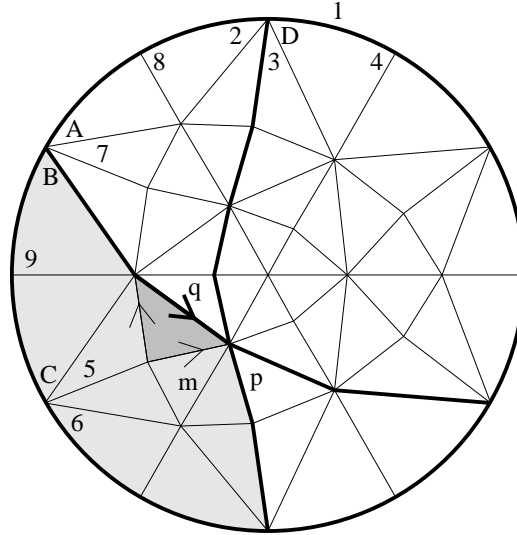
La Figure 6.4.5 montre la bijection dans le cas d'activité 1, en récapitulant les cas selon la couleur de chaque région.

#### Activité interne 2

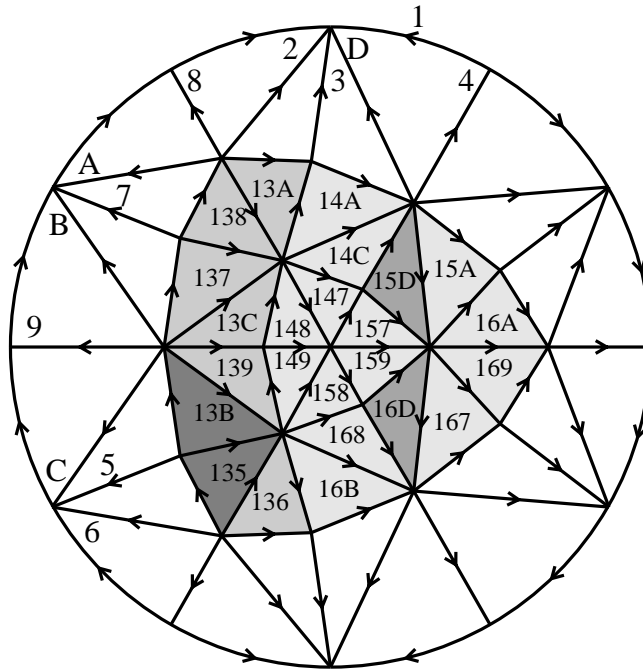
(1)  $B = e_1 e_2 e_q$

Dans ce cas  $Int(B) = \{e_1, e_2\}$ . Soit  $v = e_1 \cap e_q$  (ce sont deux sommets opposés), et  $F$  l'ensemble des éléments passant par  $v$ .

**cas (1.1)**  $B = e_1 e_2 e_q$  et  $e_q$  est le plus petit élément de  $F - e_1$



(3) 13B

Figure 6.4.4 : cas (3) pour  $D_{13}$  activités  $(1, 0)$ Figure 6.4.5 :  $Oribas^{(1,0)}$  et graphe actif des cocircuits (partie 5.2) de  $D_{13}$ 

Dans ce cas  $e_m$  ne passe pas par  $v$ , sinon  $m = q$  et  $e_q$  serait intérieurement actif. On est en fait ramené à  $M/e_1$  (dont on remplace aussi les classes d'éléments parallèles par leur plus petit élément).

$R$  est incidente à  $v$ , bordée par les pseudosegments  $[e_q \cap e_1, e_m \cap e_1]$  qui ne contiennent pas  $e_2 \cap e_1$ .

L'autre région est  $-_{E \setminus F} R$ .

**cas (1.2)**  $B = e_1 e_2 e_q$  et le plus petit élément de  $F - e_1$  est  $e_p$ ,  $e_p \neq e_q$

$R$  est incidente à  $v$ , bordée par  $e_q$ , du même côté de  $e_q$  que  $e_p$ .

L'autre région est  $-_{E \setminus F} R$ .

**cas (2)**  $B = e_1 e_m e_q$

Dans ce cas  $\text{Int}(B) = \{e_1, e_m\}$ . Soit  $v = e_1 \cap e_q = e_1 \cap e_2$  (ce sont deux sommets opposés), et  $F$  l'ensemble des éléments passant par  $v$ .

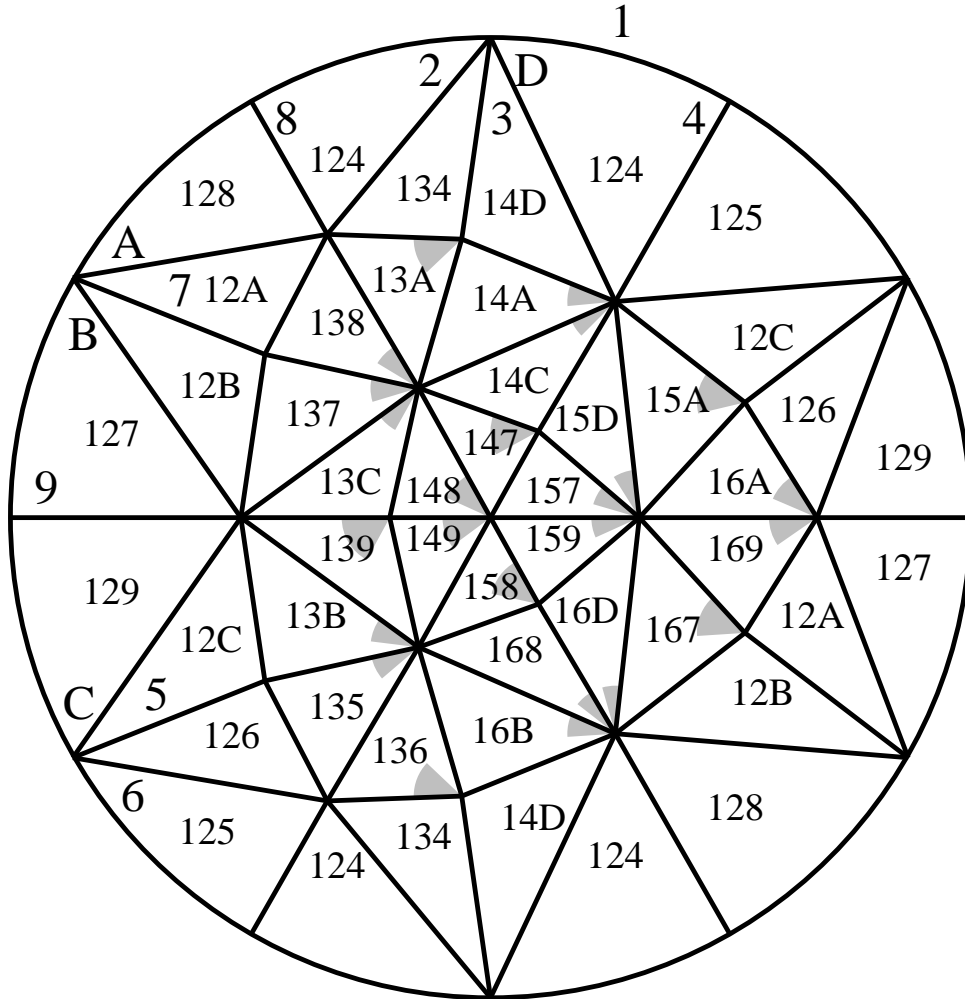
$R$  est incidente à  $v$ , bordée par  $e_q$ , du même côté de  $e_p$  que  $e_2$ .

L'autre région est  $-_{E \setminus F} R$ .

### Activité interne 3

$$B = e_1 e_2 e_m$$

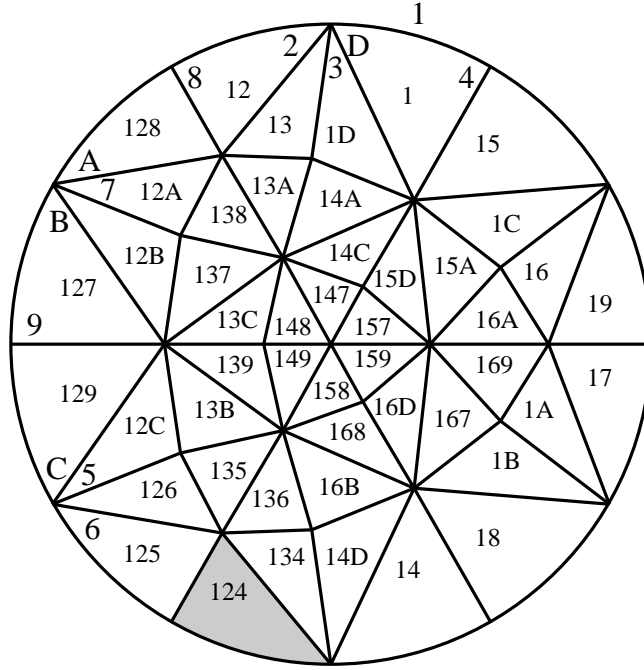
Les 4 régions sont celles incidentes à  $e_1 \cap e_2$  et bordées par  $e_1$ .



**Figure 6.4.6 : Oribas pour  $D_{13}$**

La Figure 6.4.6 montre la correspondance active canonique pour toutes les réorientations acycliques de  $D_{13}$ .





**Figure 6.4.7 :** bijection active entre  $\mathcal{NBC}$  et régions (partie 4.3) de  $D_{13}$

La Figure 6.4.7 montre la bijection active induite par *Oribas* entre l'ensemble des parties sans circuit brisé  $\mathcal{NBC}$  et celui des régions (chapitre 4 partie 3 'Compléments').

• Graphe actif des cocircuits.

Le *graphe actif des cocircuits* d'un matroïde orienté ordonné de rang 3 (chapitre 5 partie 2) est obtenu en orientant les arêtes du graphe des sommets de l'arrangement de la façon suivante :

- en s'éloignant de  $e_2$  en direction de  $e_1$  (plan à l'infini) pour les arêtes portées par une droite non parallèle à  $e_2$ ,
- en s'éloignant de  $e_m$  (plus petite pseudodroite non parallèle à  $e_2$ ) en direction de  $e_1$  (plan à l'infini) pour les arêtes portées par une droite parallèle à  $e_2$ ,
- en s'éloignant de  $e_m$  en direction de  $e_2$  pour les arêtes portées par  $e_1$ .

Le graphe actif des cocircuits de  $D_{13}$  est représenté sur la Figure 6.4.5.

**Théorème.** (théorème 5.2.3, rang 3)

Toute région bornée  $R$  avec  $Oribas(R) = e_1 e_p e_q$  a  $v = e_p \cap e_q$  pour unique sommet sans sortante dans le graphe actif des cocircuits. Dans tous les cas,  $v$  est le sommet terminal de l'arête portée par  $e_q$ .  $\square$

*Preuve de la bijectivité du cas (1,0).* Sachant que  $2b_{1,0} = o_{1,0}$ , l'injectivité de l'application des bases aux régions entraîne la bijectivité. Supposons que  $B = \{e_1 < e_p < e_q\}$  et  $B' = \{e_1 < e_{p'} < e_{q'}\}$  produisent la même région  $R$ . Donc la région fixe le sommet  $v$ , et  $R$  est incidente à  $v$  et bordée par  $e_q$  et  $e_{q'}$ . Nécessairement  $e_p = e_{p'}$  est le plus petit élément de  $F$ . Supposons  $e_q \neq e_{q'}$ . Les 2 arêtes incidentes à  $R$  en  $v$  sont portées par  $e_q$  et  $e_{q'}$ . Si ni  $e_q$  ni  $e_{q'}$  ne sont parallèles à  $e_2$  les deux bases  $B$  et  $B'$

sont dans le même des cas (1) (2.1.1) ou (2.1.2). Dans le cas (1)  $R$  ne peut pas être du côté de  $e_p$  à la fois pour  $e_q$  et  $e_{q'}$ . Dans les cas (2.1.1) (2.1.2)  $R$  ne peut pas être du côté de  $e_m$  à la fois pour  $e_q$  et  $e_{q'}$ . Supposons l'un de  $e_q$   $e_{q'}$ , soit  $e_q$ , parallèle à  $e_2$ . Alors  $B$  est dans le cas (2.2.1) et  $B'$  dans le cas (1), et on a encore une impossibilité.  $\square$

- Petit jeu sur un arrangement de pseudodroites.

### Proposition 6.4.1.

Soit  $M$  un matroïde orienté ordonné de rang 3. L'application  $Oribas^{(1,0)}$  est déterminée par les deux propriétés suivantes

$(OB2^{(1,0)})$  'bijectivité'

$Oribas_M^{(1,0)}$  induit une bijection entre les paires de réorientations opposées d'activités  $(1, 0)$  et les bases d'activités  $(1, 0)$

$(OB8_{\text{rang } 3}^{(1,0)})$  'adjacence'

Avec  $Oribas^{(1,0)}(M) = B = f_1 < e_p < e_q$  on a  $C^*(B; f_1)$  et  $C^*(B; f_1) \circ C^*(B; e_p)$  covecteurs positifs de  $M$

*Preuve.* La preuve ressemble à celle de la proposition 6.1.9 du cas uniforme car le graphe actif des cocircuits (planaire) en rang 3 n'a pas de cycle. En effet, les pseudodroites parallèles à  $e_2$  de chaque côté de  $e_2$  sont totalement ordonnées de  $e_2$  vers  $e_1$ , et les pseudodroites non parallèles à  $e_2$  coupent ces pseudodroites selon cet ordre. et sont dirigées de  $e_2$  vers  $e_1$  selon cet ordre. Lorsqu'une arête portée par une pseudodroite parallèle à  $e_2$  est dirigée, elle ne peut donc pas faire apparaître de cycle, sinon une extrémité aurait une arête non parallèle à  $e_2$  dirigée de  $e_1$  vers  $e_2$ . Les sommets portés ni par  $e_1$  ni par  $e_2$  sont donc ordonnés partiellement. Un sommet  $v$  maximal touche  $k - 1$  régions bornées, où  $k$  est le nombre de droites passant par  $v$ . Si  $p$  est la plus petite de ces droites, les bases à associer sont celles du type  $1pq$  avec  $q > p$  passant par  $v$ . L'association entre régions et ces bases est alors déterminée de façon unique pour qu'on ait la bijectivité et  $q$  adjacent à la région associée à  $e_1pq$  (comme en rang 2 où le graphe d'adjacence des régions bornées est un segment).

On conclut en supprimant ce sommet de l'ordre partiel et en réitérant le procédé : il y a toujours un sommet maximal, ce sommet maximal  $w$  touche autant de régions non encore affectées que de bases ayant ce cocircuit fondamental par rapport à  $e_1$  (les régions touchant  $w$  sont sinon soit non bornées, soit touchant un sommet plus grand donc par construction affectées à un sommet plus grand).  $\square$

Comme dans la Récréation, on peut alors voir la correspondance comme une sorte de puzzle, dont l'unique solution est  $Oribas^{(1,0)}$  par la proposition 6.4.1 : voir page suivante.

**Puzzle.** On dispose d'un arrangement de pseudodroites où  $e_1$  est représenté comme le cercle à l'infini, et d'autant de jetons que de régions bornées. Sur chaque jeton est dessiné un segment de couleur  $a$  et une extrémité de couleur  $b$ , avec  $a > b$ . Les jetons sont tous les couples  $a > b$  avec  $e_1ba$  base interne d'activités  $(1, 0)$ . Le jeu est de poser les jetons dans les régions bornées de sorte que

- le segment  $a$  soit de la couleur d'un segment bordant la région
- et le sommet  $b$  soit de la couleur d'une pseudodroite passant par une extrémité de ce segment.

La correspondance active canonique de l'arrangement de pseudodroites, restreinte aux régions bornées, est l'unique solution de ce puzzle.

## Références

- [BaKe 92] A. Bachem, W. Kern. Linear programming duality. An introduction to oriented matroids. Springer Verlag (1992).
- [BePe 97] J.S. Beissinger, U.N. Peled. A note on major sequences and external activity in trees. The Wilf Festschrift (Philadelphia, PA, 1996), Electron. J. Combin. 4 (1997), no. 2, Research Paper 4, approx. 10 pp. (electronic).
- [Bj 87] A. Björner. Homology and shellability of matroids and geometric lattices. Combinatorial Geometries ([W2]). Cambridge University Press (1987).
- [BjEdZi 90] A. Björner, P.H. Edelman, G. Ziegler. Hyperplane arrangements with a lattice of regions. Discrete compute geometry 5, pp 263-288 (1990).
- [BlSa 86] A. Blass, B.E. Sagan. Bijective proofs of two broken circuits theorems. J. Graph Theory, 10, 15-21 (1986).
- [BrOx 92] T. Brylawski, J. Oxley. The Tutte polynomial an its applications. Matroid applications ([W3]). Cambridge University Press (1992).
- [BrZi 93] T. Brylawski, G. Ziegler. Topological representations of dual pairs of oriented matroids. Disc. Comp. Geometry, 10, 237-240 (1993).
- [Ca 80] P. Cartier. Les arrangements d'hyperplans: un chapitre de géométrie combinatoire. Séminaire Bourbaki, Vol. 1980/81, pp. 1-22, Lecture Notes in Math., 901, Springer, Berlin-New York (1981).
- [CoFuGO 00] R. Cordovil, A. Guedes de Oliveira, K. Fukuda. On the cocircuit graph of an oriented matroid. Disc. Comp. Geom. 24, 257-265 (2000).
- [CoLB 01] R. Cori, I. Le Borgne. Sandpile model and Tutte polynomial. Proceedings of FPSAC01. Advance in Applied mathematics, to appear.
- [Cr 67] H.H. Crapo. A higher invariant for matroids. J. Combinatorial Theory 2, 406-417 (1967).
- [Da 81] J.E. Dawson. A construction for a family of sets and its application to matroids. Comb. Math. VIII (Gelong, 1980), pp. 136-147, Lect Notes in Math. 884, Springer (1981).
- [EtLV 98] G. Etienne, M. Las Vergnas. External and internal elements of a matroid basis. Discrete Math., 179 : 111-119 (1998).
- [FrMeRo 95] H. de Fraysseix, P. Ossona de Mendez, and P. Rosenstiehl. Bipolar orientations revisited. Discrete Applied Mathematics, 56 : 157-179 (1995).
- [GeSa 00] D.D. Gebhard, B.E. Sagan, Sinks in acyclic orientations of graphs, J. Combinatorial Theory Ser. B 80 (2000), 130-146.
- [GiLV1] E. Gioan, M. Las Vergnas. Activity preserving bijections between spanning trees and orientations in graphs. Proceedings of FPSAC Melbourne 2002. Discrete Math. édition spéciale, soumis.

- [GiLV2] E. Gioan, M. Las Vergnas. Bases, reorientations, and linear programming, in uniform and rank 3 oriented matroids. Proceedings of the Workshop on Tutte polynomials (Barcelona 2001), Advances in Applied Mathematics. Soumis.
- [GiLV3] E. Gioan, M. Las Vergnas. A natural correspondence between bases and reorientations in oriented matroids. Série d'articles, en préparation.
- [GoTr 90] G. Gordon, L. Traldi. Generalized activities and the Tutte polynomial. Disc. Math. 85, 167-176 (1990).
- [Gr 76] C. Greene. Weight enumeration and the geometry of linear codes. Stud. Appl. Math. 55, 119-228 (1976).
- [GrZa 83] C. Greene, T. Zaslavsky. On the interpretation of Whitney numbers through arrangements of hyperplanes, zonotopes, non-Radon partitions and orientations of graphs. Trans. Amer. Math. Soc., 280 : 97-126 (1983).
- [JaVeWe 90] F. Jaeger, D.L. Vertigan, D.J.A. Welsh. On the computational complexity of the Jones and Tutte polynomials. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 108, 35-53 (1990).
- [KoReSt 99] Kook, Reiner, Stanton. Combinatorial laplacians of matroid complexes. Journal of the Amer. Math. Soc., vol. 13-1, pages 129-148 (1999).
- [Le 98] J.W. Leo. On coefficients of the Tutte polynomial. Disc. Math. 184, 121-135 (1998).
- [LV 75] M. Las Vergnas. Matroïdes orientables. C. R. Acad. Sci. Paris sér. A 280, 61-64 (1975).
- [LV 77] M. Las Vergnas. Acyclic and totally cyclic orientations of combinatorial geometries. Disc. Math. 20, 51-61 (1977).
- [LV 80] M. Las Vergnas. Convexity in oriented matroids. J. Comb. Theory ser. B 29, 231-243 (1980).
- [LV 83] M. Las Vergnas. A correspondence between spanning trees and orientations in graphs. Graph Theory and Combinatorics (Proc. Cambridge Comb. Conf. 1983), Academic Press London, 233-238 (1984).
- [LV 84] M. Las Vergnas. The Tutte polynomial of a morphism of matroids ; II Activities of orientations. Progress in Graph Theory (Proc. Waterloo Silver Jubilee Conf. 1982), Academic Press Toronto, 367-380 (1984).
- [LV 92] M. Las Vergnas. On the Tutte polynomial of a morphism of matroids. Annals of Discrete Mathematics 8, pp 7-20 (1992).
- [LV 00] M. Las Vergnas. Active orders for matroid bases. Preprint (2000).
- [Mi 66] G.J. Minty. On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network-programming. J. Math. and Mechanics, 15, 485-520 (1966).
- [Ox 92] J. Oxley. Matroid theory. Oxford University Press (1992).

