Les matroïdes et matroïdes orientés : objets combinatoires, topologiques et algébriques.

Seconde partie : matroïdes orientés

Un *matroïde orienté* M sur un ensemble fini E est défini par diverses axiomatiques équivalentes (Las Vergnas, Bland, Folkman, Lawrence, années 1970).

partie signée $A = (A^+, A^-)$ de E : $\underline{A} \subseteq E$ et $\underline{A} = A^+ \uplus A^-$.

- Axiomatique des circuits (ou des cocircuits)

Un ensemble de parties signées $\mathcal{C}$ d'un ensemble fini est l'ensemble des *circuits* (ou des *cocircuits*) d'un matroïde orienté si et seulement si

(i) $\emptyset \notin \mathcal{C}$;

(ii) $\mathcal{C} = -\mathcal{C}$; (symétrie)

(iii) pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$ si $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$ alors $X = Y$ ou $X = -Y$; (incomparabilité)

(iv) pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$, $X \neq Y$, $e \in X^+ \cap Y^-$ et $f \in (X^+ \setminus Y^-) \cup (X^- \setminus Y^+)$, il existe $Z \in \mathcal{C}$ tel que

$Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) - e$

$Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) - e$

et $f \in \underline{Z}$. (élimination forte des (co)circuits)

Si l'on ne tient pas compte des signes, on trouve l'axiomatique des (co)circuits du *matroïde sous-jacent* $\underline{M}$, dont les (co)circuits sont les supports des (co)circuits du matroïde orienté M.

• Dualité

La signature des circuits détermine celle des cocircuits par orthogonalité des circuits et des cocircuits de M.

orthogonalité : $A \perp B$ si on a soit $\underline{A} \cap \underline{B} = \emptyset$, soit $(A^+ \cap B-) \cup (A^- \cap B^+) \neq \emptyset$ et $(A^+ \cap B+) \cup (A^- \cap B^-) \neq \emptyset$

<u>ex</u> : si C est un circuit, D est un cocircuit et $C \cap D = \{e, f\}$ alors e et f sont de même signe dans C et de signes opposés dans D, ou bien de signes opposés dans C et de même signe dans D.

Le *matroïde dual* de M, noté M^*, a pour matroïde sous-jacent le dual de $\underline{M}$, et pour circuits les cocircuits de M.

L'ensemble des cocircuits, resp. circuits, de M^* est l'ensemble des circuits, resp. cocircuits, de M. L'ensemble des covecteurs, resp. vecteurs, de M^* est celui des vecteurs, resp. covecteurs, de M.

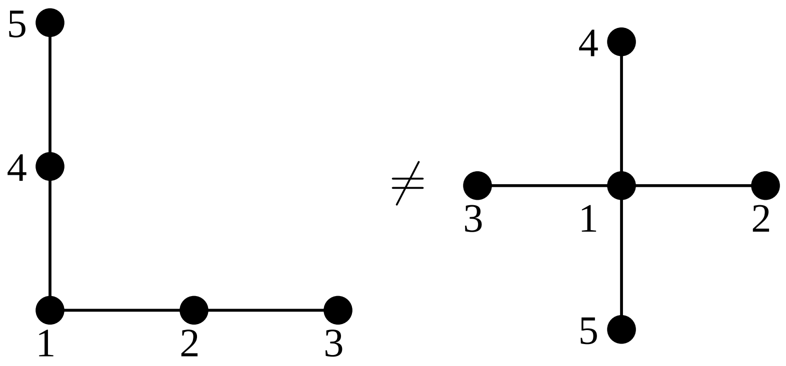
• Configuration de points

Soit E est un ensemble fini dans un espace vectoriel <u>réel</u>.

Les signes des circuits sont les signes dans les relations de dépendance linéaire.

M est dit *réalisable*. M^* est alors aussi réalisable.

<u>ex</u>



M_1 M_2

$$\mathcal{C}_1 = \{1\overline{2}3, \overline{1}2\overline{3}, 1\overline{4}5, \overline{1}4\overline{5}, 2\overline{34}5, \overline{2}34\overline{5}\}$$

$1\overline{2}3 = \underset{1}{+}\ \underset{2}{-}\ \underset{3}{+} \in \mathcal{C}_1$ signifie “2 est entre 1 et 3” dans M_1.

$$\mathcal{C}_2 = \{\overline{1}23, 1\overline{23}, \overline{1}45, 1\overline{45}, \overline{23}45, 23\overline{45}\}$$

Deux éléments sont de même signe dans un *cocircuit* si ils sont du même côté de l'hyperplan complémentaire du cocircuit.

<u>ex</u>

$$\mathcal{C}_1^* = \{23, \overline{23}, 45, \overline{45}, 124, \overline{124}, 1\overline{3}4, \overline{1}3\overline{4}, 1\overline{35}, \overline{1}35, 12\overline{5}, \overline{12}5\}$$

• Théorème d'Universalité de Mnëv.

Soient 2 configurations de n points représentant le même matroïde orienté.

Question (ex-conjecture d'isotopie) : peut-on passer de l'une à l'autre par une isotopie de l'espace sans changer le matroïde orienté? Autrement dit : l'espace de réalisation d'un matroïde orienté est-il connexe?

La réponse est NON.