- [OM] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, G. Ziegler. Oriented matroids. Encyclopedia of Mathematics and its Application, Volume 46. Cambridge University Press (1993).
- [So 01] A.D. Sokal. Bounds on the complex zeros of (di)chromatic polynomials and Potts-model partition functions. *Combinatorics, Probability and Computing*, 10, 41-77 (2001).
- [St 73] R. P. Stanley (1973). Acyclic orientations of graphs. *Discrete Math.*, 5 : 171-178 (1973).
- [Th 87] M.B. Thistlewaite. A spanning tree expansion of the Jones polynomial. *Topology* 26, 297-309 (1987).
- [Tu 54] W.T. Tutte, A contribution to the theory of chromatic polynomials, *Canadian J. Mathematics* 6 (1954), 80-91.
- [Tu 01] W. T. Tutte. Conférence d'ouverture du Workshop on Tutte polynomials, Barcelona (2001).
- [Vie 86] X.G. Viennot. Heaps of pieces, I : Basic definitions and combinatorial lemmas. *Combinatoire énumérative, Proc. Colloq., Montréal Can., Lect. Notes in Math.* 1234, 321-350 (1986).
- [Vin 00] A. Vince. The greedy algorithm and Coxeter matroids. *Journal of Alg. Comb.* 11, 155-178 (2000).
- [We 93] D.J.A Welsh. Complexity : knots, colourings and counting. London Math. Soc. Lect. Notes Series 189. Cambridge University Press (1993).
- [W1] N. White ed. Theory of matroids. Cambridge University Press (1986).
- [W2] N. White ed. Combinatorial Geometries. Cambridge University Press (1987).
- [W3] N. White ed. Matroid Applications. Cambridge University Press (1992).
- [Za 75] T. Zaslavsky. Facing up to arrangements : face count formulas for partitions of space by hyperplanes. *Memoirs Amer. Math. Soc.* 1, n154 (1975).

## Index des définitions

activité externe d'une base .....	p. xxv
activité interne d'une base .....	p. xxv
activité (primale) d'un matroïde orienté .....	p. xxx
activité duale d'un matroïde orienté .....	p. xxx
adjacent à, touche .....	p. xxxiv
algorithme glouton .....	p. xxviii
arbre croissant depuis un sommet .....	p. 122
base interne, externe .....	p. xxv
base maximale .....	p. xxix
base minimale .....	p. xxviii
circuit brisé .....	p. 81
circuit fondamental .....	p. xxiii
cocircuit fondamental .....	p. xxiii
classe d'activités de réorientations .....	p. 38
fermé cyclique .....	p. 14
graphe actif des cocircuits d'un matroïde orienté ordonné .....	p. 102
graphe fondamental .....	p. xxiii
invariant beta .....	p. xxvii
matroïde ordonné .....	p. xxiv
fonction attractive pour les activités $(1, 0)$ .....	p. 58
fonction attractive des matroïdes orientés ordonné .....	p. 65
correspondance active canonique d'un matroïde orienté ordonné .....	p. 65
partition active .....	p. 14
partition active associée à une base .....	p. 27
partition active associée à une réorientation .....	p. 37
polynôme chromatique d'un graphe .....	p. 123
polynôme de Tutte .....	p. xxvi
programme de matroïde orienté .....	p. 97
réorientation .....	p. xxxi
suite décomposante .....	p. 14
suite décomposante associée à une base .....	p. 27
suite décomposante associée à une réorientation .....	p. 37
tableau fondamental d'une base .....	p. 94

## Lexique des notations

$A\mathcal{P}$ : ensemble des $\min(A)$ , $A \in \mathcal{P}$ pour $\mathcal{P} \in 2^E$ .....	p. xxii
$\sigma_A(e)$ : signe de $e$ dans la partie signée $A$ .....	p. xxii
$\mathcal{B}_M$ : ensemble des bases de $M$ .....	p. xxii
$r_M$ : fonction rang de $M$ .....	p. xxii
$cl_M$ : fermeture dans $M$ .....	p. xxii
$C_M(B; e)$ : circuit fondamental de $e$ relativement à $B$ dans $M$ .....	p. xxiii
$C_M^*(B; b)$ : cocircuit fondamental de $b$ relativement à $B$ dans $M$ .....	p. xxiii
$\mathcal{G}_M(B)$ : graphe fondamental de la base $B$ de $M$ .....	p. xxiii
$\iota_M(B)$ : activité interne de $B$ dans $M$ .....	p. xxv
$\varepsilon_M(B)$ : activité externe de $B$ dans $M$ .....	p. xxv
$Int_M(B)$ : éléments intérieurement actifs de $B$ dans $M$ .....	p. xxv
$Ext_M(B)$ : éléments extérieurement actifs de $B$ dans $M$ .....	p. xxv
$t(M; x, y)$ : polynôme de Tutte de $M$ .....	p. xxvi
$b_{i,j}$ : nombre de bases d'activité interne $i$ et externe $j$ .....	p. xxvi
$\beta(M) = b_{0,1} = b_{1,0}$ : invariant beta de $M$ .....	p. xxvii
$B^{min} = f_1 < \dots < f_r$ : base minimale .....	p. xxviii
$B^{max}$ : base maximale .....	p. xxix
$\mathcal{O}(M)$ : ensemble des circuits positifs de $M$ .....	p. xxx
$\mathcal{O}_\omega(M)$ : ensemble des circuits positifs de $M$ contenant $\omega$ .....	p. xxx
$\mathcal{O}^*(M)$ : ensemble des cocircuits positifs de $M$ .....	p. xxx
$\mathcal{O}_\omega^*(M)$ : ensemble des cocircuits positifs de $M$ contenant $\omega$ .....	p. xxx
$o(M)$ : activité (primale) du matroïde orienté $M$ .....	p. xxx
$o^*(M)$ : activité duale du matroïde orienté $M$ .....	p. xxx
$-_A$ : réorientation selon $A$ .....	p. xxxi
$o_{i,j}$ : nombre de réorientations d'activité duale $i$ et d'activité $j$ .....	p. xxxii
$U_{1,1}$ : matroïde réduit à un isthme .....	p. 8
$\emptyset = F_\varepsilon^* \subset \dots \subset F_0^* = F_c = F_0 \subset \dots \subset F_l = E$ : suite décomposante .....	p. 14
$\hat{A}_G$ : opération pour décomposer les activités dans le graphe fondamental $G$ .	p. 18
$\alpha_M(B; e)$ : min. de la partie de $e$ dans la partition active de $B$ dans $M$ .....	p. 27
$\alpha(M; e)$ : min. de la partie de $e$ dans la partition active de $M$ .....	p. 37
$Basori_M^{(1,0)}$ : bijection active pour les activités $(1, 0)$ .....	p. 49
$Oribas^{(1,0)}$ : fonction attractive pour les activités $(1, 0)$ .....	p. 58
$Oribas$ : fonction attractive des matroïdes orientés ordonnés .....	p. 65
$Oribas_M$ : correspondance active canonique de $M$ .....	p. 65
$\mathcal{NBC}$ : complexe sans circuit brisé (parties des bases internes) .....	p. 81
$\mathcal{T}_M(B)$ : tableau fondamental de la base $B$ dans $M$ .....	p. 94
$(M, g, f)$ : programme de matroïde orienté .....	p. 97
$G_M$ : graphe actif des cocircuits du matroïde orienté ordonné $M$ .....	p. 102
$\chi(G; q)$ : polynôme chromatique du graphe $G$ .....	p. 123



## Liste des figures

Figure $K_4$ graphique .....	p. xx
Figure $K_4$ géométrique .....	p. xx
Figure $K_4$ matroïde orienté .....	p. xxi
Figure 0.1 : base 256 de $K_4$ .....	p. xxiv
Figure 0.2 : tableau des activités des bases de $K_4$ .....	p. xxvi
Figure 0.3 : deux orientations de $K_4$ .....	p. xxxi
Figure 0.4 : activités duales des régions de $K_4$ .....	p. xxxiv
Figure 1.1 : exemple pour la proposition 1.1 .....	p. 4
Figure 1.2 : correspondances obligées pour $K_4 \setminus 6$ et $K_4/6$ .....	p. 10
Figure 1.3 : deux correspondances satisfaisant le critère 1.6 pour $K_4$ .....	p. 11
Figure 2.1 : tableau de décomposition des bases de $K_4$ .....	p. 17
Figure 2.2 : décomposition du graphe fondamental de bases de $K_4$ .....	p. 28
Figure 2.3 : première décomposition des réorientations de $K_4$ .....	p. 33
Figure 2.4 : tableau des classes d'activités des réorientations de $K_4$ .....	p. 40
Figure 2.5 : partitions actives des régions de $K_4$ .....	p. 41
Figure 2.6 : partitions actives des régions .....	p. 42
Figure 2.7 : exemples de partitions actives de régions en rang 4 .....	p. 38
Figure 2.8 : théorème d'extension illustré sur une base de $K_4$ .....	p. 45
Figure 3.1 : illustration du lemme 3.1 .....	p. 49
Figure 3.2 : algorithme géométrique (i) de 3.2 définissant $Basori_M^{(1,0)}$ .....	p. 52
Figure 3.3 : quelques situations possibles en rang 4 .....	p. 54
Figure 3.4 : figure impossible (lemme des croissants 3.4) .....	p. 56
Figure 3.5 : $Oribas^{(1,0)}$ d'un matroïde orienté de rang 2 .....	p. 58
Figure 3.6 : la bijection $Oribas^{(1,0)}$ .....	p. 58
Figure 4.1 : correspondance active $Oribas_M$ pour les régions de $K_4$ .....	p. 67
Figure 4.3 : illustration pour la définition inductive .....	p. 76
Figure 4.4 : un exemple de rang 4 pour $Oribas$ .....	p. 76
Figure 4.5 : un exemple de rang 4 pour $Oribas2$ .....	p. 85
Figure 5.1 : premier exemple de programme de matroïde orienté .....	p. 98
Figure 5.2 : second exemple de programme de matroïde orienté .....	p. 100
Figure 5.3 : illustration pour le théorème 5.2.3 .....	p. 105
Figure 5.4 : première extension (multiprogrammation) .....	p. 106
Figure 5.5 : seconde extension (programmation en drapeaux) .....	p. 108
Figure 6.1.1 : chemin dans les régions définissant $Basori^{(1,0)}$ .....	p. 111
Figure 6.1.2 : programmation linéaire combinatoire, cas uniforme .....	p. 114
Figure 6.2.1 : algorithmes duaux définissant $Basori^{(1,0)}$ du graphe $W_4$ .....	p. 120
Figure 6.2.2 : dualité forte dans $W_4$ (propriété 4.4.1) .....	p. 121
Figure 6.2.3 : bijections arbres-classes-‘unique puits’ pour $W_4$ .....	p. 123
Figure 6.2.4 : décomposition d'une orientation de $W_4$ .....	p. 125

Figure 6.3.1 : exemple d'arrangement hyperrésoluble .....	p. 128
Figure 6.3.2 : <i>Oribas2</i> d'un arrangement hyperrésoluble .....	p. 132
Figure 6.3.3 : <i>Oribas</i> d'un arrangement hyperrésoluble .....	p. 132
Figure 6.4.1 : $D_{13}$ .....	p. 136
Figure 6.4.2 : cas <b>(1)</b> pour $D_{13}$ activités $(1, 0)$ .....	p. 137
Figure 6.4.3 : cas <b>(2a) et (2b)</b> pour $D_{13}$ activités $(1, 0)$ .....	p. 137
Figure 6.4.4 : cas <b>(3)</b> pour $D_{13}$ activités $(1, 0)$ .....	p. 137
Figure 6.4.5 : $Oribas^{(1,0)}$ et graphe actif des cocircuits (partie 5.2) de $D_{13}$ ..	p. 137
Figure 6.4.6 : <i>Oribas</i> pour $D_{13}$ .....	p. 140
Figure 6.4.7 : bijection active entre $\mathcal{NBC}$ et régions (partie 4.3) de $D_{13}$ .....	p. 141
$K_4$ géométrique, ses covecteurs et ses vecteurs .....	Annexe 2

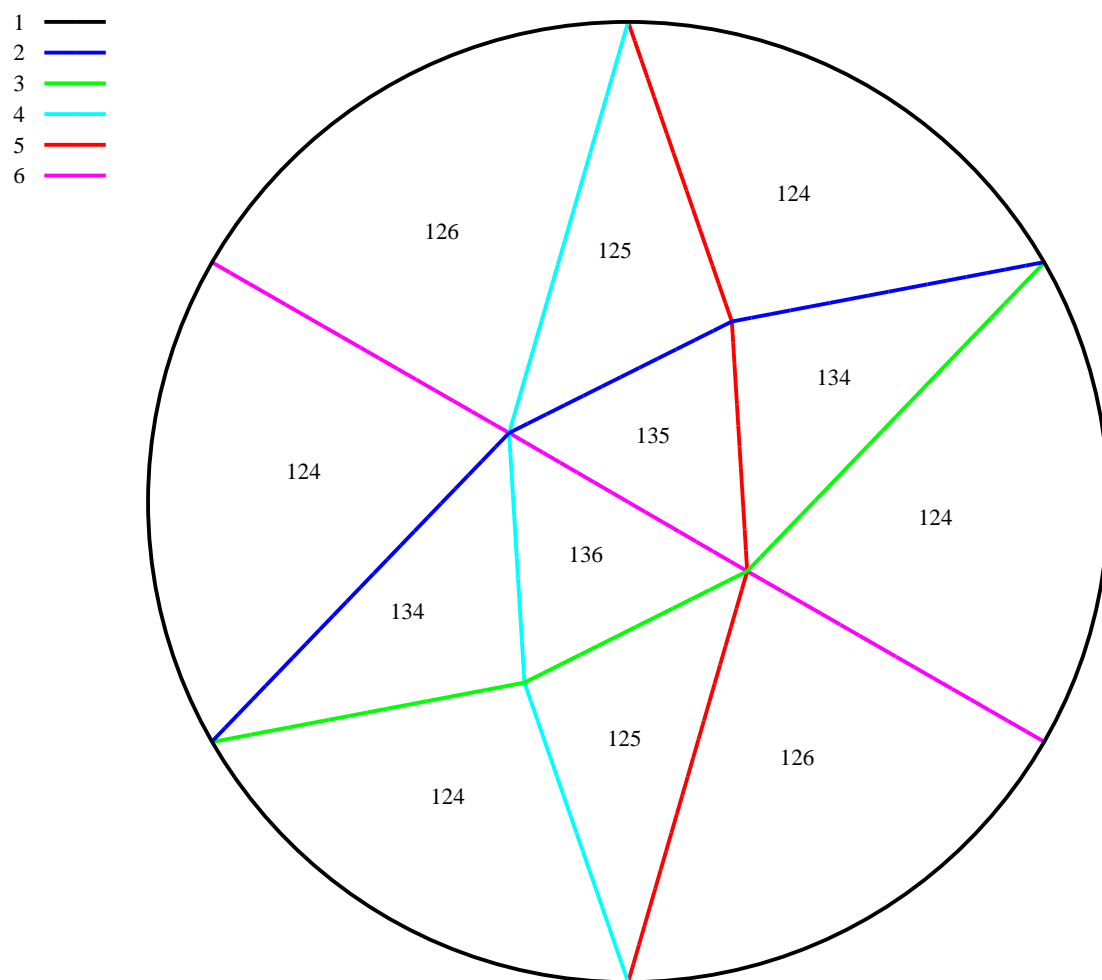
# ANNEXE 1

## Quelques exemples de rang 3.

L'ordre des pseudodroites est  $1 < 2 < \dots < 9 < A < B < \dots$

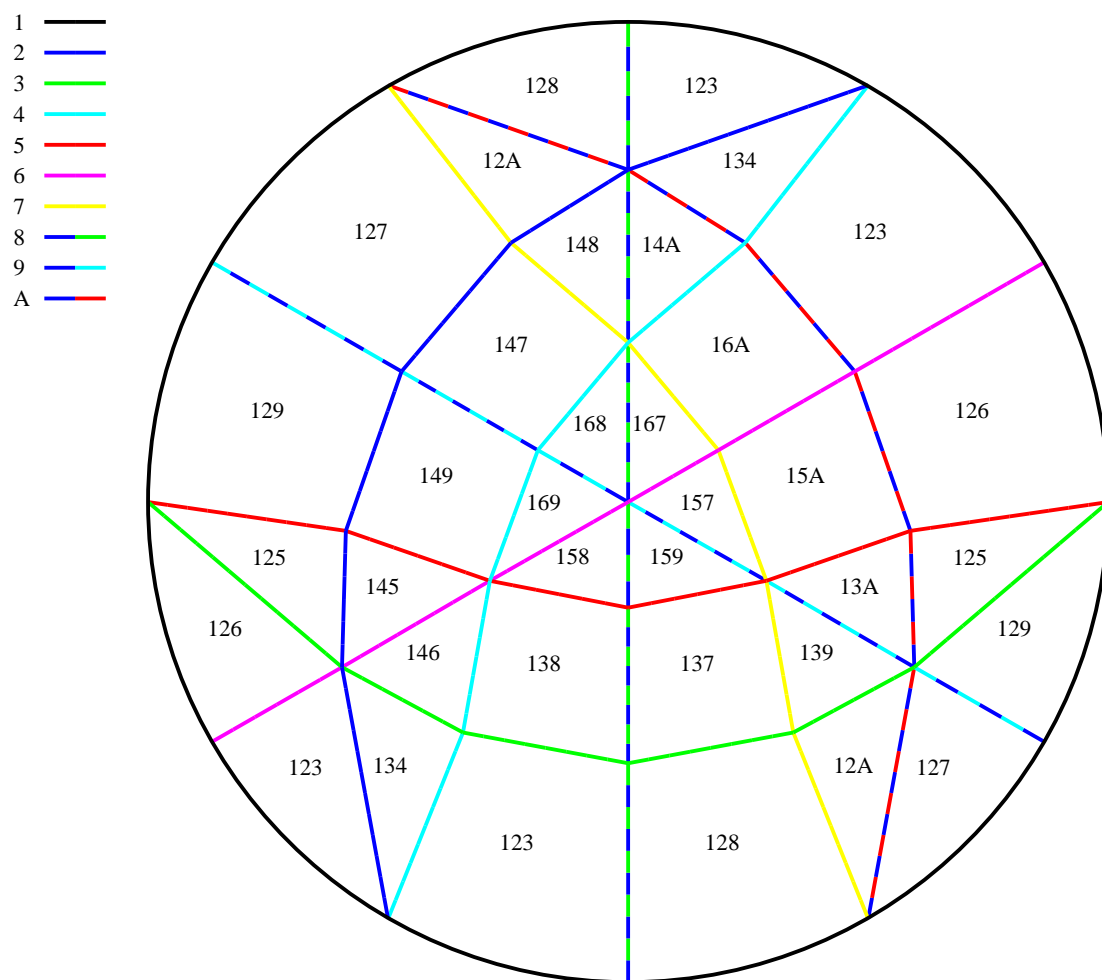
Pour information, on a indiqué sous les figures leur situation dans le paysage des matroïdes orientés, complètement indépendamment de la construction de la correspondance active canonique.





Cet exemple est le graphe  $K_4$  pour l'ordre colexicographique.

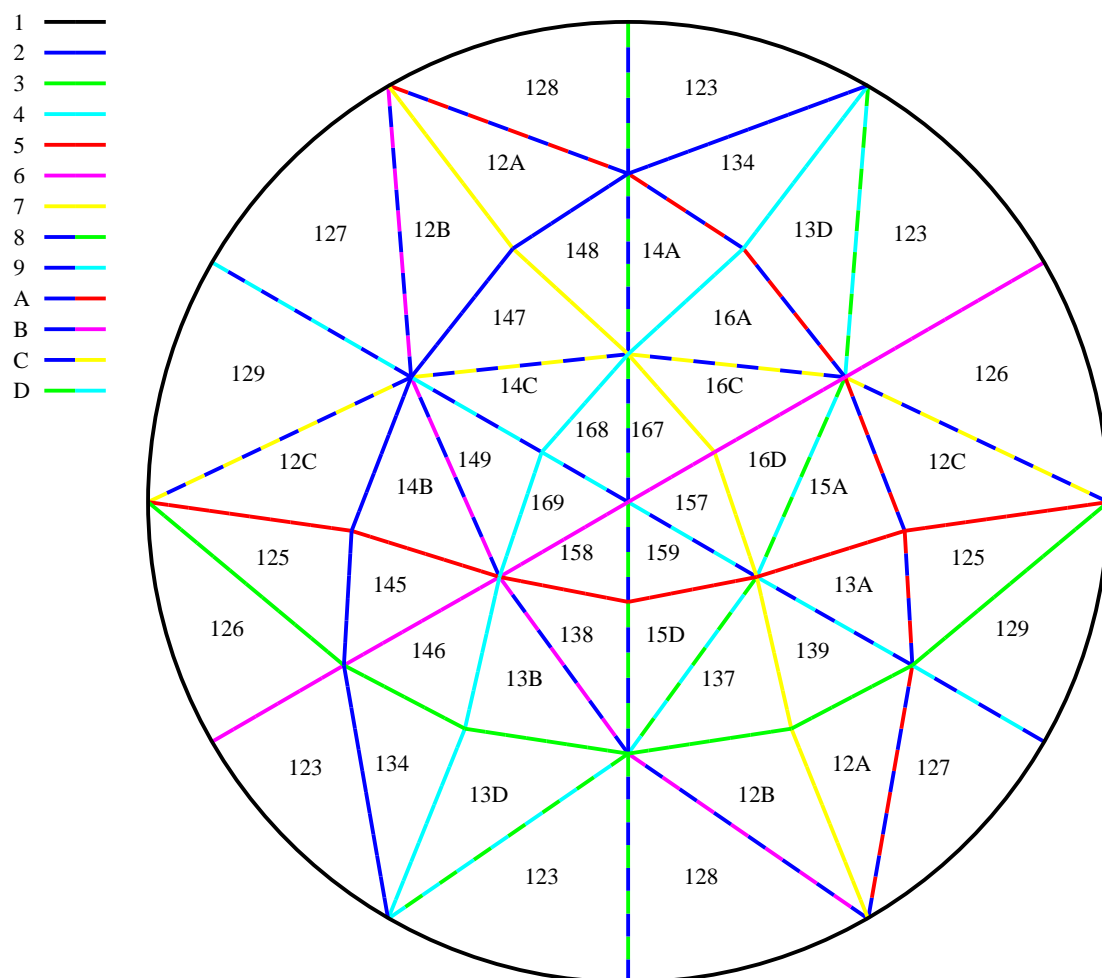




Cet exemple est l'arrangement correspondant à la configuration de Desargues.