Théorème. (Mnëv 1988)

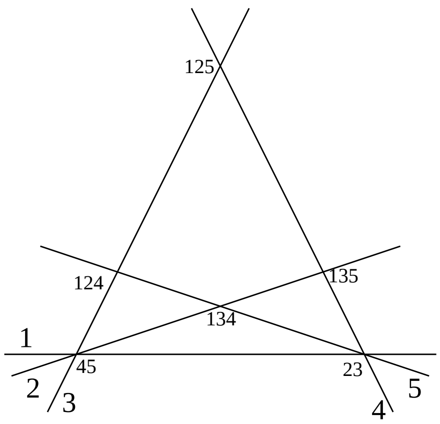
Les espaces de réalisation des matroïdes orientés sont birationnellement équivalents aux variétés semi-algébriques réelles.

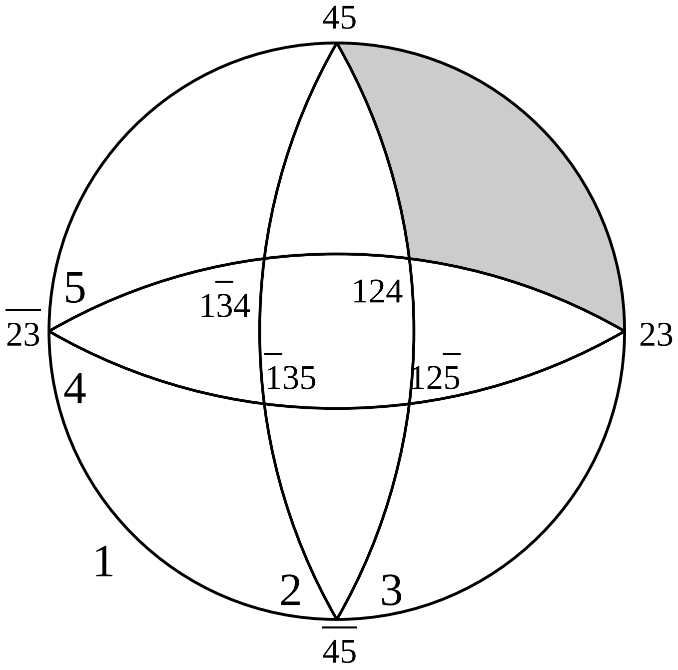
• Arrangement d'hyperplans

Soit E un ensemble fini d'hyperplans d'un espace vectoriel réel.

signature de l'arrangement : choix d'un demi-espace positif pour chaque hyperplan.

Le matroïde orienté associé est défini par la configuration des formes linéaires (signées) correspondant aux hyperplans et à la signature.





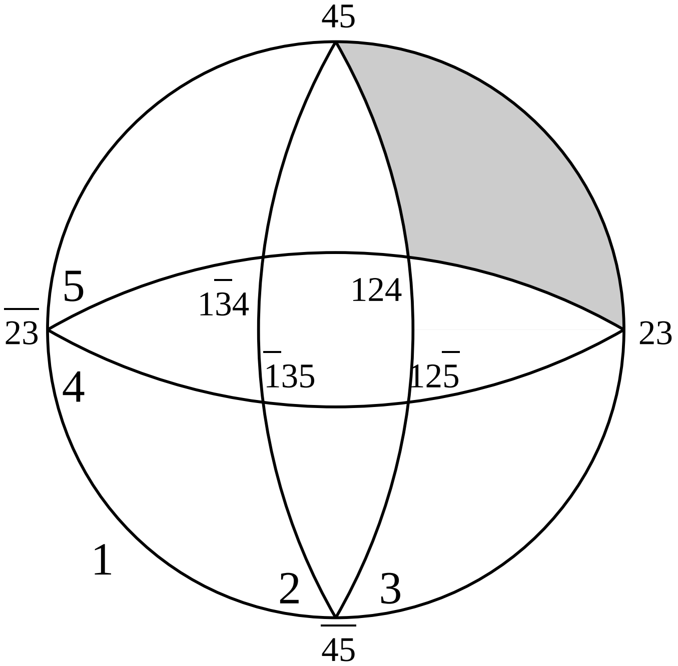
On représente l'arrangement par son intersection avec une sphère centrée en l'origine.
Les cocircuits correspondent aux faces de dimension 1 (intersections des fermés de rang $r-1$). Le signe d'un élément est le signe du demi-espace correspondant auquel il appartient.

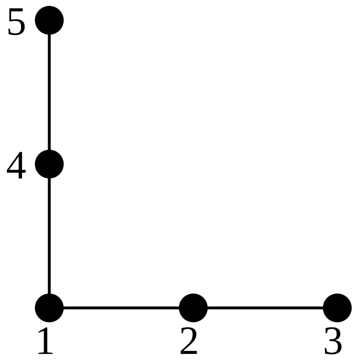
ex : $\mathcal{C}^* = \{$ 45, 23, 124, $\overline{1}35$, $1\overline{3}4$, $12\overline{5}$ et leurs opposés $\}$.

Le matroïde orienté décrit en fait toutes les faces (covecteurs).