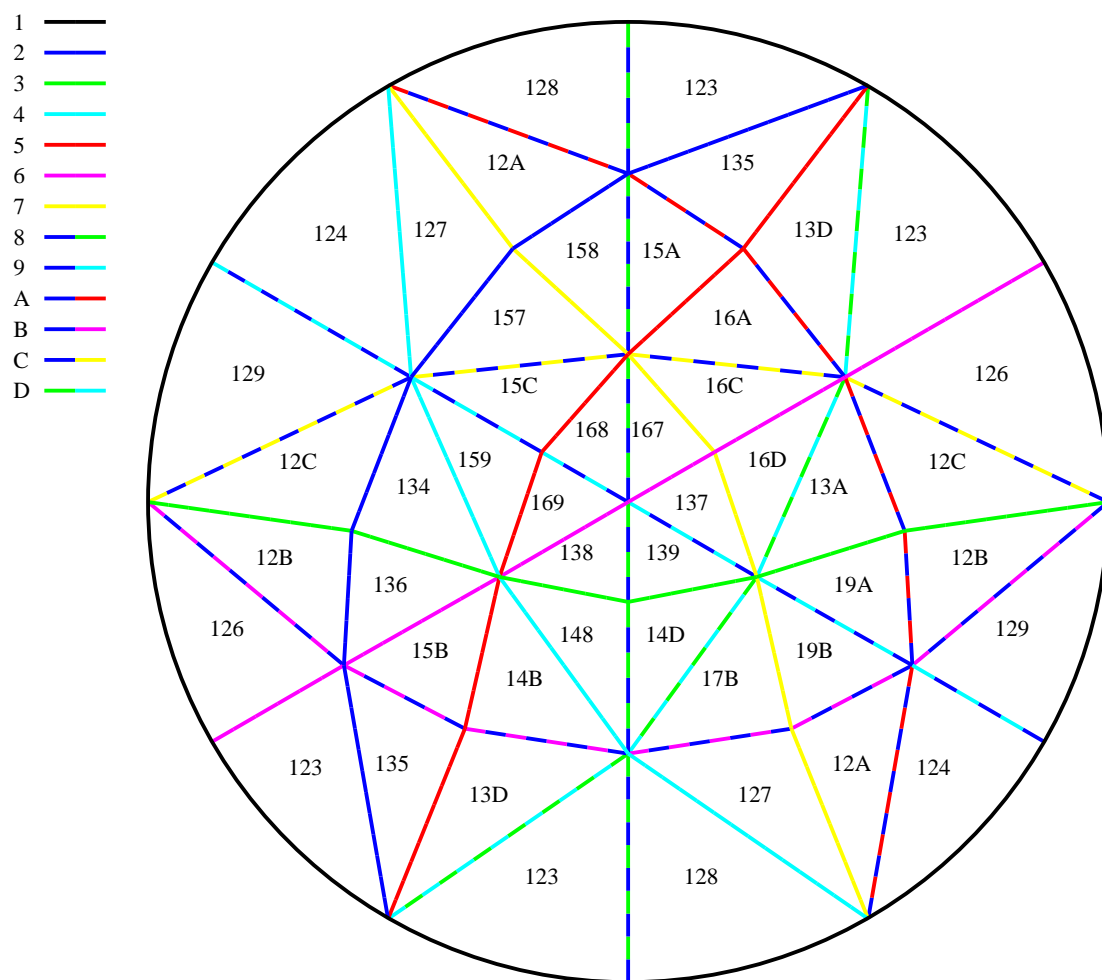






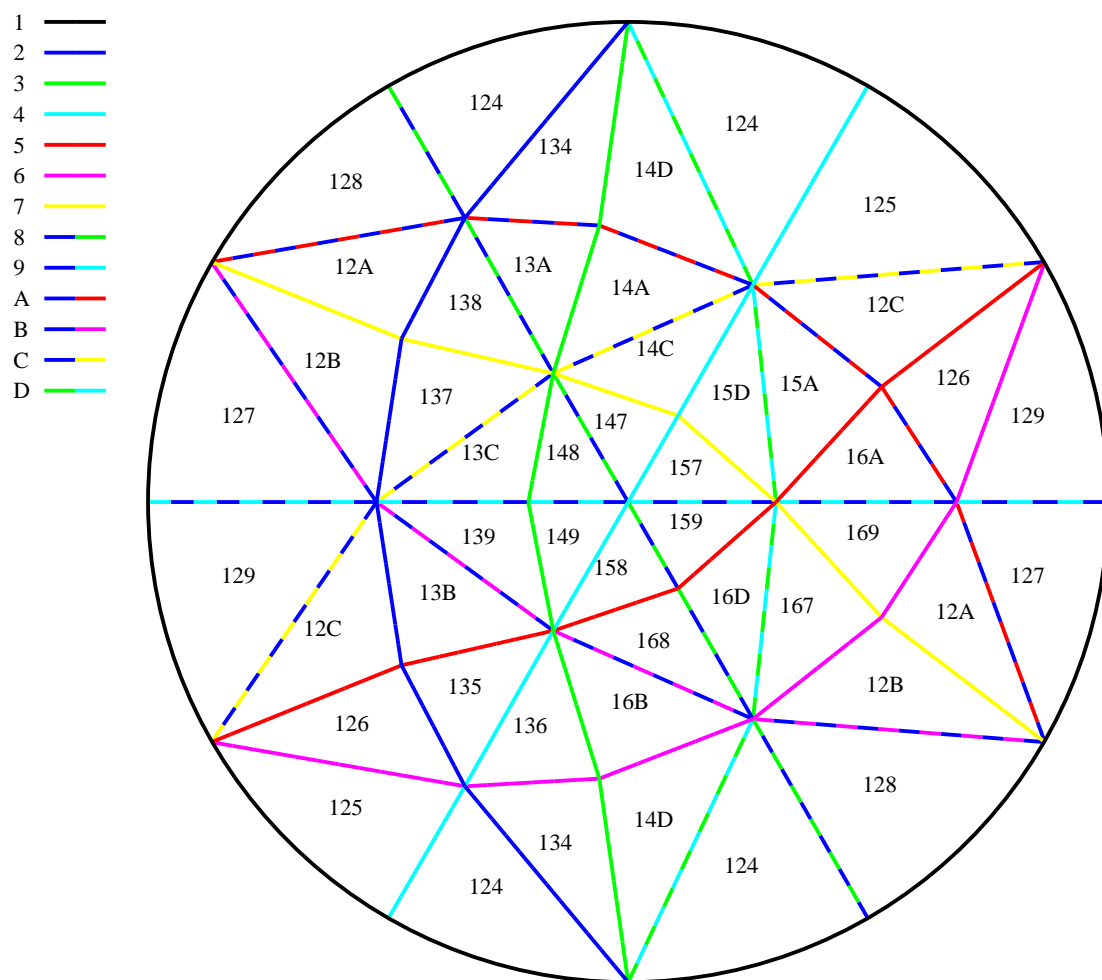
Cet exemple est l'arrangement  $D13$ , obtenu en ajoutant les 3 éléments  $B$ ,  $C$ ,  $D$  à la configuration de Desargues (second jeu de la Récréation, détaillé dans le chapitre 6 partie 4).





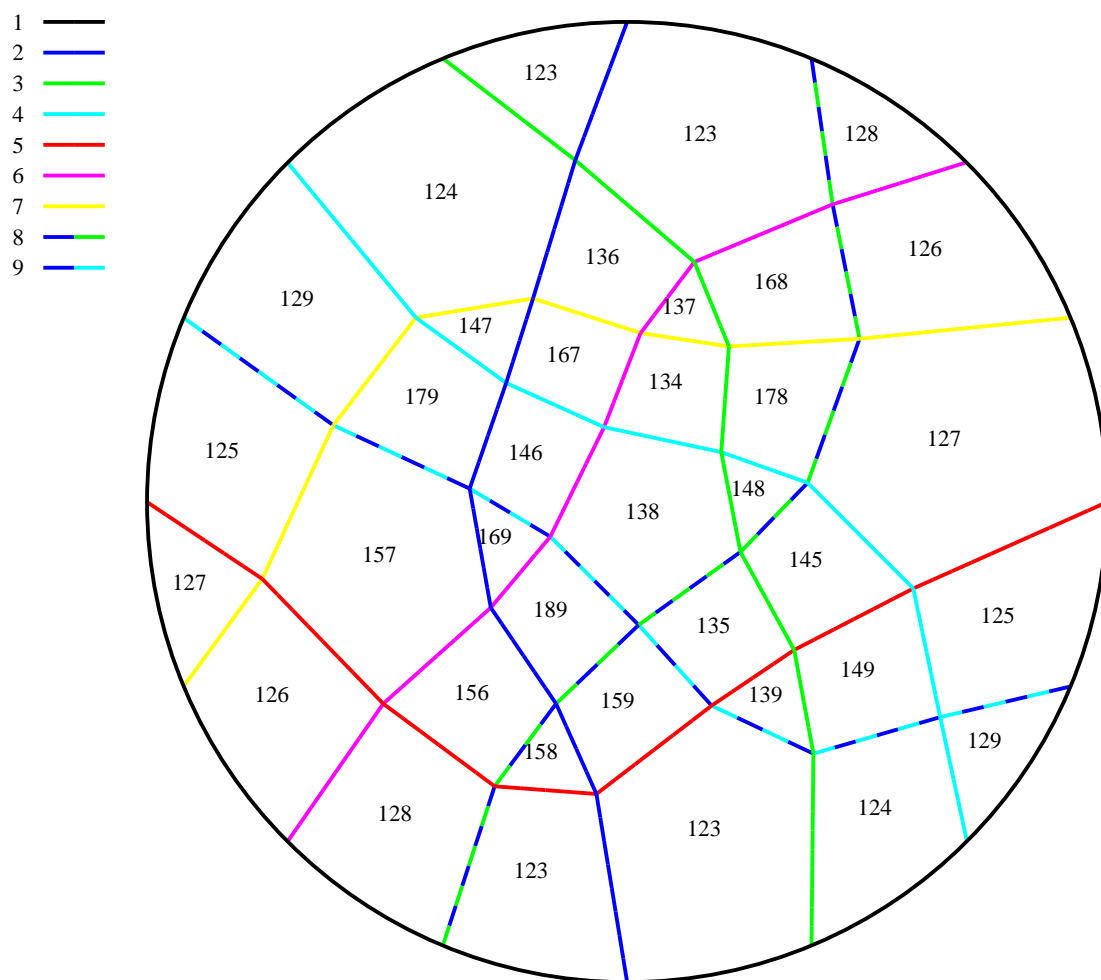
Cet exemple est le même arrangement  $D_{13}$  pour un autre ordre.





Cet exemple est encore l'arrangement  $D_{13}$  pour un nouvel ordre.

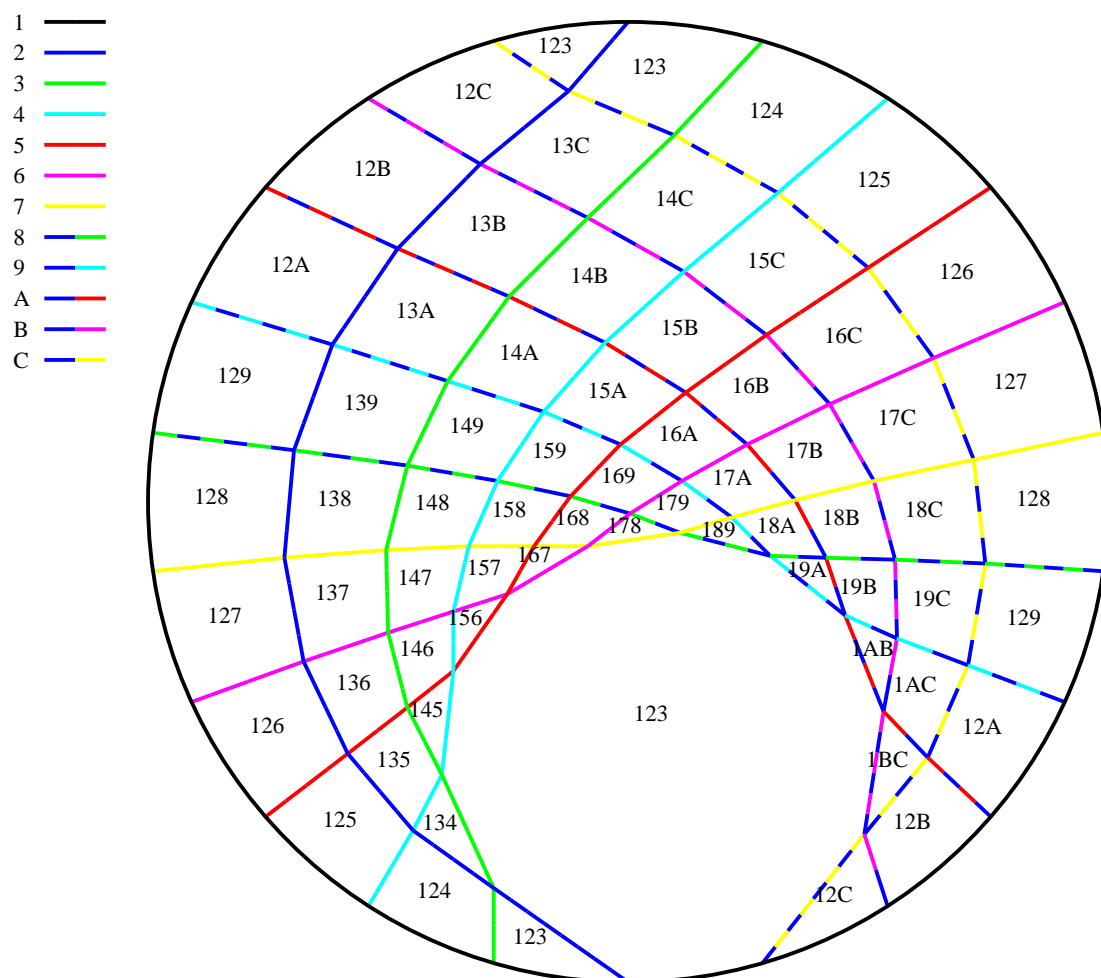




Cet exemple est l'arrangement non-réalisable de Ringel, construit en 'uniformisant' l'arrangement non-réalisable non-Pappus (Figure 6.1.2, et premier jeu de la Récréation).

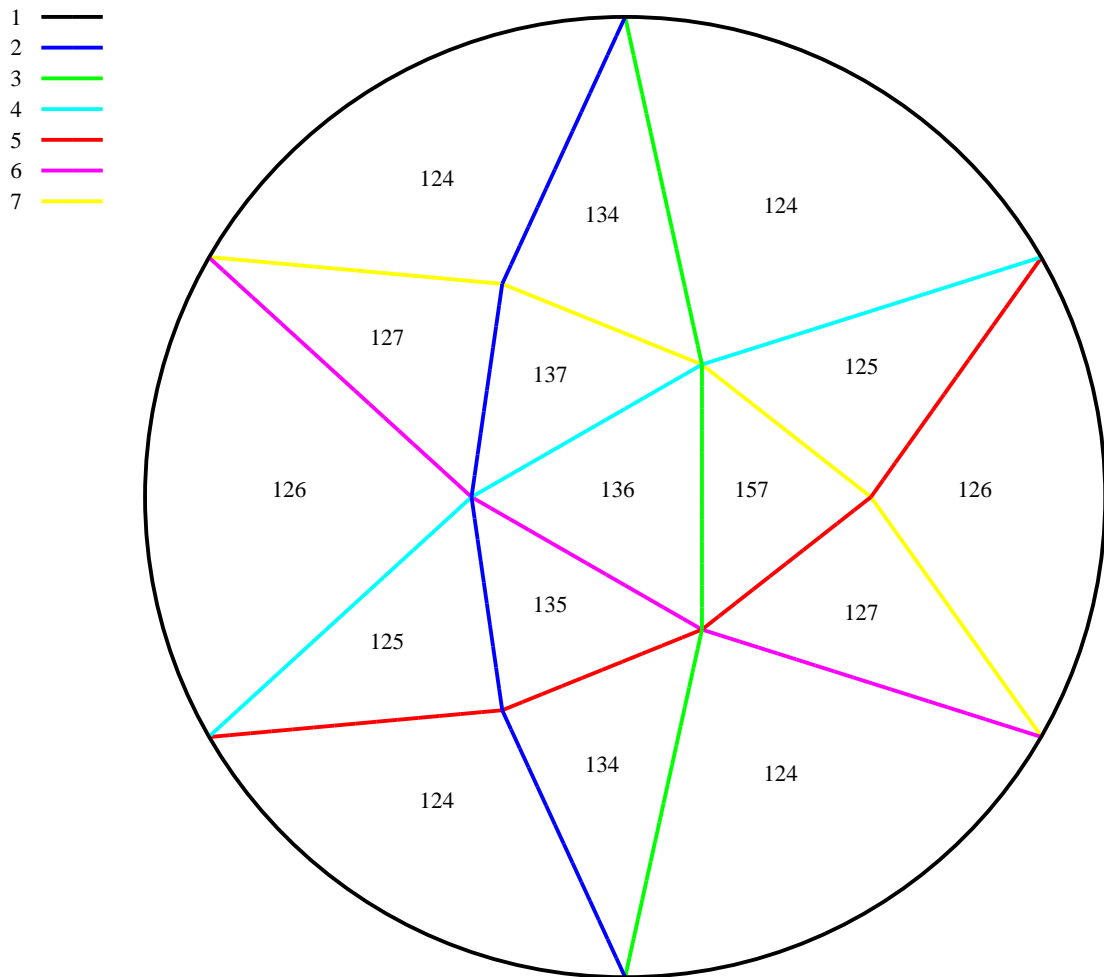






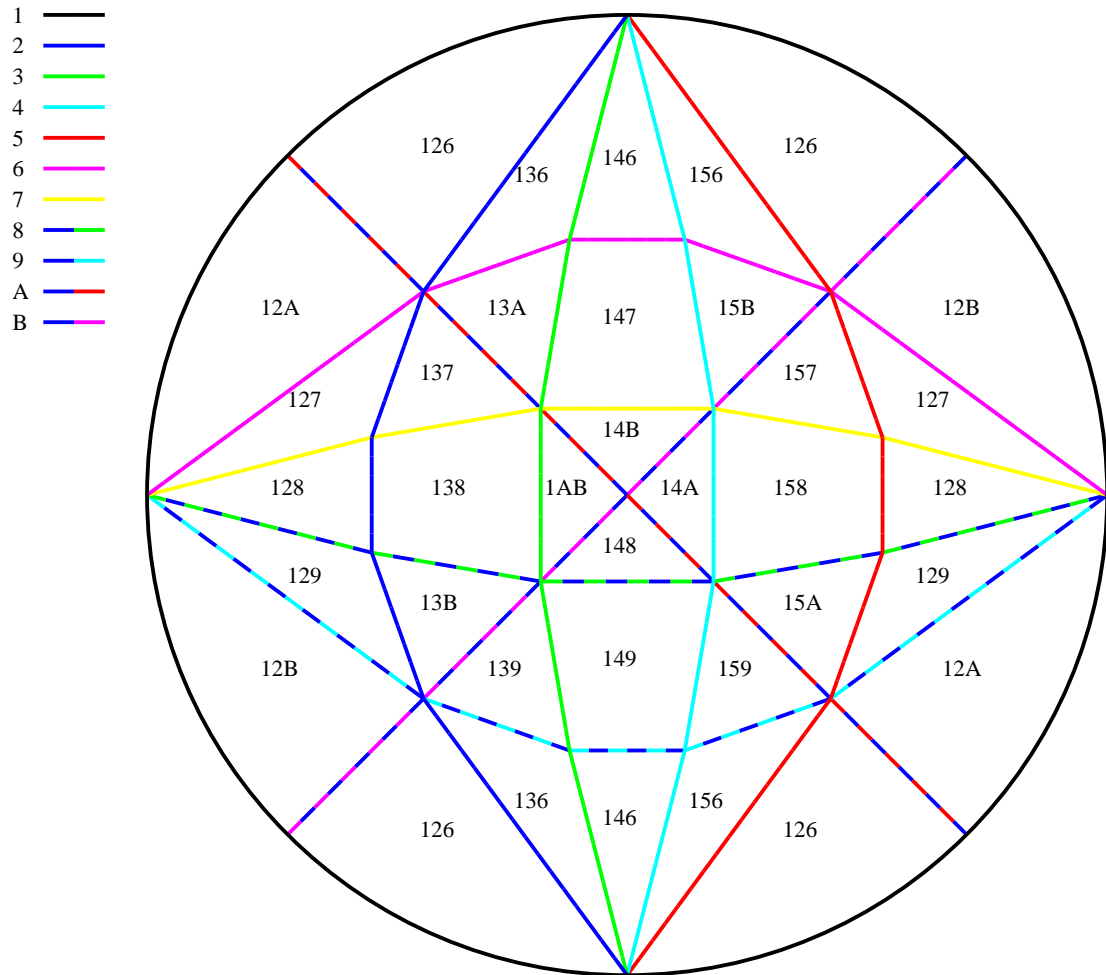
Cet exemple est l'arrangement alterné à 12 éléments.





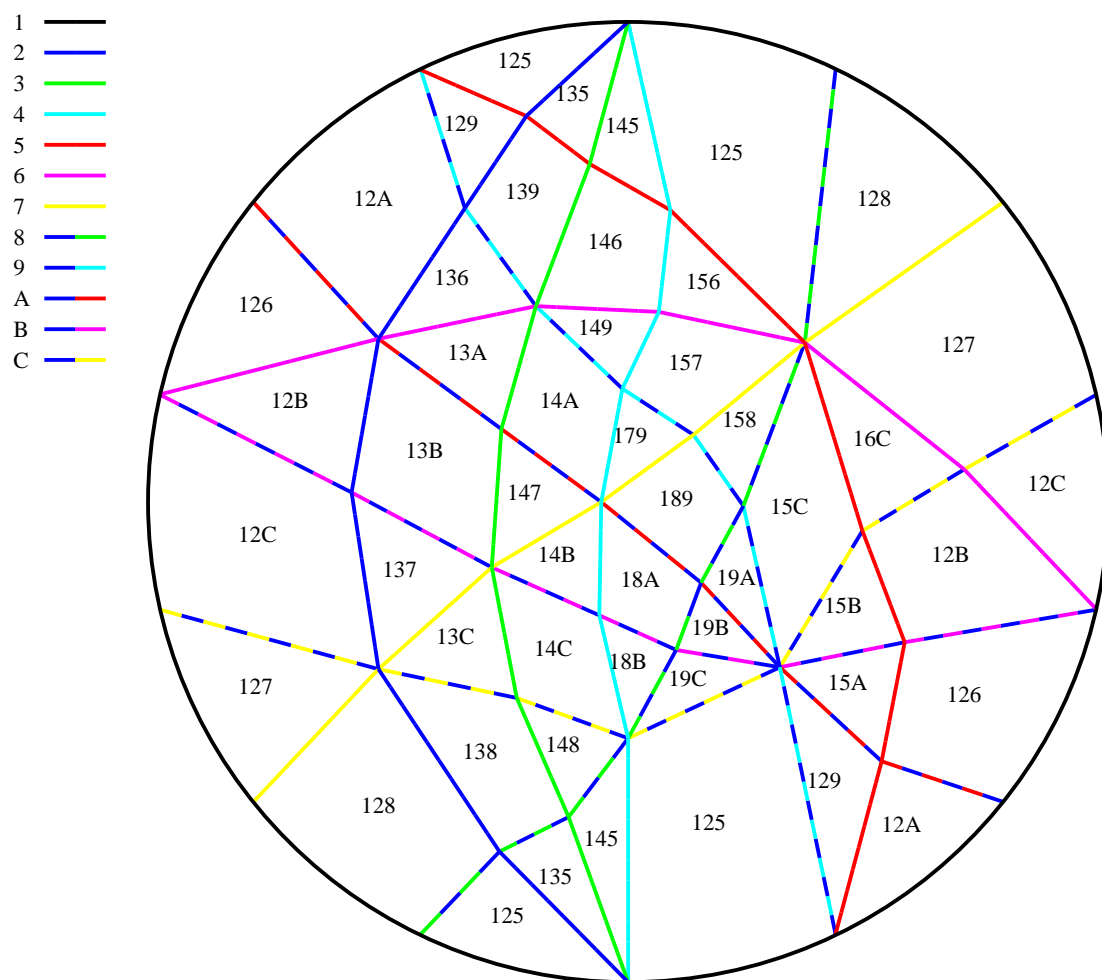
Cet exemple serait le matroïde non-orientable de Fano si on lui ajoutait 257 comme circuit.





Cet exemple deviendrait hyperrésoluble si on lui ajoutait simplement une pseudo-droite passant par l'intersection de  $A$  et  $B$ , et par l'intersection de 1, 2, 3, 4, et 5.

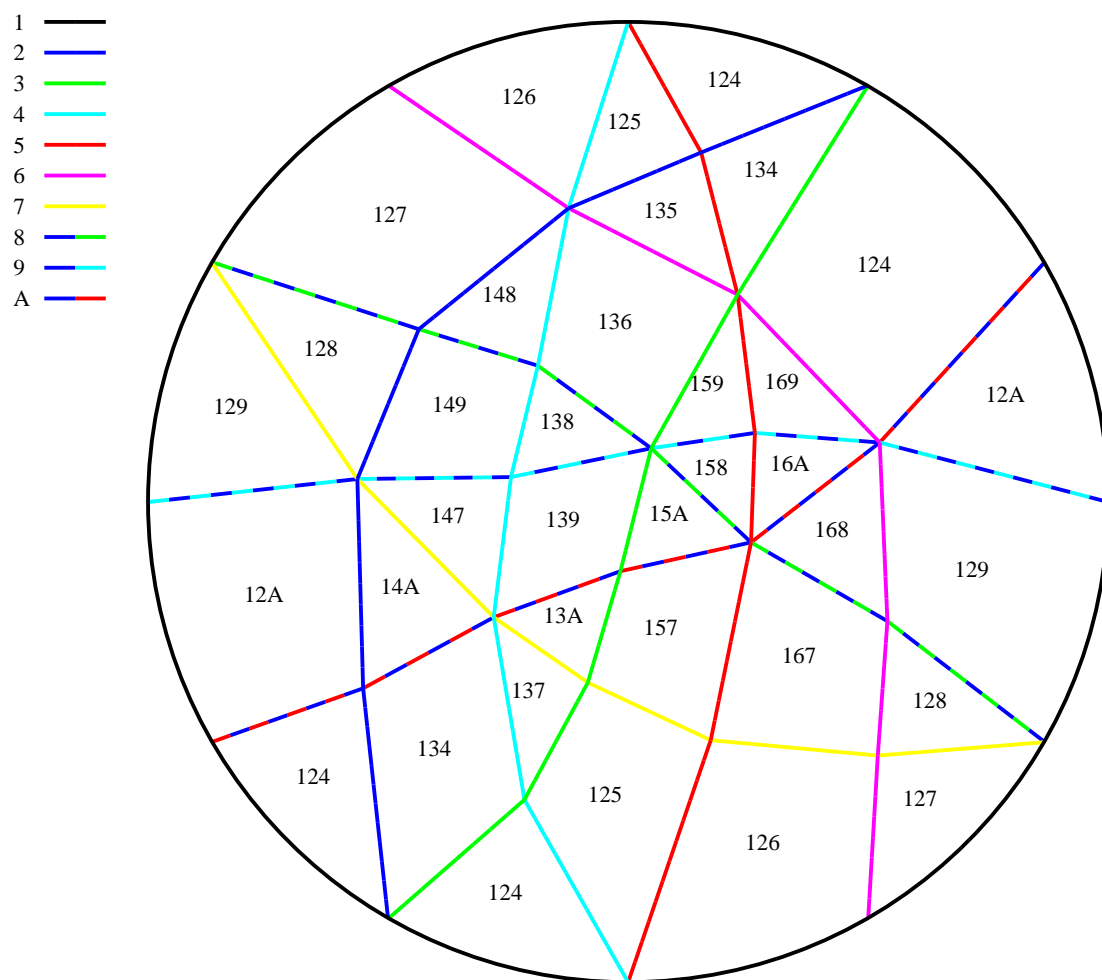




Cet exemple est l'arrangement correspondant à une configuration de points définie par la grille  $4 \times 3$ .

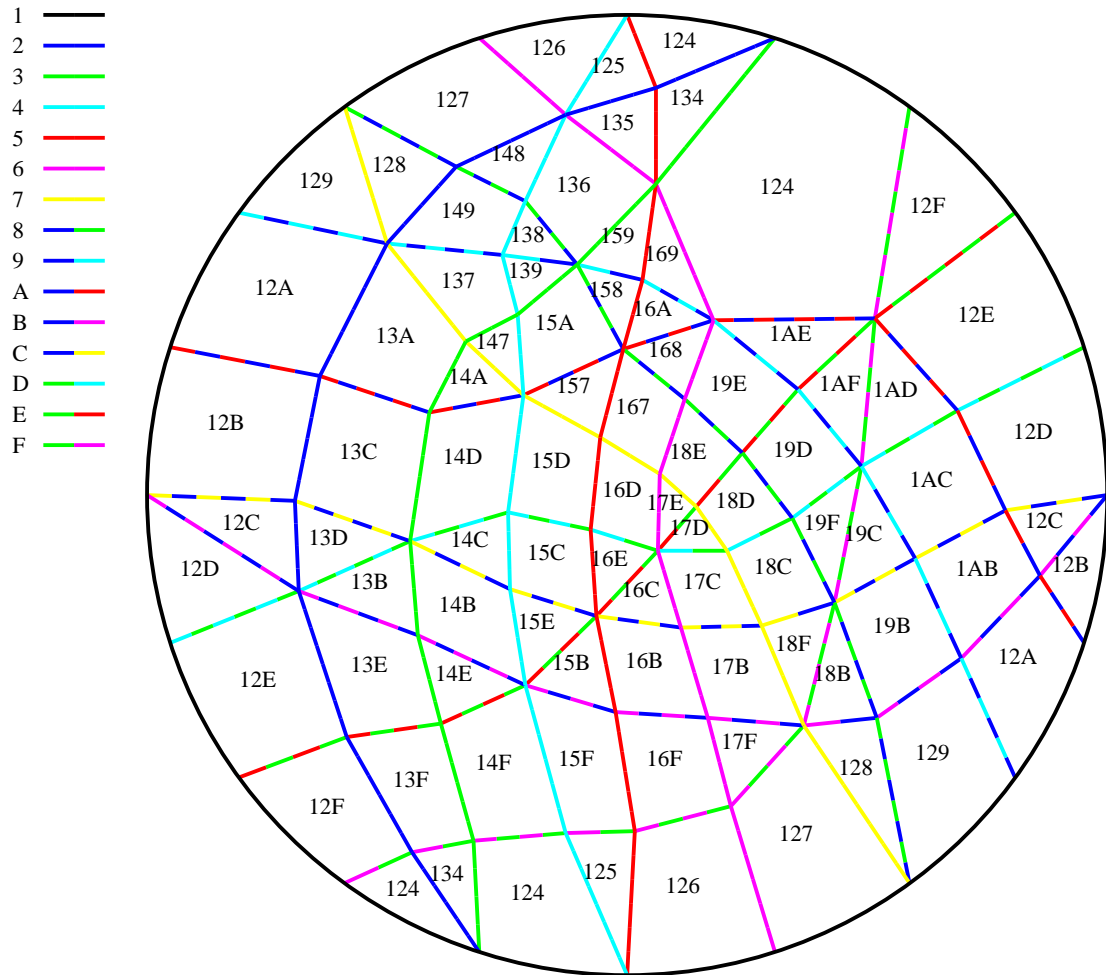






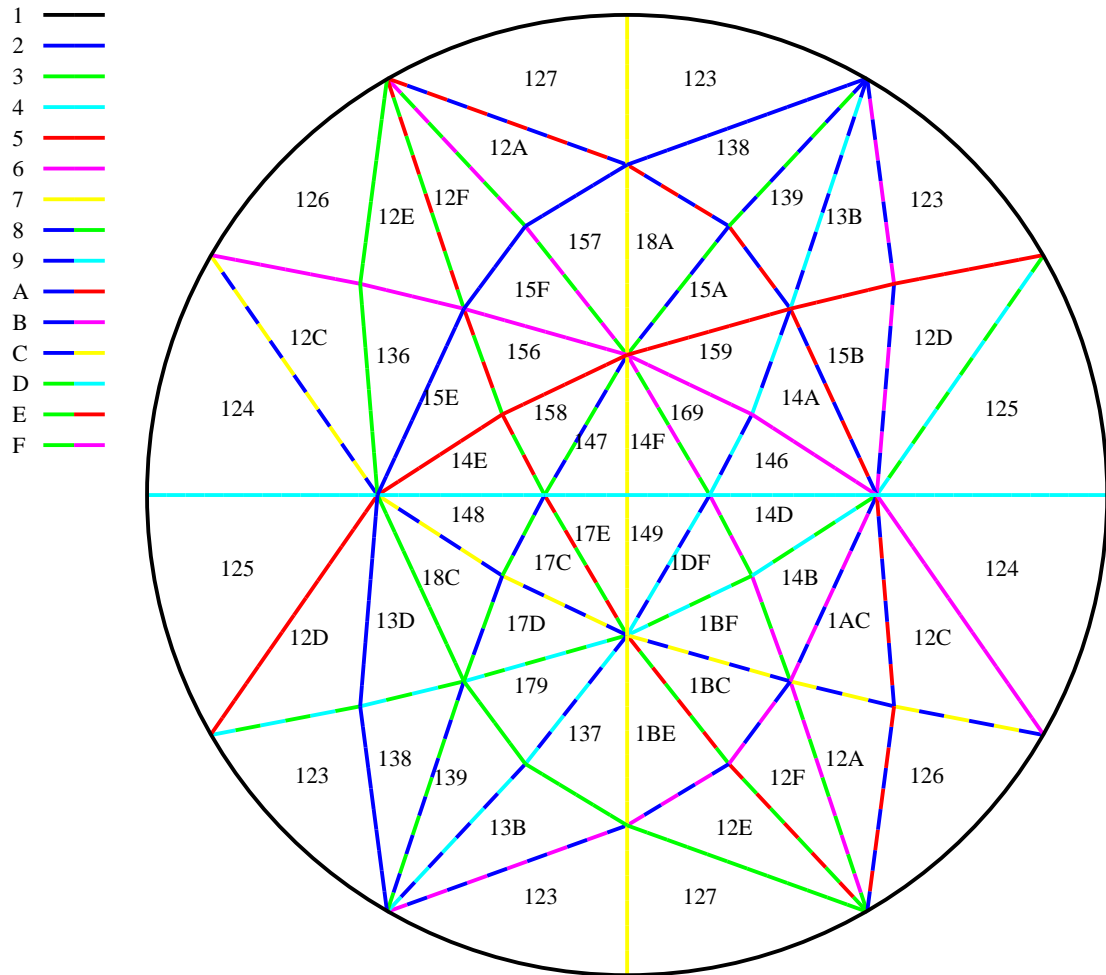
Cet exemple est une troncature de rang 3 de  $K_5$ .





Cet exemple est une troncature de rang 3 de  $K_6$ .





Cet exemple est le groupe de Coxeter  $H_3$ , défini par les 15 plans de symétrie du dodécaèdre et de l'isocaèdre.



# ANNEXE 2

## Petit récapitulatif sur les matroïdes et matroïdes orientés.

Cette annexe présente les résultats qui sont supposés connus au cours de cette thèse. C'est une introduction aux matroïdes et aux matroïdes orientés, ne reposant que sur des notions de base de théorie des graphes, d'algèbre linéaire et de topologie. Les objets y sont illustrés à la fois géométriquement et dans le cas des graphes, en prélude à l'interprétation dans ces deux cadres des résultats et démonstrations de la thèse, qui eux sont écrits dans le formalisme des matroïdes orientés.

1 Introduction.....	A3
Graphes .....	A5
Arrangements de pseudodroites .....	A6
2 Matroïdes .....	A8
3 Matroïdes orientés : définition combinatoire .....	A12
4 Matroïdes orientés : définition topologique .....	A14
5 Constructions dans les matroïdes orientés .....	A21
6 Programmation linéaire dans les matroïdes orientés .....	A23
7 Compléments .....	A26





## 1. Introduction

La théorie des matroïdes orientés est née dans les années 1970. Les matroïdes orientés sont des objets à la fois combinatoires, géométriques et algébriques. Leur structure peut-être considérée comme une abstraction combinatoire des positions relatives dans les configurations de points ou d'hyperplans des espaces réels, ou bien des directions dans les cycles et cocycles d'un graphe orienté. La vingtaine d'axiomatics issues de directions diverses qui existent aujourd'hui, ainsi qu'une notion omniprésente de dualité, confirment le caractère très naturel de cette structure. Les applications, de plus en plus nombreuses, viennent de domaines très divers (voir l'appendice 'Some current frontiers of research' dans la deuxième édition de [OM]). La sous-section 52C40 de la classification AMS est consacrée entièrement aux matroïdes orientés depuis 2000.

Pour l'historique, en bref, les matroïdes orientés ont été introduits indépendamment et à peu près simultanément d'une part par Las Vergnas à partir de la théorie des graphes en tant que généralisation aux matroïdes de la notion d'orientation, d'autre part par Bland à partir de la programmation linéaire en tant que modèle combinatoire adapté à ce type de problèmes, et enfin par Folkman et Lawrence, qui partant de l'étude des polytopes ont abouti à la représentation topologique des matroïdes orientés par les arrangements de pseudosphères. Ces différentes motivations, toutes restées d'actualité, conduisent à des points de vue complémentaires, qui ont chacun leur importance dans cette thèse. Un livre de référence sur le sujet, 'Oriented Matroids', est paru en 1993, réédité en 1999, coécrit par Björner, Las Vergnas, Sturmfels, White et Ziegler [OM].

Lorsque l'on considère la sphère unité de l'espace réel coupée par des hyperplans en nombre fini, on obtient un complexe cellulaire. On repère les positions relatives des faces en attribuant un signe  $+$  ou  $-$  aux demi-espaces définis par les hyperplans. Les relations d'incidence entre ces hyperplans, la décomposition obtenue, sont des invariants pour les transformations topologiques (continues) de la sphère. Les matroïdes orientés associés à ces arrangements d'hyperplans sont ces classes d'équivalence à transformation topologique près (ce qui en fait un objet intéressant au sens du programme d'Erlangen de Felix Klein 1879). D'un point de vue algébrique, ils sont une axiomatisation combinatoire des propriétés de signes en l'algèbre linéaire, c'est-à-dire une axiomatisation du système de  $+$  et de  $-$  obtenu.

Le fait de considérer le matroïde orienté associé à un arrangement d'hyperplans revient (on s'en doute étant donné l'aspect purement combinatoire) à ne plus tenir compte des 'distances', et c'est pourquoi on obtient naturellement des objets géométriques plus généraux : des arrangements de pseudohyperplans qui n'ont plus besoin d'être 'droits' et qui ont l'avantage de vérifier une axiomatique simple, alors qu'il est actuellement hors de portée, probablement à jamais, de caractériser combinatoirement les arrangements d'hyperplans 'droits'.

Dans l'étude des graphes orientés aussi le formalisme des matroïdes orientés est utile (même si il existe déjà en filigrane dans le langage des graphes). Le point de vue des matroïdes orientés, qui ne s'occupe que des arêtes du graphe et permet toujours la manipulation d'un dual, apporte notamment un éclairage sur des notions de dualité, parfois plus délicates à exprimer en théorie des graphes. De plus il permet

de distinguer ce qui ne dépend que de l'espace des cycles et non des sommets.

Outre leurs applications en théorie des graphes, les matroïdes orientés constituent surtout un outil fondamental de géométrie discrète et algorithmique (convexité, polyèdres, arrangements de pseudodroites...), ayant des applications depuis l'optimisation discrète et la programmation linéaire jusqu'aux graphes de visibilité et la stéréochimie. Il y a aussi d'autres interventions significatives dans des domaines plus lointains : application aux classes de Pontriagin en géométrie différentielle (Gelfand et MacPherson), stratification des grassmanniennes (Gelfand et son école), équivalence birationnelle des espaces de réalisation des matroïdes orientés et des variétés semi-algébriques réelles (théorème de Mnëv)...

Antérieurement, la structure de matroïde (1935) avait été obtenue en retenant les principales propriétés de la dépendance linéaire dans les espaces vectoriels, et en particulier dans l'espace des cycles d'un graphe, mais sans tenir compte des signes. Ils constituent du point de vue géométrique une généralisation des géométries projectives. De nombreux autres exemples naturels peuvent être construits à partir des graphes, des groupes, des corps (dépendance algébrique), des ensembles ordonnés, etc. C'est aussi la structure naturelle pour l'algorithme glouton (recherche d'un ensemble de poids minimal).

Les matroïdes et les matroïdes orientés sont néanmoins des structures distinctes : tout matroïde orienté a un matroïde sous-jacent, mais plusieurs matroïdes orientés peuvent avoir le même matroïde sous-jacent, alors que certains matroïdes non-orientables ne sont le matroïde sous-jacent d'aucun matroïde orienté.

On termine cette introduction par la définition du matroïde orienté associé à un graphe, et à un arrangement de pseudodroites. Ensuite, après avoir défini les matroïdes de façon combinatoire et donné les exemples classiques (partie 2), on définira indépendamment les matroïdes orientés par leur axiomatique combinatoire (partie 3) et par leur représentation topologique (partie 4). La partie 5 donne des constructions et des résultats techniques couramment utilisés. La partie 6 est une introduction à la traduction de la programmation linéaire dans les matroïdes orientés. Enfin, les résultats ou remarques utiles pour rendre ce récapitulatif cohérent, mais dont il ne sera pas question ailleurs, formeront la dernière partie 7 intitulée 'Compléments'.

Les résultats sont donnés sans démonstration. Pour plus de détails, on peut consulter les livres de référence [OM] à propos des matroïdes orientés, et [Ox] (ou [W1], [W2], [W3]) à propos des matroïdes.

*Définition.* Soit  $E$  un ensemble fini. Une *partie signée* de  $E$  est une partie  $\underline{A}$  de  $E$  munie d'une partition en éléments dits positifs et en éléments dits négatifs :  $\underline{A} = A^+ \sqcup A^-$ . La partie  $\underline{A}$  est alors appelée *support* de la partie signée  $A = (A^+, A^-)$ . On se permet souvent d'employer la même notation  $A$  pour la partie signée et son support, et on note traditionnellement les éléments négatifs avec un surlignage ( $\overline{12}$ ).

De manière générale, un *matroïde orienté*  $M$  sur un ensemble fini  $E$  est défini par un ensemble parties signées de  $E$ , qui peut être l'ensemble des *circuits*, des *cocircuits*, des *vecteurs* ou des *covecteurs* de  $M$  (on ne s'occupera jamais ici du signe des *bases*).

• Graphes.

Soit un graphe orienté  $G = (V, E)$ . Dans le matroïde orienté  $M$  défini à partir de  $G$  :

- les circuits ont pour supports les ensembles d'arêtes des cycles élémentaires de  $G$  (cycles minimaux pour l'inclusion),
- le signe d'un élément  $e$  d'un circuit est  $+$  ou  $-$  selon que l'arête  $e$  est orientée ou non dans la direction d'un sens de parcours fixé.

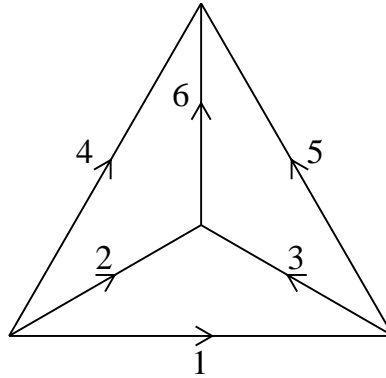
Puisque l'on peut choisir deux sens de parcours opposés, il existe exactement deux circuits opposés ayant le même cycle élémentaire sous-jacent.

De façon similaire :

- les cocircuits ont pour supports les ensembles d'arêtes des cocycles élémentaires de  $G$  (coupes minimales pour l'inclusion, une coupe est l'ensemble des arêtes joignant  $A$  et  $B$  pour une partition  $V = A + B$ , une coupe est minimale si le nombre de composantes connexes augmente exactement de 1 lorsqu'on la supprime),
- le signe d'un élément  $e$  d'un cocircuit est  $+$  ou  $-$  selon que l'arête  $e$  est orientée ou non dans une direction fixée pour le cocycle (une direction pour le cocycle est soit de  $A$  vers  $B$ , soit de  $B$  vers  $A$ ).

Puisque l'on peut choisir deux directions opposées, il existe exactement deux cocircuits opposés ayant le même cocycle élémentaire sous-jacent.