• Réorientation

réorientation selon $A \subseteq E$: le matroïde $-_A M$ obtenu en changeant la signature des éléments de A dans M (i.e. le signe des éléments de A dans les circuits, ou cocircuits, ou vecteurs, ou covecteurs de M)





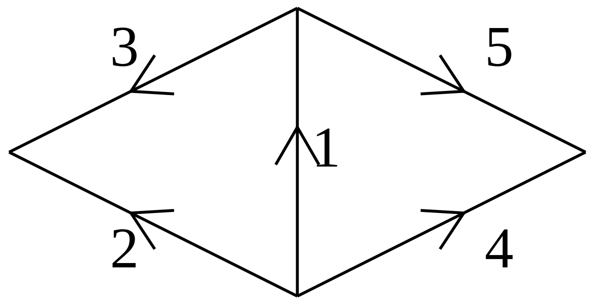
ex . Dans la figure, l'intersection des demi-espace positifs est une région (grisée), le matroïde orienté est dit *acyclique.* Le matroïde orienté $-_2 M$ n'est pas acyclique (il y a un circuit positif 123).

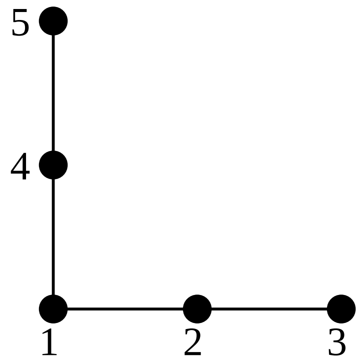
classe de réorientation : ensemble des $-_A M$ pour $A \subseteq E$.

Rq. dans une configuration de points, on ne choisit pas de signature, on obtient toujours un matroïde orienté acyclique (i.e. pas de circuit positif), une réorientation (acyclique) revient à une transformation projective.

• Graphes

Soit E l'ensemble des arêtes d'un graphe orienté $G = (V, E)$.





Pour le matroïde *graphique* orienté correspondant :

- les réorientations sont les orientations du graphe

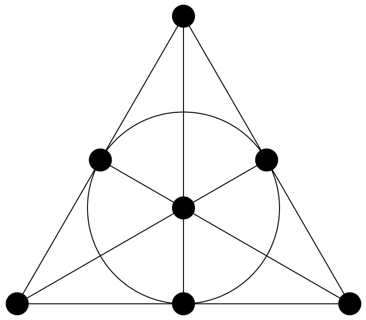
- les circuits sont les cycles minimaux, un élément est positif si l'arête est orientée selon un sens de parcours choisi

- les cocircuits sont les coupes minimales, un élément est positif si l'arête est orientée selon un sens de parcours choisi de la coupe (de A vers B pour $V = A \uplus B$)

• Il existe des classes de réorientations distinctes de matroïdes orientés ayant même matroïde sous-jacent :

<u>un</u> matroïde orienté uniforme (n points en position générale en dimension r) a pour matroïde sous-jacent <u>le</u> matroïde $U_{n,r}$.

• Il existe des matroïdes non orientables : matroïde de Fano



• Vecteurs et covecteurs.

composition : $A = (A^+, A^-)$ et $B = (B^+, B^-)$ deux parties signées. $A \circ B = \big(A^+ \cup (B^+ \setminus \underline{A}), A^- \cup (B^- \setminus \underline{A})\big)$

composition conforme : lorsque les éléments de $\underline{A} \cap \underline{B}$ ont mêmes signes dans A et B.

Définition. L'ensemble des *vecteurs* (resp. *covecteurs*) est engendré par composition conforme à partir de l'ensemble des circuits (resp. cocircuits).

Axiomatique. Un ensemble $\mathcal{V}$ de parties signées d'un ensemble fini est l'ensemble des vecteurs (ou des covecteurs) d'un matroïde orienté si et seulement si

(i) $\emptyset \in \mathcal{V}$;

(ii) $\mathcal{V} = -\mathcal{V}$; (symétrie)

(iii) pour tout $X, Y \in \mathcal{V}$ on a $X \circ Y \in \mathcal{V}$; (composition)

(iv) pour tout $X, Y \in \mathcal{V}$, $e \in X^+ \cap Y^-$ et $f \in (\underline{X} \setminus \underline{Y}) \cup (\underline{Y} \setminus \underline{X}) \cup (X^+ \cap Y^+) \cup (X^- \cap Y^-)$, il existe $Z \in \mathcal{V}$ tel que

$Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) - e$

$Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) - e$

et $f \in \underline{Z}$. (élimination forte des vecteurs)

Dualité. L'ensemble des parties signées orthogonales à tous les vecteurs (resp. covecteurs), est égal à l'ensemble des parties signées orthogonales à tous les circuits (resp. cocircuits). C'est l'ensemble des vecteurs (resp. covecteurs) du matroïde orienté M^* dual de M sur E.

• Arrangements de pseudosphères

S^d = la sphère unité de l'espace réel de dimension $d+1$.

pseudosphère : S homéomorphe à S^{d-1} dans un homéomorphisme de S^d.

côtés d'une pseudosphère : les deux composantes connexes de $S^d \setminus S$.

arrangement de pseudosphères : ensemble fini de pseudosphères S_e, $e \in E$, de S^d tel que

(i) $S_A = \cap_{e \in A} S_e$ est une pseudosphère, pour tout $A \subseteq E$.

(ii) Si $S_A \not\subseteq S_e$ pour $A \subseteq E$, $e \in E$, et S_e^+ et S_e^- sont les deux côtés de S_e, alors $S_A \cap S_e$ est une pseudosphère de S_A ayant pour côtés $S_A \cap S_e^+$ et $S_A \cap S_e^-$.

Si $S_E = \emptyset$ l'arrangement est dit *essentiel*.

signature : on choisit pour chaque pseudosphère S_e, $e \in E$, un côté positif S_e^+ et un côté négatif S_e^-.

Deux arrangements signés sont *équivalents* si ils sont égaux à un homéomorphisme de S^d près conservant la signature.

réorientation selon $A \subseteq E$: on change la signature sur A.

• Faces de l'arrangement - Covecteurs du matroïde orienté.

Tout $a \in S^d$ définit une partie signée A : $e \in A^+$ si et seulement si $a \in S_e^+$ et $e \in A^-$ si et seulement si $a \in S_e^-$ (ainsi $e \notin \underline{A}$ si et seulement si $a \in S_e$)

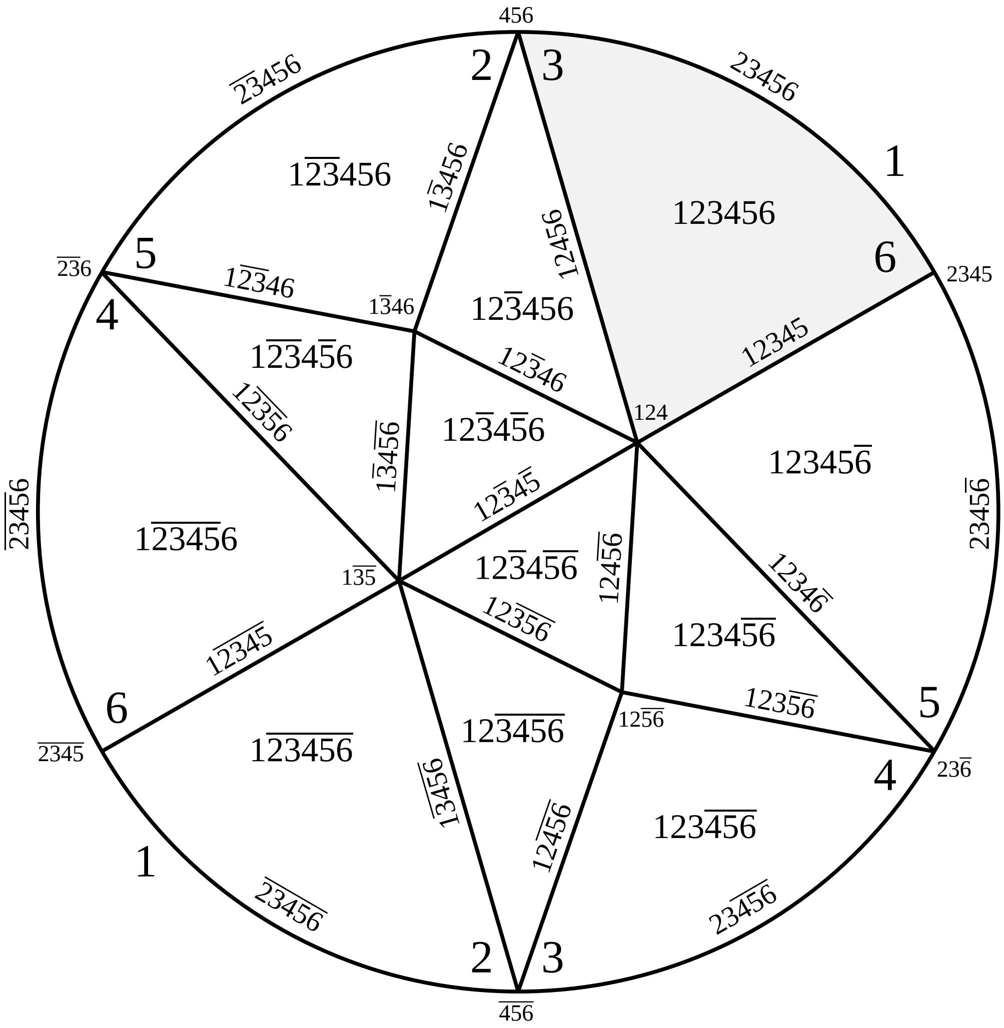
Ces parties signées forment un ensemble de *covecteurs*.

cocircuits $\longleftrightarrow$ faces de dimension 0

covecteur = complémentaire signé d'un fermé de rang k

$\longleftrightarrow$ face de dimension $r - k - 1$

covecteurs maximaux $\longleftrightarrow$ régions (faces de dimension $r-1$)



• Théorème de représentation topologique.

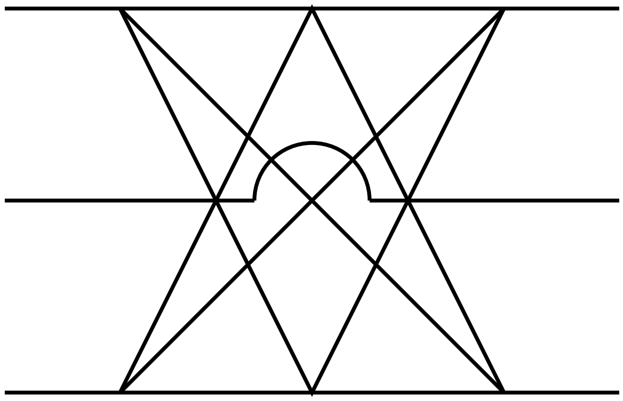
Le matroïde orienté associé à un arrangement signé détermine sa classe d'équivalence.

Réciproquement, un matroïde orienté peut-être représenté par un arrangement de pseudosphères.