Un tel matroïde orienté est dit *graphique*.



**Figure A.1 : orientation de référence de  $K_4$**

*Exemple.* Sur la Figure A.1 est représenté un graphe  $K_4$  orienté. Ses circuits sont  $1\bar{2}3$ ,  $2\bar{4}6$ ,  $3\bar{5}6$ ,  $1\bar{4}5$  et leurs opposés. Ses cocircuits sont  $123$ ,  $\bar{1}35$ ,  $456$ ,  $23\bar{6}$ ,  $2345$ ,  $1\bar{3}46$ ,  $12\bar{5}6$  et leurs opposés.

*Définition.* Si tout élément appartient à un circuit positif, l'orientation est dite *totalelement cyclique*. Si le graphe est connexe, totalelement cyclique est équivalent à *fortement connexe*. Si tout élément appartient à un cocircuit positif, alors aucun élément n'appartient à un circuit positif <sup>(1)</sup> et l'orientation est *acyclique*.

---

<sup>(1)</sup> Un résultat classique et important, vrai dans les matroïdes orientés en général,

**Lemme A.1.1.** (orthogonalité dans le cas graphique)

Soit un matroïde orienté graphique avec un circuit  $C$  et un cocircuit  $D$ , alors

$$|(C^+ \cap D^+) \cup (C^- \cap D^-)| = |(C^- \cap D^+) \cup (C^+ \cap D^-)|$$

□

Cette propriété d'orthogonalité reste valide dans les matroïdes orientés réguliers (i. e. vectoriels sur tout corps). Dans les matroïdes orientés en général, on sait juste que les deux membres de cette égalité sont soit vides soit non vides simultanément.

- Arrangements de pseudodroites.

On appelle *pseudodroite* du plan affine euclidien une courbe homéomorphe à une droite réelle, et un *arrangement de pseudodroites* un ensemble de pseudodroites qui se coupent deux à deux une et une seule fois, en un point où elles se croisent.

Afin d'avoir une symétrie centrale, utile pour les axiomatiques, on préfère considérer que le plan affine est un hémisphère de la sphère réelle de dimension 2 et que les pseudodroites se prolongent continuellement et symétriquement sur l'hémisphère opposé. Ceci revient à considérer des *pseudocercles* homéomorphes à des cercles  $S^1$  sur la sphère réelle  $S^2$  de dimension 2, qui se coupent deux à deux en exactement deux points opposés où ils se croisent, formant à eux tous un *arrangement de pseudocercles*.

Les pseudocercles découpent la sphère en un complexe cellulaire de faces de dimensions 0, 1, ou 2. Si on choisit pour chaque pseudocercle un côté positif et un côté négatif, on peut associer à chaque face une partie signée dont le support est l'ensemble des pseudocercles ne contenant pas cette face, et dont les signes sont les signes du côté du pseudocercle où se trouve la face.

L'arrangement définit un matroïde orienté dont :

- les *cocircuits* sont les parties signées associées aux faces de dimension 0 (sommets),
- les *covecteurs* sont les parties signées associées aux faces de toutes dimensions.

Pour représenter par une figure un arrangement de pseudocercles, on représentera un hémisphère de  $S^2$ , dont le bord sera un des pseudocercles (homéomorphe à  $S^1$ ). En général,  $E$  étant dans les exemples 1... $n$ , la figure représentera le côté positif de 1, dont le bord sera 1. Bien sûr il n'apparaît ainsi que la moitié des régions de l'arrangement complet de pseudocercles, l'autre moitié se déduisant évidemment par symétrie centrale.

*Exemple.* La figure A.2 représente les covecteurs d'un arrangement de pseudodroites du plan projectif : à chaque face est associée son covecteur. Les cocircuits correspondant aux faces de dimension 0 (sommets) sont les mêmes que dans l'exemple

---

est que tout élément appartient soit à un circuit positif, soit à un cocircuit positif, mais pas les deux.

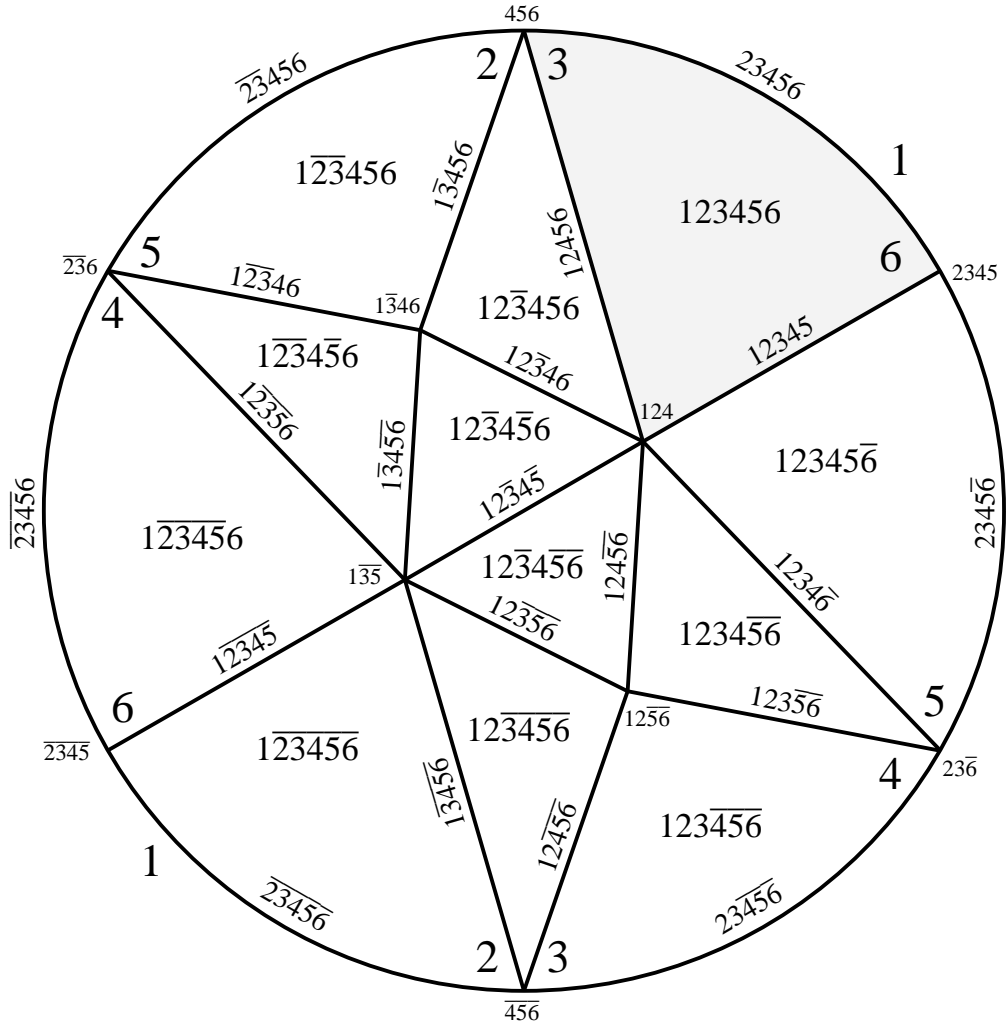


Figure A.2 : covecteurs de  $K_4$

graphique précédent : les Figures A.1, et A.2 représentent en fait le même matroïde orienté défini par une orientation particulière de  $K_4$ .

*Remarque.* L'intersection de tous les côtés positifs est une région (face de dimension 2) si et seulement si il existe un covecteur positif, si et seulement si tout élément appartient à un cocircuit positif. L'arrangement signé alors est dit *acyclique*.

Les arrangements de pseudocercles représentent les *matroïdes orientés simples* de rang 3, où le rang 3 est dû à la dimension 2 de la sphère considérée, et où 'simple' signifie que l'on interdit la 'duplication' d'un élément, ainsi que la présence de 'boucles' qui sont en général les éléments de rang 0.

## 2. Matroïdes.

Dans cette thèse, un matroïde est une structure combinatoire définie sur un ensemble fini par la donnée d'une collection de parties qui peuvent être par exemple les bases, les circuits, ou les cocircuits du matroïde. Il y a ainsi plusieurs façons de définir un matroïde.

- Bases d'un matroïde.

*Définition.* Soit  $E$  un ensemble fini. Un ensemble  $\mathcal{B}$  de parties de  $E$  est l'ensemble des *bases* d'un *matroïde*  $M$  sur  $E$  si et seulement si les axiomes suivants sont vérifiés :

- (i)  $\mathcal{B} \neq \emptyset$
- (ii) pour tous  $B$  et  $B'$  dans  $\mathcal{B}$  et  $e \in B \setminus B'$  il existe  $f \in B' \setminus B$ , tel que  $B \setminus e \cup f \in \mathcal{B}$ .

Ces axiomes impliquent immédiatement que toutes les bases ont même cardinal. Ce cardinal est appelé le *rang* du matroïde, et noté  $r(M)$  ou simplement  $r$ .

Les matroïdes sont la structure naturelle de l'algorithme glouton. Soit un ensemble  $\mathcal{I}$  de parties de  $E$  appelées *indépendants* vérifiant 'si  $A \subset B$  et  $B \in \mathcal{I}$  alors  $A \in \mathcal{I}$ '. On peut calculer l'élément de  $\mathcal{I}$  de poids minimal pour tout ordre total sur  $E$  (poids) en partant de l'ensemble vide et en ajoutant à chaque fois l'élément de poids minimal pour lequel la partie obtenue reste un élément de  $\mathcal{I}$  (algorithme glouton), si et seulement si les éléments maximaux de  $\mathcal{I}$  constituent les bases d'un matroïde (i. e. satisfont les axiomes ci-dessus).

L'ensemble des complémentaires des bases de  $M$  dans  $E$  vérifiant les mêmes axiomes, c'est aussi l'ensemble des bases d'un matroïde, appelé *matroïde dual* de  $M$  et noté  $M^*$ .

### *Exemples.*

- Les forêts maximales d'un graphe  $G = (V, E)$  sont les bases d'un matroïde sur  $E$ . Un tel matroïde est appelé *matroïde graphique*. Le rang de ce matroïde est donc  $|V| - c(G)$  où  $c(G)$  est le nombre de composantes connexes de  $G$ . Si le graphe est planaire, le matroïde défini à partir du graphe dual  $G^*$  est le dual du matroïde défini à partir de  $G$ .

- Si  $E$  est un ensemble fini de vecteurs d'un espace vectoriel sur un corps  $K$ , engendrant l'espace vectoriel  $V$ , alors les parties de  $E$  qui sont des bases de  $V$  sont les bases d'un matroïde sur  $E$ . Un tel matroïde est appelé *matroïde vectoriel*. Le rang de ce matroïde est alors la dimension de  $V$ .

- Un ensemble fini d'hyperplans d'un espace vectoriel réel (ou *arrangement d'hyperplans*) définit un matroïde vectoriel en considérant les dépendances des formes linéaires dont les hyperplans sont les noyaux. Dans ce cas, le rang du matroïde est la dimension de l'espace vectoriel de départ moins la dimension de l'intersection des hyperplans de  $E$ .

- Les parties à  $r$  éléments de  $E$  de cardinal  $n$ , forment les bases d'un matroïde sur  $E$  appelé *matroïde uniforme* et noté  $U_{r,n}$ .

*Remarques.*

- Tous les matroïdes graphiques sont aussi vectoriels : pour un graphe  $G = (V, E)$ , il suffit de considérer l'ensemble des vecteurs  $x_j - x_i$ ,  $(i, j) \in E$ , pour une base  $(x_i)_{i \in V}$  de l'espace réel.

- Tous les matroïdes vectoriels ne sont pas graphiques : l'exemple fondamental est  $U_{2,4}$ .

A partir de l'ensemble des bases du matroïde, on définit d'autres ensembles de parties de  $E$ , qui déterminent eux aussi le matroïde et qui vérifient certains axiomes.

• Objets usuels dans les matroïdes.

- L'ensemble des *indépendants* de  $M$  est l'ensemble des parties des bases. Ainsi les bases sont les indépendants maximaux. Dans le cas graphique, les indépendants sont les ensembles d'arêtes des forêts du graphe. Dans le cas vectoriel, ce sont les indépendants au sens de la dépendance linéaire.

- L'ensemble des *dépendants* de  $M$  sont les parties non-indépendantes. Dans un graphe, ce sont les ensembles d'arêtes contenant les arêtes d'un cycle. Dans le cas vectoriel, ce sont les parties contenant des vecteurs liés au sens de la dépendance linéaire.

- L'ensemble des *circuits* de  $M$  est l'ensemble des dépendants minimaux pour l'inclusion. Dans un graphe, ce sont les arêtes des cycles élémentaires (i. e. ceux qui ne passent pas deux fois par un même sommet). Dans le cas vectoriel, ce sont les parties dépendantes de  $E$  minimales pour l'inclusion.

- La *fermeture* d'une partie  $A \subseteq E$  notée  $cl(A)$  ('closure' en anglais) est la plus petite partie de  $E$  contenant  $A$  et vérifiant, pour tout circuit  $C$  de  $M$  et tout  $e$  dans  $E$ , si  $C - e \subseteq A$  alors  $e \in cl(A)$ . Un *fermé* de  $M$  est une partie qui est égale à sa propre fermeture. Dans un graphe, la fermeture s'obtient en ajoutant à une partie les arêtes qui ferment un cycle dans cette partie. Dans le cas vectoriel, la fermeture d'une partie est l'intersection de  $E$  avec le sous-espace engendré par cette partie.

On appelle *rang* d'un fermé le cardinal d'un indépendant maximal contenu dans ce fermé (c'est en fait le cardinal d'une base du matroïde obtenu en se restreignant à cette partie), et le rang d'une partie est celui de sa fermeture. On note  $r$  la fonction rang.

L'ensemble des fermés ordonnés par l'inclusion forme un treillis, gradué par la fonction rang, et tel que  $F_1 \wedge F_2 = F_1 \cap F_2$  (plus grand fermé inférieur aux deux autres) et  $F_1 \vee F_2 = cl(F_1 \cup F_2)$  (plus petit fermé supérieur aux deux autres). Un treillis est un ensemble ordonné sur lequel  $\vee$  et  $\wedge$  sont définis. Le treillis des fermés du matroïde sous-jacent d'un matroïde orienté est l'ensemble ordonné pour l'inclusion des intersections de pseudosphères.

- Un *hyperplan* de  $M$  est un fermé de rang  $r(M) - 1$ .

- L'ensemble des *cocircuits* de  $M$  est l'ensemble des complémentaires dans  $E$  des hyperplans de  $M$ .

Dans un graphe, ce sont les coupes minimales pour l'inclusion<sup>(2)</sup>. Dans le cas vectoriel, ce sont pour chaque sous espace de dimension  $r - 1$  engendré par des éléments de  $E$ , les éléments de  $E$  n'appartenant pas à cet espace.

- Un *isthme* est un élément qui appartient à toutes les bases. Une *boucle* est un élément qui n'appartient à aucune base. Dans le cas graphique, ce sont les notions habituelles. Dans le cas vectoriel, les isthmes sont des vecteurs tels que les autres vecteurs engendrent un espace de dimension  $r - 1$ , et les boucles sont autant de copies du vecteur nul.

Les isthmes de  $M$  sont les boucles de  $M^*$ , et les boucles de  $M$  sont les isthmes de  $M^*$ .

• Propriétés diverses.

**Les circuits de  $M$  sont les cocircuits de  $M^*$   
et les cocircuits de  $M$  sont les circuits de  $M^*$ .**

Passages d'un ensemble d'objets usuels à un autre :

- les indépendants sont les parties ne contenant pas de circuits,
- les fermés sont les complémentaires d'unions de cocircuits...

**Propriété A.2.1.**

*Soit  $F$  un fermé d'un matroïde  $M$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $E \setminus F$  est un fermé de  $M^*$  ;*
- (ii)  $F$  est une union de circuits ;*
- (iii)  $M(F)$  n'a pas d'isthme.*

Un fermé qui satisfait les propriétés A.2.1 est appelé *fermé cyclique*.

*Preuve.* (i) et (ii) sont équivalents puisqu'un fermé d'un matroïde est le complémentaire d'une union de cocircuits du matroïde.

Les circuits de  $M(F)$  sont les circuits de  $M$  contenus dans  $F$ , et un isthme est un élément qui n'appartient à aucun circuit. On en déduit immédiatement (ii) équivalent à (iii). □

• Mineurs des matroïdes.

Pour  $A \subseteq E$ , on définit  $M/A$  qui est le matroïde dont les bases sont les  $\{B \setminus A \mid B \in \mathcal{B}, A \subseteq B\}$ . On dit qu'il est obtenu par *contraction* de  $A$ . Et on définit  $M \setminus A = M(E \setminus A)$  dont les bases sont les  $\{B \mid B \in \mathcal{B}, B \cap A = \emptyset\}$ . On dit qu'il est obtenu par *suppression*  $A$ , ou par restriction à  $E \setminus A$ <sup>(3)</sup>.

---

<sup>(2)</sup> Une *coupe* est l'ensemble des arêtes joignant les sommets de deux parties  $A$  et  $B$  de l'ensemble des sommets  $V$ , où  $V = A \uplus B$  est une partition de  $V$ .

<sup>(3)</sup> Il a déjà été question précédemment de restriction à propos du rang : le rang de  $A$  dans  $M$  est le rang du matroïde  $M(cl(A))$ .



Alors évidemment on a pour tout  $A \subseteq E$

$$(M/A)^* = M^* \setminus A$$

et

$$(M \setminus A)^* = M^*/A$$

et pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$  d'intersection vide

$$M/A \setminus B = M \setminus B/A$$

ces matroïdes étant appelés *mineurs* de  $M$ .

De plus si  $e$  est un isthme ou une boucle de  $M$  alors  $M/e = M \setminus e$  (on peut montrer facilement que c'est une condition nécessaire et suffisante).

Dans le cas graphique, ces définitions coïncident avec les définitions habituelles des mineurs. Dans le cas vectoriel, la suppression revient simplement à supprimer les éléments concernés, et la contraction par contre est plus subtile<sup>(4)</sup>. Dans le cas d'un arrangement d'hyperplans, la contraction selon  $A$  est l'arrangement induit sur l'intersection des hyperplans appartenant à  $A$ .

- Axiomatique des circuits et des cocircuits.

### **Théorème A.2.2.**

*Un ensemble de parties  $\mathcal{C}$  d'un ensemble fini est l'ensemble des circuits (ou des cocircuits) d'un matroïde si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.*

- (i)  $\emptyset \notin \mathcal{C}$  ;
- (ii) pour tout  $X, Y \in \mathcal{C}$  si  $X \subseteq Y$  alors  $X = Y$  ; (incomparabilité)
- (iii) pour tout  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,  $e \in X \cap Y$  et  $f \in (X \setminus Y)$ , il existe  $Z \in \mathcal{C}$  tel que  
 $Z \subseteq (X \cup Y) - e$   
et  $f \in Z$ . (élimination forte)

---

<sup>(4)</sup> pour une configuration de points, cela revient à projeter la configuration sur un hyperplan en position générale, successivement à partir de chaque élément à contracter

### 3. Matroïdes orientés : définition combinatoire.

Les axiomatiques des circuits et vecteurs s'appliquent de la même façon, respectivement, aux cocircuits et covecteurs via le dual défini après.

- Axiomatiques.

*Définition.* Un ensemble de parties signées  $\mathcal{C}$  d'un ensemble fini est l'ensemble des circuits (ou des cocircuits) d'un matroïde orienté si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées. Le matroïde orienté est alors déterminé par l'ensemble des circuits (ou des cocircuits).

- (i)  $\emptyset \notin \mathcal{C}$  ;
- (ii)  $\mathcal{C} = -\mathcal{C}$  ; (symétrie)
- (iii) pour tout  $X, Y \in \mathcal{C}$  si  $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$  alors  $X = Y$  ou  $X = -Y$  ; (incomparabilité)
- (iv) pour tout  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,  $X \neq Y$ ,  $e \in X^+ \cap Y^-$  et  $f \in (X^+ \setminus Y^-) \cup (X^- \setminus Y^+)$ , il existe  $Z \in \mathcal{C}$  tel que
 
$$Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) - e$$

$$Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) - e$$
 et  $f \in \underline{Z}$ . (élimination forte des circuits)

*Définition.* Si l'on ne tient pas compte des signes, les conditions obtenues sont l'axiomatique des circuits d'un matroïde (partie 2). Le matroïde dont les circuits sont les supports des circuits d'un matroïde orienté est appelé *matroïde sous-jacent* de ce matroïde orienté.

*Définition.* Un ensemble  $\mathcal{V}$  de parties signées d'un ensemble fini est l'ensemble des vecteurs (ou des covecteurs) d'un matroïde orienté si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées. Le matroïde orienté est alors déterminé par l'ensemble des vecteurs (ou des covecteurs).

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{V}$  ;
- (ii)  $\mathcal{V} = -\mathcal{V}$  ; (symétrie)
- (iii) pour tout  $X, Y \in \mathcal{V}$  on a  $X \circ Y \in \mathcal{V}$  ; (composition)
- (iv) pour tout  $X, Y \in \mathcal{V}$ ,  $e \in X^+ \cap Y^-$  et  $f \in (\underline{X} \setminus \underline{Y}) \cup (\underline{Y} \setminus \underline{X}) \cup (X^+ \cap Y^+) \cup (X^- \cap Y^-)$ , il existe  $Z \in \mathcal{V}$  tel que
 
$$Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) - e$$

$$Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) - e$$
 et  $f \in \underline{Z}$ . (élimination forte des vecteurs)

Etant données deux parties signées  $A = (A^+, A^-)$  et  $B = (B^+, B^-)$ , on définit la *composition*  $A \circ B = (A^+ \cup (B^+ \setminus \underline{A}), A^- \cup (B^- \setminus \underline{A}))$ . c'est-à-dire que  $A \circ B$  a pour support  $\underline{A} \cup \underline{B}$ , les éléments de  $A$  étant signés comme dans  $A$ , et les autres comme dans  $B$ .

Si  $A$  et  $B$  ont les mêmes signes sur leurs éléments communs, on dit que  $A \circ B$  est une *composition conforme*.

Deux vecteurs (resp. covecteurs) sont *conformes* si ils ont les mêmes signes sur leurs éléments communs (c'est-à-dire, géométriquement, si les faces correspondantes se touchent, cf. partie 4).