Théorème. (Folkman Lawrence 1978)
Les matroïdes orientés de rang $d+1$ (sans boucles) sont les classes d'équivalence des arrangements de pseudosphères essentiels signés de S_d.

(une *boucle* est un élément de rang 0, il n'appartient à aucune base)

<u>Remarques</u>
- Il existe des matroïdes orientés non réalisables : non-Pappus.



- On ne peut pas caractériser combinatoirement les arrangements d'hyperplans (infinité de mineurs exclus pour avoir des pseudosphères 'droites').

- Question ouverte (dès le début) : existe-t'il une région simpliciale dans un arrangement de pseudosphères?

• Régions $\leftrightarrow$ covecteurs maximaux $\leftrightarrow$ réorientations acycliques.

Bijections canoniques car :

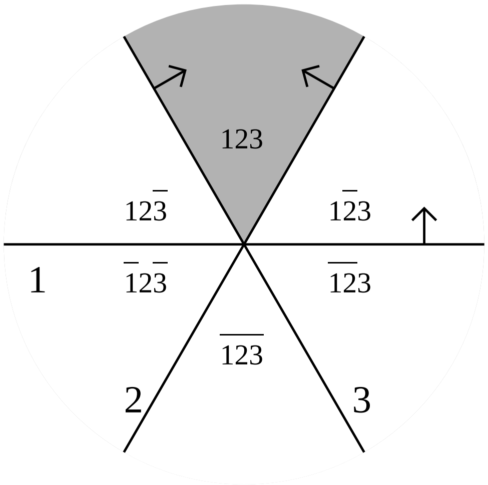
l'intersection des demi-espaces positifs est une région

$\Leftrightarrow$

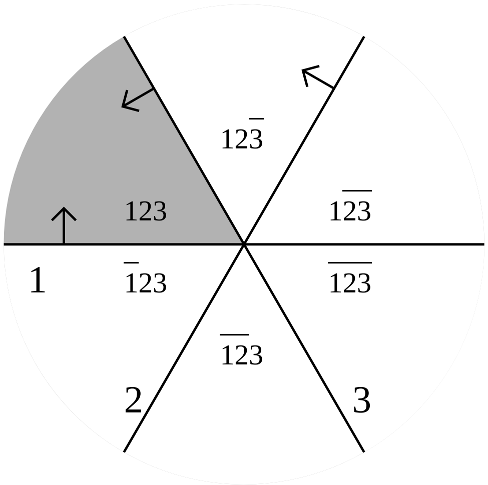
il existe un covecteur maximal positif

$\Leftrightarrow$

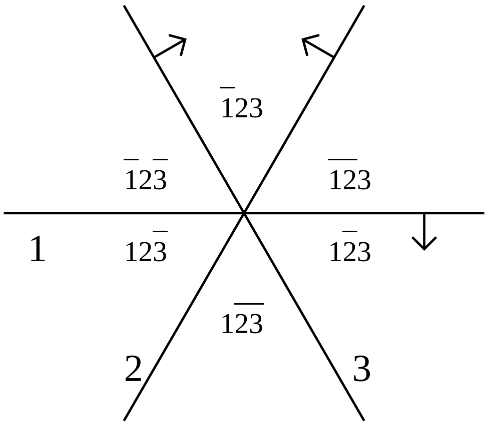
le matroïde orienté est acyclique, i.e il n'y a pas de circuit positif (par orthogonalité)



M acyclique



$-_3$M acyclique



$-_1$M non acyclique

• Décomposition de l'ensemble des réorientations en régions

Prop. (lemme de blocage dans les matroïdes orientés)
Tout élément appartient à un cocircuit positif ou un circuit positif mais pas les deux.

Soit F l'union des circuits positifs, $E - F$ est l'union des cocircuits positifs.

Prop. *F est un fermé de M, $E \setminus F$ est un fermé de M^*, $M(F)$ est totalement cyclique (i.e. son dual est acyclique), M/F est acyclique*

Prop.

$$\{+,-\}^E = \Big\{\text{covect. max de } M\Big\} + \sum_{\substack{F \neq \emptyset \text{ fermé de } M \\ E\setminus F \neq \emptyset \text{ fermé de } M^*}} \Big\{\{\text{covect. max de } M/F\} + \{\text{vect. max de } M(F)\}\Big\} + \Big\{\text{vect. max de } M\Big\}$$

On trouve une décomposition similaire à celle des bases et

$$t(M; x, y) = \sum_{\substack{F \subseteq E \\ F \text{ fermé de } M \\ E \setminus F \text{ fermé de } M^*}} t(M/F; x, 0)\ t(M(F); 0, y)$$

$t(M; 2, 0) = \#$ covecteurs maximaux de M
$t(M; 1, 0) = \#$ bases $\mathcal{NBC}$ de M
$t(M; 0, 2) = \#$ covecteurs maximaux de M^*
$t(M; 0, 1) = \#$ bases $\mathcal{NBC}$ de M^*

• Représentation par une grassmannienne (cas réalisable)

$e_1, ..., e_n$ base canonique de R^n.

A arrangement des hyperplans $h_i = e_i^{\perp}$, $1 \leq i \leq n$.

V un sous-espace de dimension r de R^n.

M_V le matroïde orienté défini par l'arrangement dans V des $V \cap h_i$, $1 \leq i \leq n$.