### **Théorème A.3.1.**

*L'ensemble des vecteurs (resp. covecteurs) est engendré par composition conforme à partir de l'ensemble des circuits (resp. cocircuits).*

Il existe d'autres caractérisations des vecteurs (da Silva, Handa... voir [OM]).

La réorientation de  $M$  selon  $A$  est le matroïde orienté ayant pour ensemble de circuits les circuits de  $M$  dans lesquels on change le signe des éléments de  $A$  (ce qui se transporte alors aux vecteurs, aux cocircuits et aux covecteurs). Toutes les réorientations de  $M$  forment sa *classe de réorientations*. Elles ont toutes le même matroïde sous-jacent.

Les matroïdes et les matroïdes orientés sont des objets différents, même si à un matroïde orienté est toujours associé un matroïde sous-jacent. En effet certains matroïdes ne sont le matroïde sous-jacent d'aucun matroïde orienté (ils sont *non-orientables*, cf. 'Compléments'), et plusieurs classes de réorientations de matroïdes orientés différentes peuvent avoir le même matroïde sous-jacent.

#### • Dualité.

On dit que deux parties signées  $X$  et  $Y$  sont *orthogonales* si  $(X^+ \cap Y^+) \cup (X^+ \cap Y^-) \neq \emptyset$  et  $(X^- \cap Y^+) \cup (X^+ \cap Y^-) \neq \emptyset$  dès que  $\underline{X} \cap \underline{Y} \neq \emptyset$ .

### **Théorème A.3.2.**

*L'ensemble des parties signées orthogonales à tous les vecteurs (resp. covecteurs), est égal à l'ensemble des parties signées orthogonales à tous les circuits (resp. cocircuits).*

*C'est l'ensemble des vecteurs (resp. covecteurs) d'un matroïde orienté sur  $E$ .*

*Définition.* Ce matroïde orienté est le *dual* de  $M$ , noté  $M^*$ . Son matroïde sous-jacent est le matroïde dual de celui de  $M$ . L'ensemble des covecteurs (resp. vecteurs) de  $M^*$  est l'ensemble des vecteurs (resp. covecteurs) de  $M$ . L'ensemble des cocircuits (resp. circuits) de  $M^*$  est l'ensemble des circuits (resp. cocircuits) de  $M$ .

En pratique on joue à la fois techniquement sur les circuits et les cocircuits, ou les vecteurs et les covecteurs, qui interviennent de pair. Lorsque l'on ne considère que leurs supports, parties non signées, on utilise leurs propriétés dans le matroïde sous-jacent. Lorsque l'on prend en compte les signes, les propriétés d'orthogonalité sont souvent exploitées. Par exemple :

- si  $C$  est un circuit et  $D$  un cocircuit, alors  $|C \cap D| \neq 1$  ;
- et si  $C \cap D = \{e, f\}$  alors  $e$  et  $f$  sont de même signe dans  $C$  et de signes opposés dans  $D$ , ou bien de signes opposés dans  $C$  et de même signe dans  $D$ .

## 4. Matroïdes orientés : définition topologique

Les matroïdes orientés sont représentés par des objets topologiques naturels, qu'ils modélisent de façon combinatoire : les arrangements de pseudosphères.

Historiquement, les matroïdes orientés sont définis avec les axiomatiques combinatoires de la partie précédente, et le **théorème de représentation topologique** est le résultat fondamental montrant que l'on peut les définir de façon topologique comme dans la présente partie. Un intérêt des matroïdes orientés est que l'ensemble des circuits et des vecteurs, ou des cocircuits et des covecteurs, vérifient une axiomatique simple, c'est-à-dire qu'il y a une caractérisation simple des ensembles de parties signées pouvant correspondre aux faces d'un arrangement de pseudosphères.

Le fait de définir les matroïdes orientés par leur représentation topologique peut paraître artificiel dans le sens où la description d'un matroïde orienté donné se fait en pratique le plus souvent de façon combinatoire. D'un autre côté, la plupart des résultats et objets usuels dans les matroïdes orientés ont des interprétations géométriques remarquables. Dès lors, dans un sens, il peut sembler que l'objet intéressant est l'objet topologique, la combinatoire étant l'outil qui permet de travailler et d'établir des liens avec d'autres domaines. Mais dans un autre sens, la structure combinatoire plus abstraite permet, par exemple, de considérer - en même temps - un matroïde orienté et son dual, ce qui est moins spontané géométriquement. Quoi qu'il en soit, l'aspect topologique est un bon support pour l'intuition.

- Arrangement de pseudosphères.

*Définitions.* On note  $S^d$  la sphère unité de l'espace réel de dimension  $d + 1$ .

On appelle *pseudosphère* de  $S^d$  une sphère  $S$  homéomorphe à  $S^{d-1}$  dans un homéomorphisme de  $S^d$ . Il y a alors deux composantes connexes dans  $S^d \setminus S$ , chacune homéomorphe à une boule de dimension  $d$ , que l'on appellera les *côtés* de  $S$ .

Un *arrangement de pseudosphères* est un ensemble fini  $\mathcal{A}$  de pseudosphères  $S_e$ ,  $e \in E$  de  $S^d$  vérifiant les conditions suivantes :

- (i)  $S_A = \cap_{e \in A} S_e$  est une sphère, pour tout  $A \subseteq E$ .
- (ii) Si  $S_A \not\subseteq S_e$  pour  $A \subseteq E$ ,  $e \in E$ , et  $S_e^+$  et  $S_e^-$  sont les deux côtés de  $S_e$  alors  $S_A \cap S_e$  est une pseudosphère de  $S_A$  ayant pour côtés  $S_A \cap S_e^+$  et  $S_A \cap S_e^-$ .

Si  $S_E = \emptyset$  l'arrangement est dit *essentiel*.

On dit que l'arrangement est *signé* lorsque l'on choisit pour chaque pseudosphère  $S_e$ ,  $e \in E$ , un côté positif  $S_e^+$  et un côté négatif  $S_e^-$ .

Deux arrangements (resp. deux arrangements signés) sont *équivalents* si ils sont égaux à un homéomorphisme de  $S^d$  près (resp. si en plus l'homéomorphisme conserve les signes).

Les *matroïdes orientés* de rang  $d + 1$  sans boucles sont les classes d'équivalence des arrangements de pseudosphères essentiels signés de  $S_d$ .

On peut ajouter à un matroïde orienté des éléments non représentés appelés ses *boucles*, dont on verra plus loin l'importance. On a alors défini les matroïde orientés en toute généralité.

La *réorientation* d'un matroïde orienté  $M$  selon  $A \subseteq E$  est le matroïde orienté obtenu en changeant les signes des pseudosphères  $S_e$ ,  $e \in A$ . On le note  $-_A M$ .

• Faces de l'arrangement - Covecteurs du matroïde orienté.

Les intersections des pseudosphères définissent des faces, et un complexe cellulaire de faces qui partitionne  $S^d$ . Un des intérêts des matroïdes orientés est que considérer un arrangement signé permet de répertorier les positions relatives des faces par rapport aux éléments.

*Définition.* Etant donné un arrangement  $\mathcal{A} = (S_e)_{e \in E}$  de pseudosphères de  $S^d$  représentant un matroïde orienté  $M$ , à chaque point  $a$  de  $S^d$  est associée une partie signée de  $E$  définie par  $e \in A^+$  si et seulement si  $a \in S_e^+$  et  $e \in A^-$  si et seulement si  $a \in S_e^-$ . Ainsi  $e \notin A$  si et seulement si  $a \in S_e$ . L'ensemble des parties signées ainsi obtenues est l'ensemble des *covecteurs* du matroïde orienté.

Autrement dit, l'ensemble des covecteurs s'obtient en considérant, pour chaque face, l'ensemble  $C$  des éléments qui ne contiennent pas cette face, et en attribuant à chaque élément  $e$  de  $C$  le signe du côté de  $S_e$  dans lequel la face est contenue.

**Théorème A.4.1.** (théorème de représentation topologique, Folkman Lawrence 1978)

*Les deux définitions, topologique et combinatoire, sont équivalentes.*

*Propriétés.*

- Un matroïde orienté possède toujours une symétrie centrale combinatoire, dans le sens où l'ensemble des covecteurs est invariant par passage à l'opposé. On en déduit que la réorientation d'un matroïde orienté selon  $E$  tout entier est le même matroïde orienté. Cette symétrie fondamentale se retrouve dans toutes les axiomatiques.

- Deux arrangements de pseudosphères sont (combinatoirement) équivalents si et seulement si ils définissent le même ensemble de covecteurs.

*Définitions.*

- Les *régions* sont les composantes connexes de  $S^d \setminus \cup_{e \in E} S_e$ . L'ensemble de toutes les régions des arrangements induits par  $\mathcal{A}$  sur toutes les intersections de pseudosphères, est l'ensemble des *faces* du complexe cellulaire défini par  $\mathcal{A}$ . Les régions sont les faces de dimension  $d$ , les intersections réduites à un point sont les faces de dimension 0.

- L'ensemble des éléments contenant une face est appelé un *fermé* de  $M$ . Le *rang*  $r$  de  $M$  est  $r = d + 1$ . Si une face est de dimension  $k$ , le fermé correspondant est de *rang*  $r - k - 1$ .

Les fermés ne déterminent pas  $M$ , ils déterminent en fait le *matroïde sous-jacent*  $\underline{M}$ , ce qui revient à considérer l'ensemble des faces de l'arrangement (intersection de pseudosphères), mais sans s'occuper de leurs positions relatives, c'est-à-dire sans tenir compte des signes des covecteurs (voir partie 2).

- De même, les *bases* du matroïde orienté, qui sont les ensemble de  $r$  pseudosphères dont l'intersection est vide sont aussi une notion du matroïde sous-jacent (voir partie 2).

- Les *cocircuits* sont les covecteurs correspondant aux faces de dimension 0, appelées aussi *sommets*, c'est-à-dire les intersections de pseudosphères réduites à un point, c'est-à-dire que les cocircuits ont pour supports les complémentaires des fermés de rang  $r - 1$  (appelés hyperplans du matroïde). A un cocircuit du matroïde correspondent deux parties signées opposées, cocircuits du matroïde orienté (alors que pour les autres fermés, il peut y avoir de nombreux covecteurs ayant même support).

- Régions - covecteurs maximaux - réorientations acycliques.

Les *covecteurs maximaux* de  $M$  sont ceux dont le support est  $E$  moins les boucles éventuelles. Ils sont, par définition ici, en bijection canonique avec les régions de l'arrangement.

Un matroïde orienté est dit *acyclique* s'il existe un covecteur maximal positif, c'est-à-dire si la signature des pseudosphères qui définit le matroïde orienté désigne une région (cette région définit un covecteur maximal positif).

Ainsi les régions de l'arrangement de pseudosphères (qui ne dépendent pas de la façon dont celles-ci sont signées) sont en bijection canonique avec les covecteurs maximaux du matroïde orienté (qui dépend lui d'une certaine signature de référence), et en bijection canonique avec les réorientations acycliques du matroïde orienté (qui reviennent à changer la signature de référence, tant que celle-ci désigne une région).

On emploiera régulièrement et indifféremment, sauf ambiguïté, ces appellations.

Les réorientations correspondant aux vecteurs maximaux sont les réorientations *totalelement cycliques* ou pour un graphe les orientations *fortement connexes*. Ce sont les réorientations acycliques du dual.

- Arrangements d'hyperplans.

Etant donné un ensemble d'hyperplans (sous-espaces vectoriels de codimension 1) d'un espace vectoriel réel de dimension  $d + 1$ , l'intersection de ces hyperplans avec la sphère unité  $S^d$  de l'espace définit un arrangement de pseudosphères, et donc, en choisissant une signature de référence, un matroïde orienté.

Un tel matroïde orienté est dit *vectoriel* ou *réalisable*.

Les signes des circuits et des cocircuits sont les signes des coefficients dans des relations de dépendances linéaires de vecteurs de l'espace déduits des hyperplans. Ce lien avec l'algèbre linéaire constitue une part importante de la théorie des matroïdes orientés (le chapitre 2 de [OM] est entièrement consacré à ce cas) mais il n'en est presque pas question dans cette thèse.

Grossièrement, à partir d'un arrangement d'hyperplans, on peut encore définir un matroïde orienté en déformant les hyperplans, c'est-à-dire en les remplaçant par des pseudohyperplans homéomorphes à des hyperplans, à condition qu'ils se coupent entre eux comme le feraient des hyperplans (condition (i)), et que les arrangements induits sur leurs intersections soient aussi des arrangements de pseudohyperplans (condition (ii)).

Pour écrire ces propriétés rigoureusement, on est amené à employer des arrangements de pseudosphères (et non de pseudohyperplans). L'intérêt de ces 'déformations' est que les objets obtenus sont des objets combinatoires dont l'axiomatique est simple, alors qu'il existe des arrangements de pseudosphères ne venant pas d'arrangements d'hyperplans (cf. 'Compléments') et qu'il est actuellement hors de portée de caractériser ceux qui viennent effectivement d'arrangements d'hyperplans (il y a notamment une infinité de mineurs exclus). Le point de vue combinatoire ne tenant pas compte des distances, et les contraintes de réalisabilité étant profondément liées aux distances, il n'est pas étonnant que celles-ci disparaissent dans les matroïdes orientés et que l'on obtienne des objets plus généraux. Ainsi, l'étude des arrangements d'hyperplans à homéomorphisme près peut se faire dans le cadre des matroïdes orientés d'un point de vue purement combinatoire.

- Configurations de points.

C'est le point de vue dual du précédent au sens de l'algèbre linéaire. Etant donnés  $n$  points d'un espace affine réel, on appelle *hyperplans de la configuration* ou *hyperplans du matroïde orienté* les ensembles de points portés par un même hyperplan affine. Les complémentaires de ces hyperplans sont les supports des cocircuits.

Les signes de deux éléments du cocircuit sont les mêmes si et seulement si ils sont dans le même demi-espace délimité par l'hyperplan.

Les matroïdes orientés permettent ainsi d'axiomatiser les positions relatives de points dans l'espace. Cependant on n'utilise pas dans cette thèse de représentation par configurations de points (elles sont systématiquement acycliques et une réorientation acyclique revient à une transformation projective).

- Graphes.

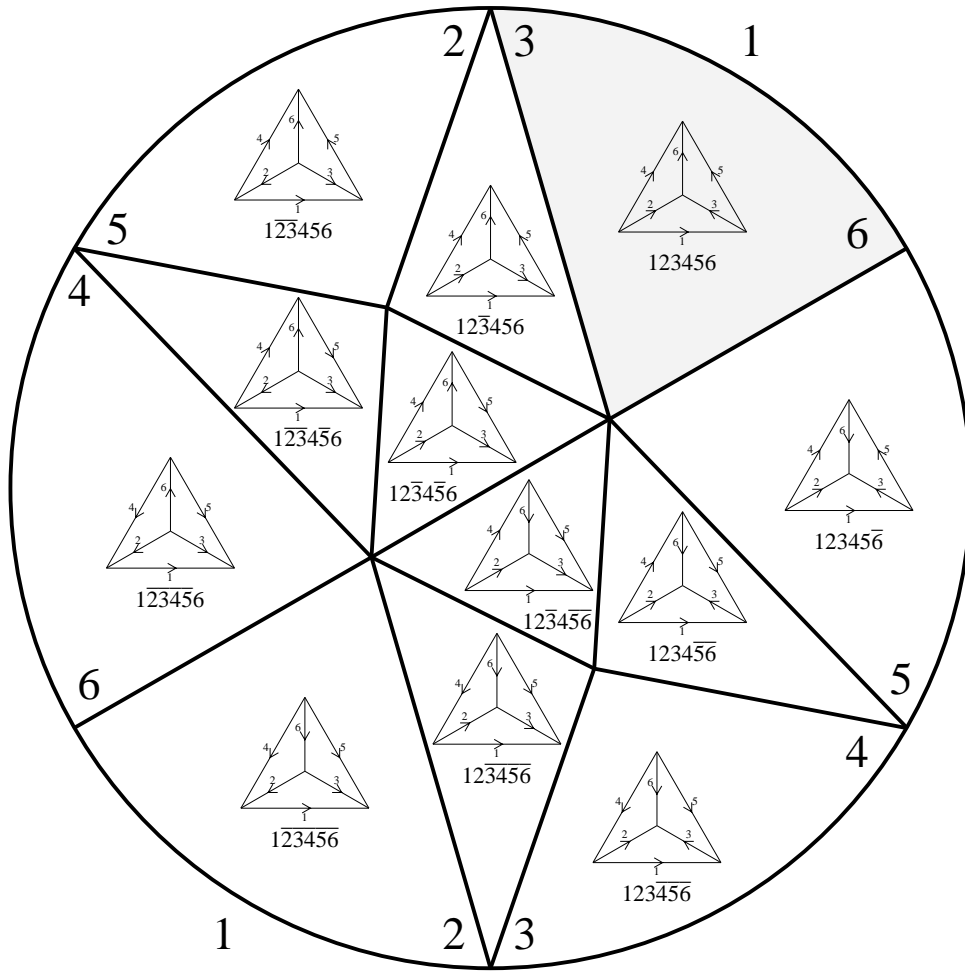
Etant donné un graphe  $G = (V, E)$ , en considérant l'ensemble des hyperplans d'équations  $x_j - x_i = 0$ ,  $(i, j) \in E$ , où les vecteurs  $x_i$ ,  $i \in V$  forment une base de l'espace réel de dimension  $|V|$ , on définit un arrangement d'hyperplans et donc un matroïde orienté en choisissant une signature de référence.

Une signature de l'arrangement étant le choix d'un demi-espace positif, d'équation  $x_j > x_i$  ou  $x_i > x_j$ , pour tout couple  $(i, j) \in E$ , les réorientations du matroïde sont en bijection canonique avec les orientations du graphe. Si le graphe de départ est orienté, on choisit la signature de l'arrangement de façon cohérente :  $x_j > x_i$  pour l'arête  $(i, j)$  orientée de  $i$  vers  $j$ .

Un tel matroïde orienté est dit *graphique*.

La structure de matroïde orienté obtenue peut se définir à partir de l'espace des cycles du graphe : les cocircuits signés du matroïde orienté sont les cocycles signés (coupes minimales signées) sur le graphe (qui déterminent le matroïde orienté). De nombreuses informations du graphe se retrouvent dans le matroïde orienté, par exemple les bases du matroïde orienté sont les arbres couvrants du graphe.

*Exemple.* La figure A.3 représente l'arrangement de rang 3 de la Figure A.2 de pseudodroites (pseudosphères de dimension 1) correspondant à l'orientation du graphe  $K_4$  de la Figure A.1. Dans chaque région est représentée l'orientation acyclique correspondante du graphe. La région grisée est la région de référence



**Figure A.3 : orientations acycliques, régions, et covecteurs maximaux de  $K_4$**

(covecteur positif) à partir de laquelle sont signés tous les covecteurs.

*Remarque.* Les réorientations du matroïde orienté graphique correspondant sont en bijection canonique avec les orientations du graphe : il y a une seule ‘classe de réorientation’ pour un graphe donné en tant que matroïde orienté, autrement dit deux matroïdes orientés définis par ce graphe sont des réorientations l’un de l’autre, contrairement aux matroïdes généraux pour lesquels un même matroïde peut être le matroïde sous-jacent de plusieurs matroïdes orientés qui ne sont pas des réorientations les uns des autres (le cas uniforme en est l’exemple typique : il y a de nombreuses façons d’avoir des points en position générale dans l’espace avec des positions relatives différentes).

- Dualité.

Le théorème A.3.2 est un fort résultat combinatoire, mais aussi topologique : étant donné un arrangement de pseudosphères de taille  $n$  et de rang  $r$ , il existe un arrangement de pseudosphères dual de taille  $n$  et de rang  $n - r$  dont les covecteurs



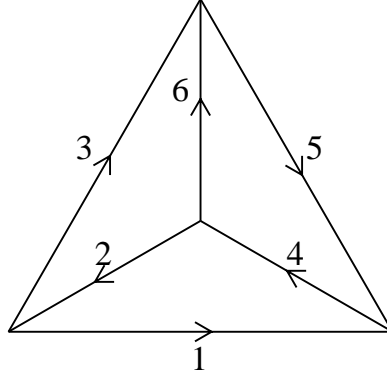


Figure A.4 : dual de  $K_4$

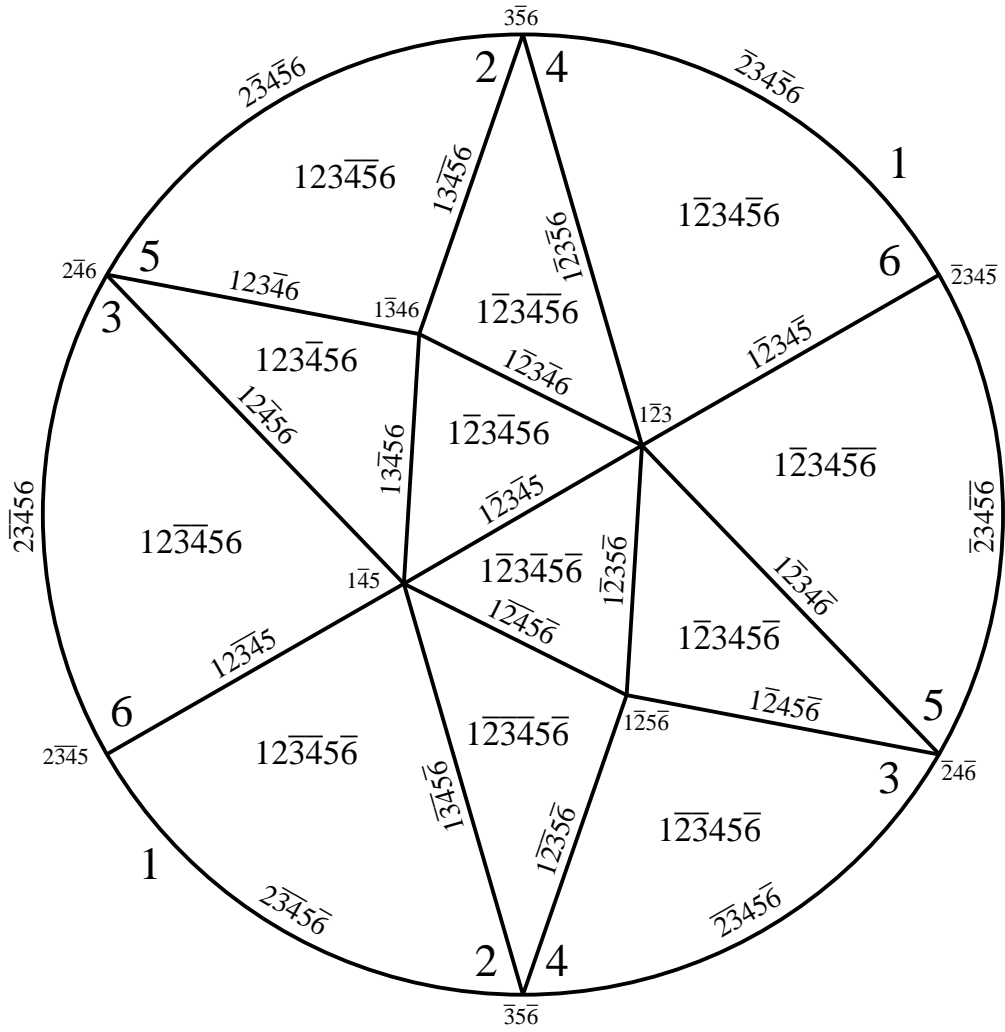


Figure A.5 : vecteurs de  $K_4$

sont les parties signées maximales orthogonales à tous les covecteurs de l'arrangement donné.