M_V est de cardinal n et de rang r, et

$$M_V{}^* = M_{V^\perp}$$

<u>Bijections canoniques</u> :

signatures de $M \longleftrightarrow$ régions de A

régions de M (covecteurs maximaux)

$\longleftrightarrow$ régions de A d'intersection de dim. r avec V

régions de M^* (vecteurs maximaux)

$\longleftrightarrow$ régions de A d'intersection nulle avec V

régions de M/F $\times$ régions de $M^*/(E \setminus F)$

$\longleftrightarrow$ régions de A d'intersection $\cap_{f \in F} f$ avec V.

• Activités des réorientations

Soit un <u>ordre total</u> sur E.
activité de $M = o(M)$
$= \#$ plus petits éléments de circuits positifs de M
activité duale de $M = o^*(M) = o(M^*)$
$= \#$ plus petits éléments de cocircuits positifs de M

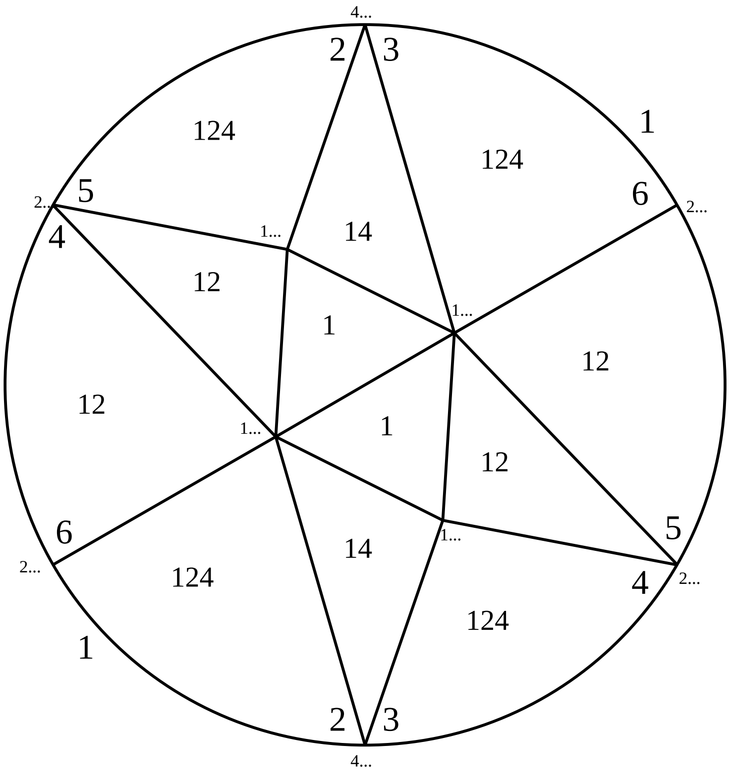
$o(M) = 0$ si et seulement si M est acyclique.

si $o(M) = 0$, $o^*(M)$ indique la situation de la région M par rapport au drapeau minimal

$$< b_1 > \subset < b_1 b_2 > \subset \ldots \subset < b_1 \ldots b_r >$$

où $B_{min} = b_1 \ldots b_r$ est la base minimale pour l'ordre lexicographique et l'ordre interne des bases : $Int(B_{min}) = r$.

<u>ex</u> Ici $B_{min} = 124$.



• Une propriété géométrique curieuse

Les réorientations d'activités $(1,0) = (o^*(-_A M), o(-_A M))$ sont les régions ne touchant pas le plus petit élément f_1. Leur nombre ne dépend pas de l'ordre, donc

le nombre de régions ne touchant pas un élément ne dépend pas de l'élément choisi

ce nombre est $2\beta(M) = 2b_{1,0}(M)$.

• Polynôme de Tutte

Théorème. (Las Vergnas 1984)

$$t(M;x,y) = \sum_{A\subseteq E} \left(\frac{x}{2}\right)^{o^*(-_A M)} \left(\frac{y}{2}\right)^{o(-_A M)} = \sum_{i,j} o_{i,j} \left(\frac{x}{2}\right)^{i} \left(\frac{y}{2}\right)^{j}$$

où $o_{i,j} =\#$ réorientations d'activités (i,j), i. e. d'activité duale i et d'activité (primale) j

$t(M;2,0) =\#$ régions de M (réorientations acycliques)

On a déjà vu

$$t(M;x,y) = \sum_{i,j} b_{i,j} x^i y^j$$

où $b_{i,j} =\#$ bases d'activités (i,j), i. e.d'activité interne i et externe j

$t(M;2,0) = \#\mathcal{NBC}$

$$\boxed{o_{i,j} = 2^{i+j} b_{i,j}}$$

Ces coefficients sont des <u>invariants</u> vis à vis de l'ordre total.

• Construction d'une correspondance active canonique

(Gioan, Las Vergnas 2002)

'active' signifie 'préservant les activités'.

(i) bijection pour $b_{1,0} = \frac{1}{2} o_{1,0}$

(1,0)-bases $\longleftrightarrow$ paires de régions bornées opposées

(pour chaque région bornée, optimisation d'un drapeau suivant l'ordre total)

(ii) correspondance active $1 - 2^i$ pour $o_{i,0} = 2^i b_{i,0}$

bases appartenant à $\mathcal{NBC}$ $\longleftrightarrow$ régions

(vient de (i) et de la décomposition des activités $(i, 0)$ en $(1, 0)$)

(iii) bijection active

$\mathcal{NBC}$ $\longleftrightarrow$ régions

(vient de (ii) et de la partition de $\mathcal{NBC}$ en intervalles, en choisissant une signature de réference)

(iv) correspondance active $1 - 2^{i+j}$ pour $o_{i,j} = 2^{i+j} b_{i,j}$

bases $\longleftrightarrow$ réorientations

(vient de (ii) et de la décomposition des activités (i, j) en $(i, 0)$ et $(0, j)$)

• Bijection fondamentale pour les activités (1,0)

Soit M matroïde orienté ordonné sur E, f_1 le plus petit élément de E, f_2 le plus petit élément indépendant de f_1.

Réorientations d'activités $(1,0)$

Ce sont les régions ne touchant pas f_1, c'est à dire les *régions bornées* si l'on considère f_1 comme le *plan à l'infini*.

Bases d'activité $(1,0)$.

Ce sont les bases dont le tableau fondamental vérifie : le plus petit élément d'une ligne (sauf la première) appartient à une ligne précédente, et le plus petit élément d'une colonne appartient à une colonne précédente.

Les lignes correspondent aux cocircuits fondamentaux.

Les colonnes correspondent aux circuits fondamentaux.

135	1	2	3	4	5	6
1	•	•				•
2		•				
3		•	•	•		•
4				•		
5		•		•	•	•
6						•

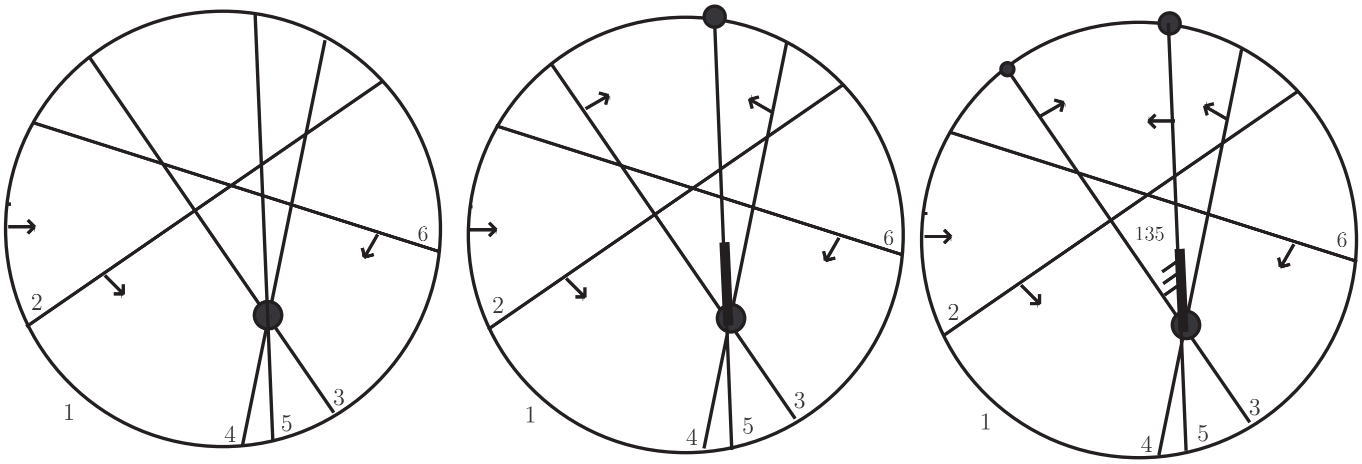
Des (1,0)-bases aux (1,0)-réorientations

A une $(1,0)$-base B, on associe les deux réorientations opposées, telles que, dans le tableau fondamental de B, le plus petit élément d'une ligne (sauf la première) est signé $-$, et le plus petit élément d'une colonne est signé $+$.

135	1	2	3	4	5	6
1	+	+				+
2		-				
3		-	+	+		x
4				-		
5		-		x	+	x
6						-

Proposition. *Ces deux réorientations sont d'activités* $(1,0)$.

ex Base 135



Pas 1 Pas 2 Pas 3

Théorème fondamental.

L'application définie par ces algorithmes est une bijection entre les $(1,0)$*-bases et les régions bornées.*

<u>Des (1,0)-réorientations aux (1,0)-bases</u>.

La base associée à une région bornée est sa base *optimale.* Elle peut-être calculée inductivement par suppression/contraction du plus grand élément.

• Extensions de la programmation linéaire.

En programmation linéaire dans les matroïdes orientés, un élément f_1 est considéré comme le plan à l'infini et un élément f_2 comme le noyau d'une forme linéaire à optimiser.

Un cocircuit (sommet) C est alors *optimal* si et seulement si $C = C^*(B; f_1)$ (première ligne) est positif (sauf éventuellement sur f_2) et $C(B; f_2)$ (première colonne) est négatif (sauf éventuellement sur f_1).