Dans une définition topologique, on définit d'abord les covecteurs, pour leur

interprétation géométrique, et on définit alors les vecteurs à partir de l'orthogonalité. Cependant ces deux ensembles d'objets sont fondamentaux ainsi que leur dualité. Les circuits et les vecteurs sont aussi naturels pour le matroïde orienté que les cocircuits et les covecteurs, et ils ont des interprétations géométriques complémentaires.

Dans un matroïde orienté vectoriel, les supports des circuits sont les dépendants minimaux au sens de la dépendance linéaire, et les signes dans un circuit sont simplement les signes des éléments dans la relation de dépendance linéaire liant les vecteurs (bien sûr on trouve deux parties signées opposées).

Dans un arrangement de pseudosphères, les supports des circuits apparaissent géométriquement ainsi : les dépendants sont les intersections de dimensions  $k$  contenues dans strictement plus de  $r - k - 1$  pseudosphères, et les supports des circuits sont les dépendants minimaux. Le matroïde dual d'un matroïde se définit ainsi facilement à partir du matroïde. Par contre dans le cas orienté, la prise en compte des signes oblige à considérer ces conditions d'orthogonalité pour connaître les signes des circuits à partir des cocircuits, et il n'est pas évident de déduire géométriquement l'arrangement dual d'un arrangement donné.

Pour un graphe planaire, le matroïde orienté du dual du graphe est le dual du matroïde orienté du graphe.

*Exemple.* La Figure A.4 représente le dual du graphe orienté  $K_4$  de la Figure A.1, et la Figure A.5 représente les covecteurs de ce graphe, qui sont les vecteurs du graphe de la Figure A.1 : c'est l'ensemble des parties signées orthogonales à toutes les parties signées de la Figure A.2.

## 5. Constructions dans les matroïdes orientés

- Mineurs d'un matroïde orienté.

Dans un matroïde graphique, les notions de mineurs coïncident avec celles des graphes.

Géométriquement, la suppression revient à supprimer les pseudosphères correspondantes. L'arrangement obtenu n'est peut-être alors plus essentiel (par exemple supprimer un isthme fait perdre 1 au rang).

La contraction revient à considérer l'arrangement induit sur l'intersection des pseudosphères contractées, celles qui contenaient cette intersection étant transformées en boucles, certaines pseudosphères peuvent se retrouver 'superposées' : leur paire forme un circuit dans le contracté.

Les mineurs d'un matroïde orientés ont pour matroïde sous-jacent les mineurs correspondant du matroïde sous-jacent. Les signes des éléments restant des circuits et des cocircuits obtenus sont inchangés.

**Proposition A.5.1.**

*Soit  $M$  un matroïde orienté sur  $E$ , et  $A \subseteq E$ .*

*Les cocircuits de  $M/A$  (resp. circuits de  $M \setminus A$ ) sont les cocircuits de  $M$  (resp. circuits de  $M$ ) d'intersection vide avec  $A$ .*

*Les circuits de  $M/A$  (resp. cocircuits de  $M \setminus A$ ) sont les parties minimales dans l'ensemble des circuits de  $M$  (resp. cocircuits de  $M$ ) auxquels on enlève  $A$ .*

$$(M/A)^* = M^* \setminus A$$

*ou bien*

$$(M \setminus A)^* = M^*/A$$

*Soient  $A$  et  $B$  deux parties disjointes de  $E$ , alors*

$$M/A \setminus B = M \setminus B/A$$

- Isthmes, boucles, et connexité.

Les *boucles* de  $M$  sont les *isthmes* de  $M^*$ . Une boucle est un circuit réduit à un élément, elle n'appartient à aucun covecteur. Un isthme est un cocircuit réduit à un élément, il n'appartient à aucun vecteur. Les isthmes et les boucles d'un matroïde orienté sont ceux du matroïde sous-jacent.

Géométriquement, les matroïdes orientés représentés par des arrangements de pseudosphères sont sans boucles. On peut ajouter des boucles, qui sont simplement des éléments de  $E$  appartenant à toutes les bases, formant des circuits à eux tout seuls. Ils sont alors représentés dans le matroïde dual puisque ce sont des isthmes du dual. De plus, lorsque l'on contracte un élément, les éléments qui lui sont parallèles deviennent des boucles.

Topologiquement, les isthmes sont des éléments qui lorsqu'on les supprime font que l'arrangement n'est plus essentiel, et font donc perdre une dimension à la sphère pour pouvoir être essentielle.

La *somme directe* de deux matroïdes orientés respectivement sur  $E$  et  $F$  avec  $E \cap F = \emptyset$  est le matroïde orienté défini sur  $E \cup F$  dont l'ensemble des cocircuits est la réunion de celui des deux matroïdes orientés.

Un matroïde orienté est *connexe* si il n'est pas la somme directe de deux matroïdes orientés. En particulier, un matroïde connexe n'a pas d'isthme ni de boucle.

- Elimination modulaire.

Une paire de cocircuits est *modulaire* si l'union de leurs supports est le complémentaire d'un fermé de rang  $r - 2$  du matroïde. Géométriquement les sommets correspondant sont sur une même pseudodroite. L'*élimination modulaire* d'un élément entre deux cocircuits modulaires est l'unique cocircuit obtenu par élimination qui soit modulaire avec les deux cocircuits. Géométriquement, le sommet correspondant est sur la même pseudodroite, à l'intersection avec l'élément éliminé.

- Extension par un élément.

La proposition suivante est fréquemment utilisée techniquement, surtout par son corollaire, et est facilement visualisable géométriquement.

**Proposition A.5.2.** ([OM, proposition 7.1.4 page 284])

(i)

Soit  $\widetilde{M}$  un matroïde orienté tel que  $M = \widetilde{M} \setminus \omega$  où  $\omega$  n'est pas un isthme ( $\widetilde{M}$  est appelé 'extension à un élément' de  $M$ , 'single element extension' en anglais).

Alors pour tout cocircuit  $Y \in \mathcal{C}^*$ , il existe une unique façon d'étendre  $Y$  à un cocircuit de  $\widetilde{M}$  : il y a une unique fonction

$$\sigma : \mathcal{C}^* \rightarrow \{+, -, 0\}$$

telle que

$$\{(Y, \sigma(Y)) : Y \in \mathcal{C}^*\} \subseteq \widetilde{\mathcal{C}}^*$$

(ii)

$\widetilde{M}$  est uniquement déterminé par  $\sigma$  avec :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{C}}^* = \{ & (Y, \sigma(Y)) : Y \in \mathcal{C}^* \} \uplus \{ (Y_1 \circ Y_2, 0) \mid \\ & Y_1, Y_2 \in \mathcal{C}^*, \sigma(Y_1) = -\sigma(Y_2) \neq 0, Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ conformes et modulaires} \} \end{aligned}$$

**Corollaire A.5.3.**

Soit  $M$  un matroïde orienté sur  $E$  et  $\omega \in E$ . Si  $e \in E \setminus \omega$  appartient à un cocircuit positif (resp. circuit positif)  $C$  de  $M$ , alors  $e$  appartient à un cocircuit positif (resp. circuit positif)  $D$  de  $M \setminus \omega$  (resp.  $M/\omega$ ) avec  $D \subseteq C$ .

## 6. Programmation linéaire dans les matroïdes orientés

Le problème fondamental de la programmation linéaire peut-être vu comme suit : étant donnée une région d'un espace (affine) délimitée par des hyperplans (affines), maximiser une forme linéaire (de l'espace vectoriel sous-jacent) sur cette région.

En termes classiques cela s'écrit :

$$\max \quad c^t x - d$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

où  $A$  est une matrice réelle de taille  $m \times n$ ,  $m$  étant le nombre d'inégalités,  $n$  la dimension du problème,  $x$  (la variable) et  $c$  sont des vecteurs de l'espace réel de dimension  $n$ ,  $b$  un vecteur de l'espace réel de dimension  $m$  et  $d$  une constante réelle. Les inégalités à vérifier définissent des demi-espaces (affines) et leur intersection est une région délimitée par des hyperplans.

On sait que l'ensemble des solutions d'un tel problème si il est non vide est une face de la région (un sommet s'il y a une unique solution). Ce problème peut alors être modélisé de façon purement combinatoire dans les matroïdes orientés : les hyperplans considérés définissent un matroïde orienté  $M$ , les régions en étant les réorientations acycliques. On ajoute à ce matroïde orienté un élément  $g$  qui représente le 'plan à l'infini', on peut le voir comme une sphère à l'infini de l'espace affine sur laquelle les parallèles se coupent. Les régions bornées sont alors représentées par celles qui ne touchent pas  $g$ . On ajoute un autre élément  $f$  qui représente la forme linéaire à optimiser, il représente le noyau de cette forme linéaire (hyperplan vectoriel) passant par un point quelconque de l'espace affine (donnant un hyperplan affine), et un demi-espace affine délimité par  $f$  est celui dans lequel  $f$  croît.

Si deux sommets sont sur une même arête, elle est portée par une pseudodroite (face de dimension 1 ou fermé de rang  $r - 2$  du matroïde) qui coupe  $f$ . Un des deux sommets est alors 'plus loin' que l'autre de  $f$  (et plus près de l'élément 'infini'  $g$ ), il augmente la fonction à maximiser. Ceci s'exprime dans le matroïde orienté avec les signes des covecteurs portés par cette pseudodroite.

Ceci permet de généraliser aux matroïdes orientés la 'méthode du simplexe' qui consiste à passer d'un sommet de la région à un autre adjacent de valeur supérieure pour la forme linéaire si elle doit être maximisée, et ce jusqu'à trouver un optimum. Une grande partie des travaux effectués en programmation linéaire dans le cadre des matroïdes orientés a été de définir des méthodes similaires (voir [OM] ou [BaKe92]). Un problème majeur qui se pose est que, contrairement au problème usuel dans l'espace vectoriel réel, le parcours des arêtes de la région peut tourner en rond : il peut y avoir des cycles de sommets 'croissants'. Cependant on montre qu'il existe malgré ceci une face optimale ('parallèle' à  $f$ ) pour toute région bornée.

- Programme de matroïde orienté.

*Définitions.* (respectivement [OM] définitions 10.1.1, 10.1.3, 10.1.5, 10.1.7, p. 420-424)

Un *programme de matroïde orienté* est un triplet  $(M, g, f)$  où  $M$  est un matroïde orienté sur  $E = E_n + \{f, g\}$ ,  $g$  n'est pas une boucle,  $f$  n'est pas un isthme, et  $f \neq g$ .

L'*espace affine* de  $M$  noté  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des covecteurs positifs sur  $g$ . Le *plan à l'infini* de  $M$  noté  $\mathcal{A}^\infty$  est l'ensemble des covecteurs nuls sur  $g$ , appelés *directions*. Un covecteur  $Y$  est *admissible* si il est positif sur  $Y \cap E_n$ .

$f$  est *croissant* (resp. *décroissant*, ou *constant*) dans la direction  $Z$  si le signe de  $f$  y est positif (resp. négatif, ou nul). Une direction  $Z$  est une *direction admissible pour  $Y$*  admissible si  $Y \circ Z$  est admissible.

Un covecteur admissible est *optimal* si il n'a pas de direction admissible croissante.

$(M, g, f)$  est *admissible* si il y a un cocircuit positif de  $M \setminus f$  contenant  $g$ .

$(M, g, f)$  est *borné* si il y a un circuit positif de  $M/g$  contenant  $f$ .

**Résultats connus.** ([OM] 10.1.13 p.427, 10.2.8 p.441)

- 'Théorème principal de la programmation linéaire dans les matroïdes orientés'.

Si  $(M, g, f)$  est admissible et borné, alors il existe un covecteur optimal.

- 'Critère du simplexe'.

Un cocircuit est optimal si et seulement si il est le cocircuit fondamental de  $g$  dans une base ne contenant pas  $f$ , telle que ce cocircuit est positif sur ses éléments appartenant à dans  $E_n \cup g$  et le circuit fondamental de  $f$  dans cette base est négatif sur ses éléments appartenant à  $E_n \cup f$ .

Autrement dit un cocircuit  $C$  est optimal si et seulement si il existe une base  $B$ ,  $g \in B$ ,  $f \notin B$ ,  $C = C^*(B; g)$ , la colonne  $g$  de  $\mathcal{T}_M(B)$  est positive sauf éventuellement sur  $f$ , la ligne  $f$  de  $\mathcal{T}_M(B)$  est négative sauf éventuellement sur  $g$ .

*Remarques.*

- On note qu'«être borné» signifie bien «ne pas toucher le plan à l'infini».

- Géométriquement, le signe de  $f$  dans un cocircuit optimal indique simplement de quel côté de la représentation géométrique de la fonction objective  $f$  ce sommet optimal se trouve.

- Graphe du programme.

Soit  $(M, g, f)$  un programme de matroïde orienté admissible et borné sur  $E$ .

*Définition.* ([OM] définition 10.1.16 p. 429)

Soit  $G_{(M, g, f)}$  le graphe dont les sommets sont les cocircuits de  $M$  positifs sur  $E \setminus f$ , et dont les arêtes sont les paires modulaires de cocircuits positifs.

Il est connu que le graphe  $G_{(M,g,f)}$  est connexe.

Ce graphe est *partiellement dirigé*, on l'appelle alors *graphe du programme*  $(M, g, f)$ .

Chaque arête  $(D_1, D_2)$  de  $G_{(M,g,f)}$  est dirigée de la façon suivante. Soit  $D$  l'unique cocircuit obtenu par élimination de  $g$  entre  $D_1$  et  $D_2$ . Si  $f$  est positif dans  $D$  alors l'arête est dirigée de  $D_1$  vers  $D_2$  ( $f$  est croissant dans la direction  $D$ ). Si  $f$  est négatif dans  $D$  alors l'arête est dirigée de  $D_2$  vers  $D_1$  ( $f$  est décroissant dans la direction  $D$ ). Si  $f$  n'appartient pas à  $D$ , l'arête est *parallèle* à  $f$  et n'est pas orientée.

Géométriquement, les segments des pseudocercles (faces de dimension 1) non parallèles à  $f$ , et non portés par  $g$ , sont dirigés de  $f$  vers  $g$ , dans le sens dit *croissant*. Les faces de dimension 1 non dirigées sont celles qui sont portées par un élément  $e$  tel que  $efg$  est un circuit du matroïde sous-jacent.

*Remarque.*

Un matroïde de rang  $r$  est uniforme si toute partie à  $r$  éléments de  $E$  est une base (c'est-à-dire dans le cas réalisable si les hyperplans sont en position générale). Les paires  $(D_1, D_2)$  modulaires de cocircuits sont alors celles satisfaisant  $|D_1 \triangle D_2| = 2$ , et toutes les faces de dimension 1 portées ni par  $f$  ni par  $g$  sont dirigées.

Remarquons de plus que, dans le cas uniforme, ce graphe a pour degré  $r - 1$  : un sommet d'une région est l'intersection de  $r - 1$  pseudohyperplans indépendants et il y a exactement  $r - 1$  pseudodroites contenant ce sommet et touchant la région.

**Résultat connu.** ([OM] 10.1.15, p. 428)

*Les cocircuits optimaux d'un programme de matroïde orienté admissible borné sont ceux qui n'ont pas d'arête sortante dans le graphe du programme.*

Il y a une complication essentielle dans la version matroïdes orientés de la programmation linéaire : le graphe d'un programme admissible et borné a effectivement des sommets sans arête sortante, mais peut en général comporter des cycles, alors que dans le cas réalisable ceci ne peut pas arriver. Ainsi la méthode du simplexe (parcourir le graphe en suivant des arêtes dirigées jusqu'au sommet) qui est assurée de fonctionner dans le cas réalisable, peut boucler en général dans un matroïde orienté. Des adaptations efficaces de cette méthode aux matroïdes orientés ont été étudiées par Bland, Edmonds, Fukuda [OM]... Un programme de matroïde orienté  $(M, f_1, f_2)$  dont le graphe n'a pas de cycle est appelé *euclidien*. Tout programme de rang inférieur ou égal à 3 est euclidien, tout programme réalisable est euclidien. L'exemple non euclidien classique est  $EFM(8)$  de rang 4 à 8 éléments (Edmonds, Fukuda, Mandel, voir [OM] 10.4 p. 461).

## 7. Compléments

- Dans un matroïde général, il n'y a pas de notion de sommet. Le matroïde associé à un graphe ne détermine pas ce graphe en général : un graphe peut par exemple être séparé en deux au niveau d'un point d'articulation sans que cela change le matroïde, ou bien deux arêtes qui forment une coupe du graphe peuvent être interverties sans changer le matroïde.

Le matroïde associé détermine le graphe si et seulement si celui-ci est 3-connexe.

- Il existe des matroïdes non-vectoriels : Vamós.
- Il existe des matroïdes non-orientables : Fano.
- Il existe des matroïdes orientés non réalisables, c'est-à-dire qui ne peuvent être définis à partir d'un arrangement d'hyperplans : non-Pappus.

- On peut définir aussi des matroïdes algébriques en utilisant les relations de dépendances algébriques sur un corps. Tous les matroïdes ne peuvent pas être obtenus ainsi. Ces matroïdes sont très peu connus, on ne sait pas par exemple quel est l'ensemble de leurs duaux.

- On peut caractériser des classes de matroïdes par des mineurs exclus, ainsi par exemple  $U_{2,4}$  est l'unique mineur exclu pour les matroïdes binaire (dont font partie les matroïdes graphiques).

- Il existe aussi des signes pour les bases des matroïdes orientés, appelés parfois 'chirotopes', qui correspondent à l'orientation d'un repère dans l'espace, et qui viennent des relations de Grassmann-Plücker sur les déterminants. Mais il n'en est jamais question dans cette thèse.

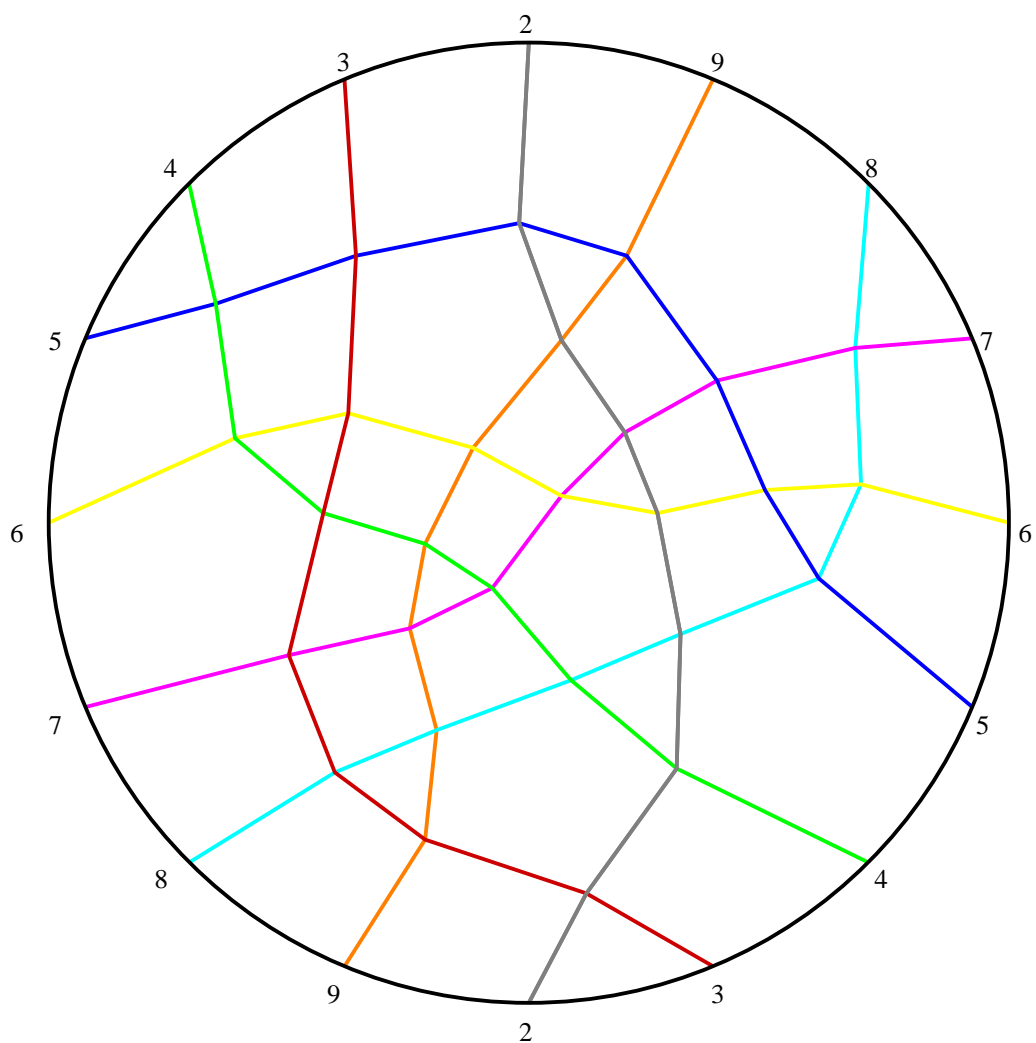


## ANNEXE 3

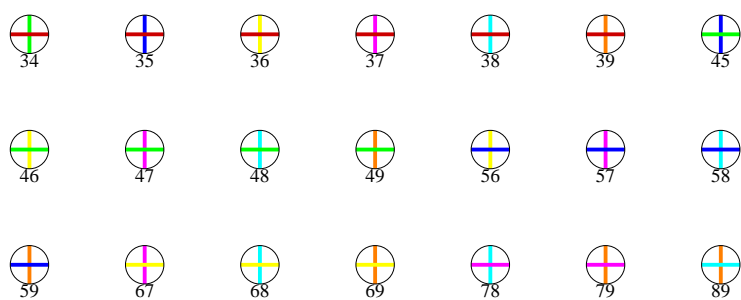
### Récréation.

Les deux petits jeux suivants, ainsi que leurs solutions, ne nécessitent aucune connaissance mathématique préalable.

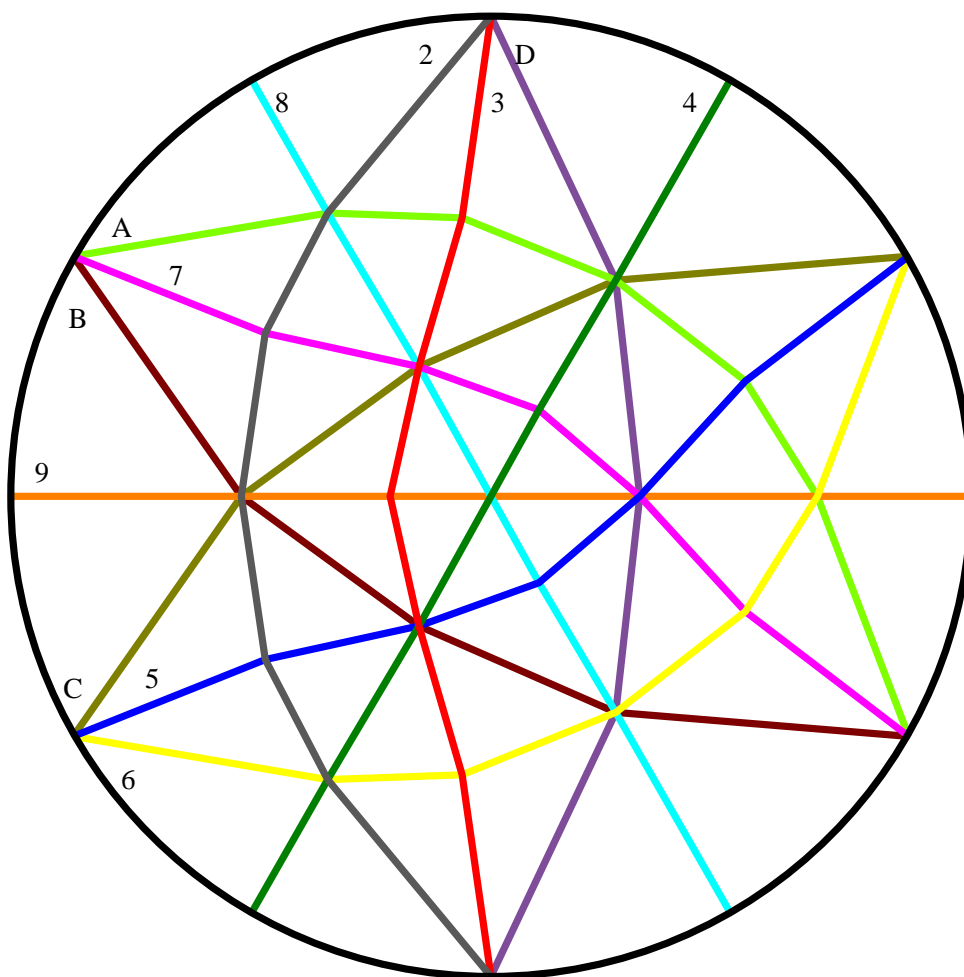




Il faut disposer les 21 pièces ci-dessous dans les 21 régions ne touchant pas le cerclé noir ci-dessus, de sorte que les couleurs de la pièce soient celles de deux bords qui se croisent de la région.

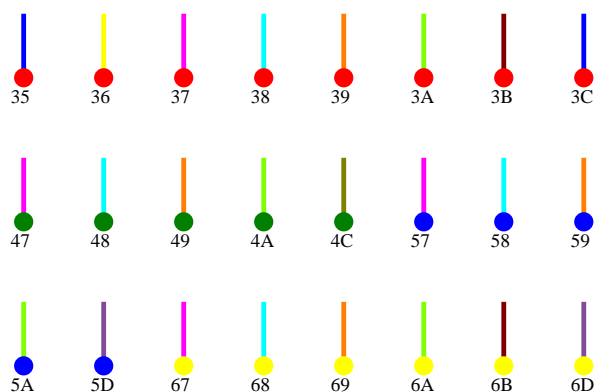






Il faut disposer les 24 pièces ci-dessous dans les 24 régions ne touchant pas le cerclce noir ci-dessus, de sorte que :

- la couleur du segment de la pièce soit la couleur d'un bord de la région ;
- la couleur du point de la pièce soit une couleur passant par une extrémité de ce bord.





## Solution

Ces deux petits jeux ne sont pas des casse-têtes : la solution est qu'il y a toujours une pièce qui n'a qu'une seule région où aller.

Plus précisément, une pièce peut a priori aller dans quatre régions au maximum. Cependant, à cause des régions qui touchent le cercle noir qui sont interdites, certaines ont moins de possibilités. On peut même en trouver une qui n'a qu'une seule région possible, et une fois que la pièce est posée et que cette région est interdite pour les autres pièces, on peut encore trouver une autre pièce qui n'a qu'une seule région où aller, et ainsi de suite... on finit en ayant posé toutes les pièces comme il faut.

Maintenant on peut se poser les questions : plutôt que d'essayer les pièces une par une jusqu'à en trouver une qui n'a qu'une région possible, comment savoir quelle région va être la seule région possible pour une des pièces, et pour quelle pièce? ou encore : comment savoir directement où mettre une pièce donnée?

Pour le premier jeu : la réponse est qu'il suffit de chercher sur le dessin un croisement qui touche trois régions interdites. La région restante est alors forcément associée à la pièce qui porte ce croisement si elle existe. Les pièces portent tous les croisements possibles sans la couleur 2.

Réciproquement, une façon directe de trouver la région dans laquelle doit aller une pièce donnée est la suivante : pour chacune des deux pseudodroites dont les couleurs sont données par la pièce, il y a un seul côté qui coupe la pseudodroite de couleur 2, la région associée est celle qui est entre ces deux côtés.

Indication pour le deuxième jeu : cela ressemble au premier mais cette fois la numérotation joue un rôle...

En termes mathématiques, la bijection établie dans ces jeux est une restriction (régions bornées) d'un cas très particulier (dimension 2) de la *correspondance naturelle entre bases et réorientation des matroïdes orientés ordonnés* qui est l'objet de ma thèse(\*). Cette correspondance peut être caractérisée et construite en général de différentes façons.

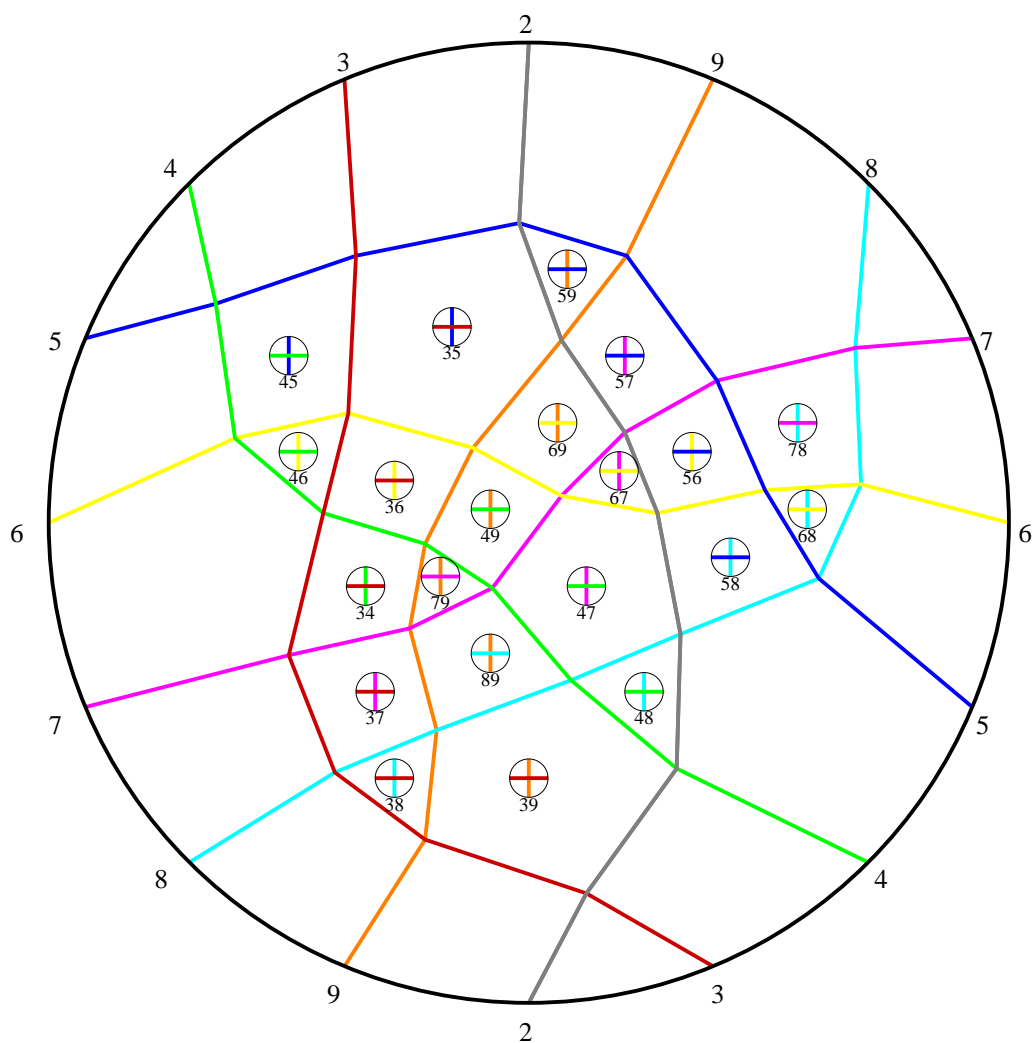
Par exemple la règle du jeu, selon laquelle une pièce ne peut aller dans une région que si une certaine propriété d'adjacence est satisfaite, permet ici de déterminer la bijection. Cette propriété d'adjacence se généralise en dimension supérieure, mais n'y est plus suffisante.

---

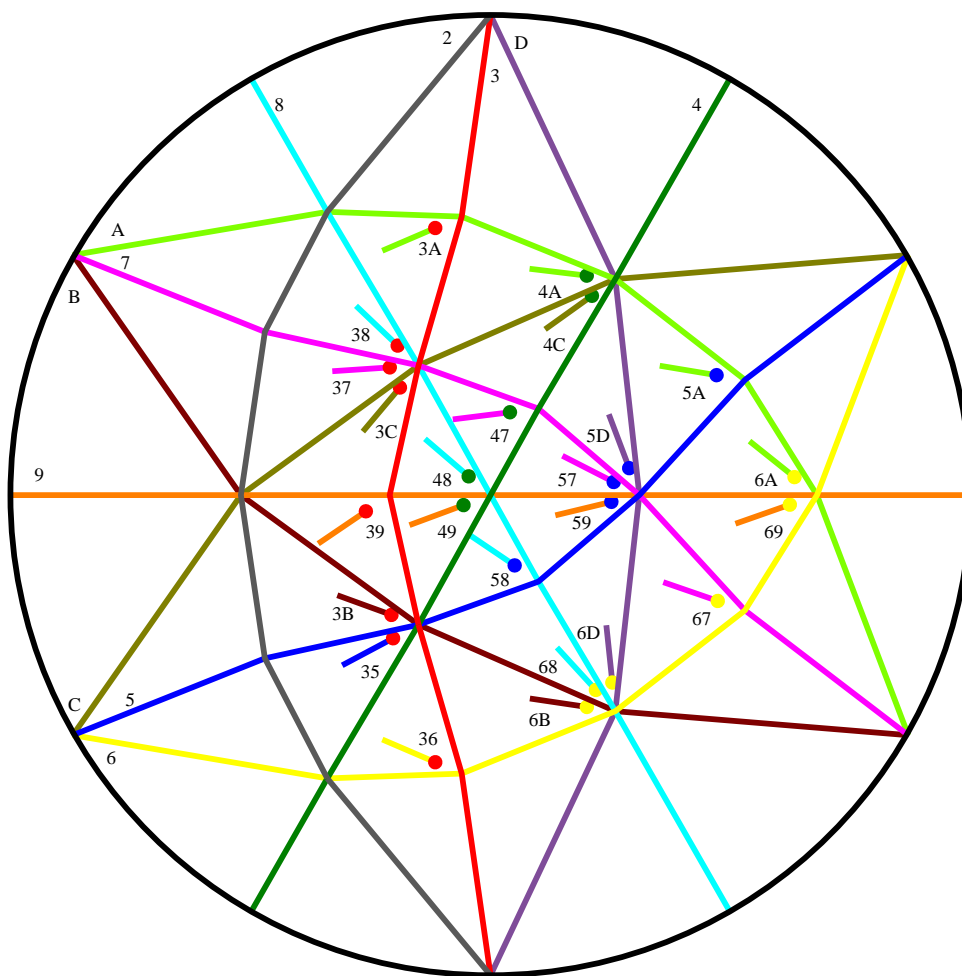
(\*) Le premier jeu illustre la partie 1 du chapitre 6, le deuxième jeu est traité en détails dans la partie 4 du chapitre 6.













# A natural correspondence between bases and reorientations in oriented matroids

## Abstract

The purpose of this thesis is to define and study, intrinsically and constructively, a natural application which associates a distinguished basis with any ordered oriented matroid. For a given ordered oriented matroid, it induces a correspondence, determined by some conditions, between the set of its reorientations and the set of its bases.

A fundamental condition to be satisfied is that activities are preserved. Activities of a basis in an ordered matroid, defined by Tutte, are two dual integer parameters, just as activities of an ordered oriented matroid, defined by Las Vergnas. Briefly, they situate these objects with respect to the minimal and maximal bases for the lexicographic order. The correspondence is thus called the *canonical active correspondence of the ordered oriented matroid*. It constitutes a bijective proof of known numerical properties of the Tutte polynomial.

Another condition is invariance under duality. Duality is used everywhere in an essential way, in fundamental characterizations as well as in algorithms.

The correspondence has remarkable geometrical properties, and can be constructed inductively, either using minors with respect to the greatest element, or using a decomposition of activities which reduces the problem to activities (1,0). In terms of bases, this decomposition gives a new expression of the Tutte polynomial using beta invariants of some minors. In terms of reorientations, this decomposition leads to a notion of *activity classes of reorientations*, which are in *active bijection* with bases. Moreover, this bijection can be refined into an active bijection between all subsets, which induces an active bijection between regions of the oriented matroid and subsets with no broken circuit of the matroid (faces of the NBC complex).

In the graphical case, we get notably an *active bijection* between internal spanning trees and acyclic orientations with a unique given sink, and a bijection between spanning trees with activities (1,0) and acyclic orientations with unique given adjacent source and sink.

In the case of an hyperplane arrangement, we get notably an *active bijection* between internal simplices and activity classes of regions, and a bijection between simplices with activities (1,0) and bounded regions.

If the hyperplanes are in general position, this last bijection comes down to apply the same linear program simultaneously to all bounded regions, on each side of a distinguished hyperplane, kernel of the linear form to be optimized.

The general application appears thus as an extension of the combinatorial version of linear programming in oriented matroids. First, each reorientation is decomposed into bounded regions in some minors of the oriented matroid and its dual, and, secondly, for each bounded region, instead of optimizing one vertex for one objective function, we *optimize a sequence of nested faces for a sequence of objective functions*.

This application arises naturally when one considers a linear ordering on the sets of elements of oriented matroids. It describes, intuitively, a phenomenon of *directed attraction with respect to the ordering*, and could be called the *attractive function of ordered oriented matroids*.

**Keywords :** oriented matroid, hyperplane arrangement, matroid, point configuration, NBC complex, pseudoline arrangement, uniform oriented matroid, supersolvable arrangement, base, reorientation, region, Tutte polynomial, activity, beta invariant, bijection, algorithm, duality, graph, spanning tree, orientation, acyclic orientation, source, sink, bipolar orientation, canonical active correspondence, decomposing sequence, active partition, attractive function of ordered oriented matroids, combinatorial optimization, linear programming, multiprogramming, flag programming.

**AMS classification :** 05A15, 05B35, 05B40, 05C, 52B40, 52C30, 52C35, 52C40, 90C05, 90C27, 90C46.

nombre de pages total : 256  
nombre de pages hors annexes, introduction et préliminaires : 150  
nombre de figures : 50  
nombre de références : 46



## Résumé

L'objet de cette thèse est de définir et d'étudier, de façon intrinsèque et de façon constructive, une application naturelle qui à un matroïde orienté ordonné associe une de ses bases. Pour un matroïde orienté ordonné donné, elle induit une correspondance, déterminée par certaines conditions, entre l'ensemble de ses réorientations et celui de ses bases.

Une condition fondamentale à satisfaire est que les activités soient conservées. Les activités d'une base dans un matroïde ordonné, définies par Tutte, sont deux paramètres entiers duaux, de même que les activités d'un matroïde orienté ordonné, définies par Las Vergnas. En très bref, elles situent ces objets par rapport aux bases minimales et maximales pour l'ordre lexicographique. La correspondance est appelée ainsi *correspondance active canonique du matroïde orienté ordonné*, et constitue une preuve bijective de propriétés énumératives connues du polynôme de Tutte.

Une autre condition est qu'elle soit invariante par passage au dual : la dualité est utilisée partout ici de façon essentielle, dans les caractéristiques fondamentales comme dans les algorithmes.

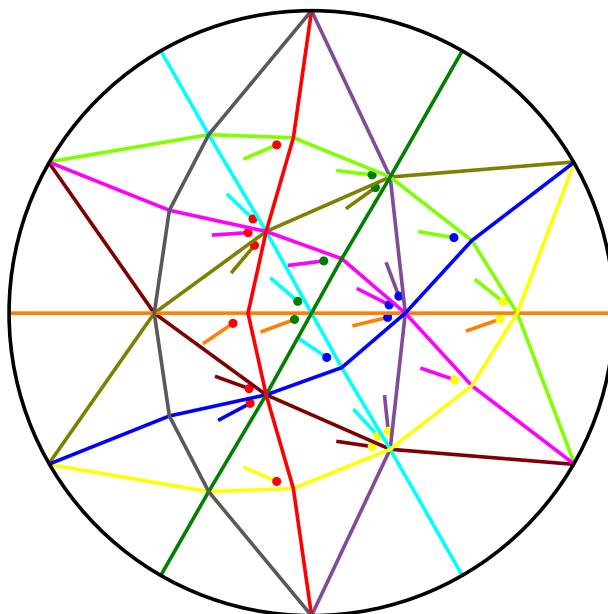
La correspondance a des propriétés géométriques remarquables, et peut-être construite inductivement soit en utilisant les mineurs relativement au plus grand élément, soit en utilisant une décomposition des activités qui réduit le problème aux activités (1,0). En termes de bases, cette décomposition donne une nouvelle expression du polynôme de Tutte utilisant les invariants bête de certains mineurs. En termes de réorientations, cette décomposition conduit à une notion de *classes d'activités de réorientations*, lesquelles sont en *bijection active* avec les bases. En outre, cette bijection peut-être raffinée en une bijection active entre tous les sous-ensembles d'éléments, qui induit une bijection active entre les régions du matroïde orienté et les parties sans circuit brisé du matroïde (faces du complexe NBC).

Dans le cas d'un graphe, on obtient notamment une *bijection active* entre les arbres couvrants internes et les orientations acycliques ayant un unique puits fixé ; ainsi qu'une bijection entre arbres couvrants d'activités (1,0) et les orientations acycliques ayant un unique puits et une unique source adjacents fixés.

Dans le cas d'un arrangement d'hyperplans, on obtient notamment une *bijection active* entre les simplexes internes et les classes d'activités de régions, ainsi qu'une bijection entre les simplexes d'activités (1,0) et les régions bornées. Si les hyperplans sont en position générale, cette dernière bijection s'obtient en appliquant le même programme linéaire simultanément à toutes les régions bornées, de chaque côté d'un hyperplan distingué, noyau de la forme linéaire à optimiser.

L'application générale revient ainsi à une extension de la version combinatoire dans les matroïdes orientés de la programmation linéaire : d'une part chaque réorientation se décompose en régions bornées dans des mineurs du matroïde orienté et de son dual, et d'autre part pour chaque région bornée, au lieu d'un sommet pour une fonction objective, on optimise une suite de faces emboîtées pour une suite de fonctions objectives.

Cette application apparaît naturellement dès que l'on considère un ordre total sur les éléments des matroïdes orientés. Elle décrit, intuitivement, un phénomène d'*attraction dirigée par l'ordre des éléments*, et peut-être appelée *fonction attractive des matroïdes orientés ordonnés*.



**Mots clés :** matroïde orienté, arrangement d'hyperplans, matroïde, configuration de points, complexe NBC, arrangement de pseudodroites, matroïde orienté uniforme, arrangement hyperrésoluble, base, réorientation, région, polynôme de Tutte, activité, invariant bête, bijection, algorithme, dualité, graphe, arbre couvrant, orientation, orientation acyclique, source, puits, orientation bipolaire, correspondance active canonique, suite décomposante, partition active, fonction attractive des matroïdes orientés ordonnés, optimisation combinatoire, programmation linéaire, multiprogrammation, programmation en drapeaux.