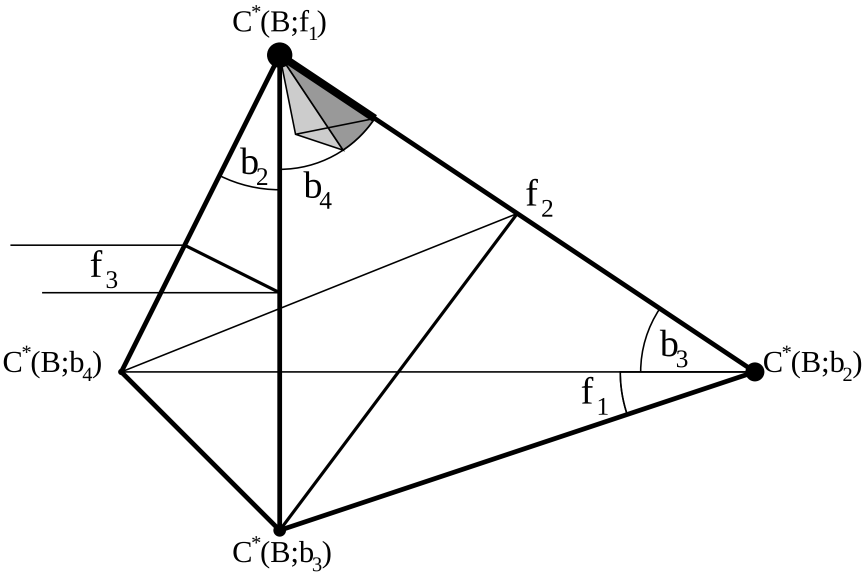
Ici, on prend en compte TOUTES les colonnes et TOUTES les lignes, au lieu de la première de chaque.

Au lieu d'un sommet pour une forme linéaire, on optimise, dans une région bornée, une base ordonnée par rapport à la base ordonnée minimale :

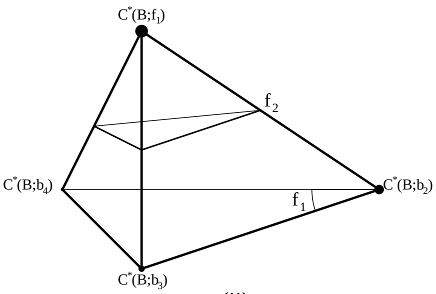
on optimise une suite de faces emboîtées pour une suite de fonctions objectives...

... et on obtient une bijection.

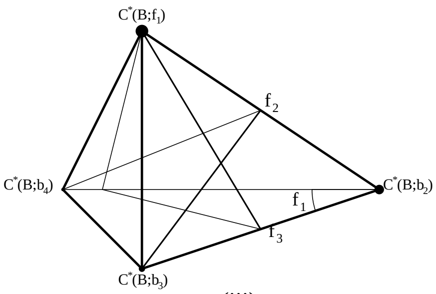
• Quelques situations de rang 4



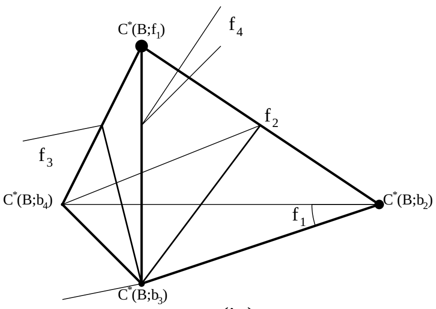
(i)



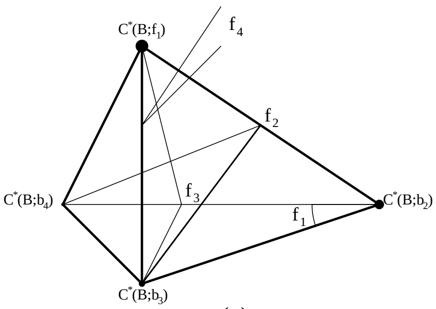
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

Toutes les situations possibles s'emboitent, de telle façon que l'on a une bijection entre les régions bornées et leurs (1,0)-bases optimales.

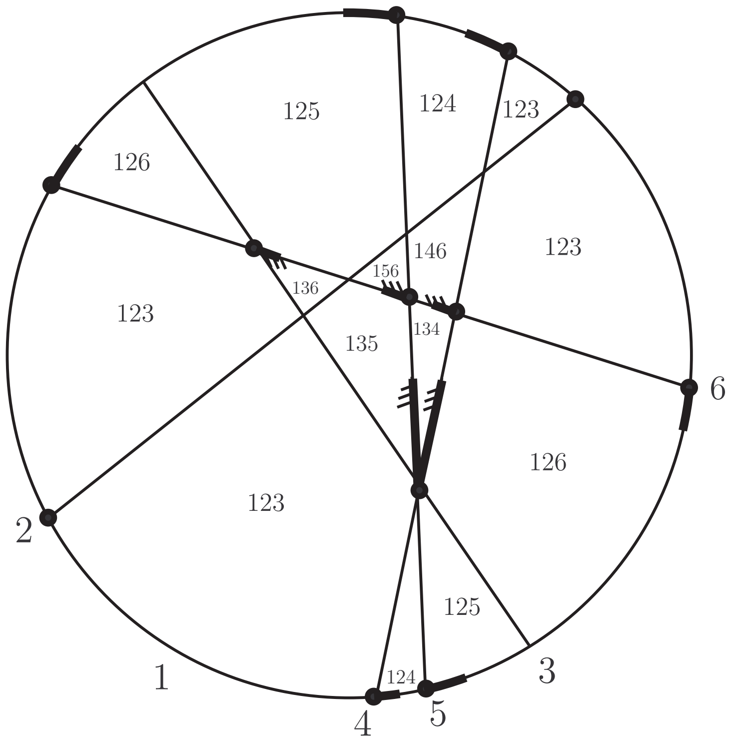
• Théorème d'extension.

En raffinant la décomposition des réorientations en régions de mineurs du matroïde orienté et de son dual en une décomposition des réorientations en régions bornées, on retrouve :

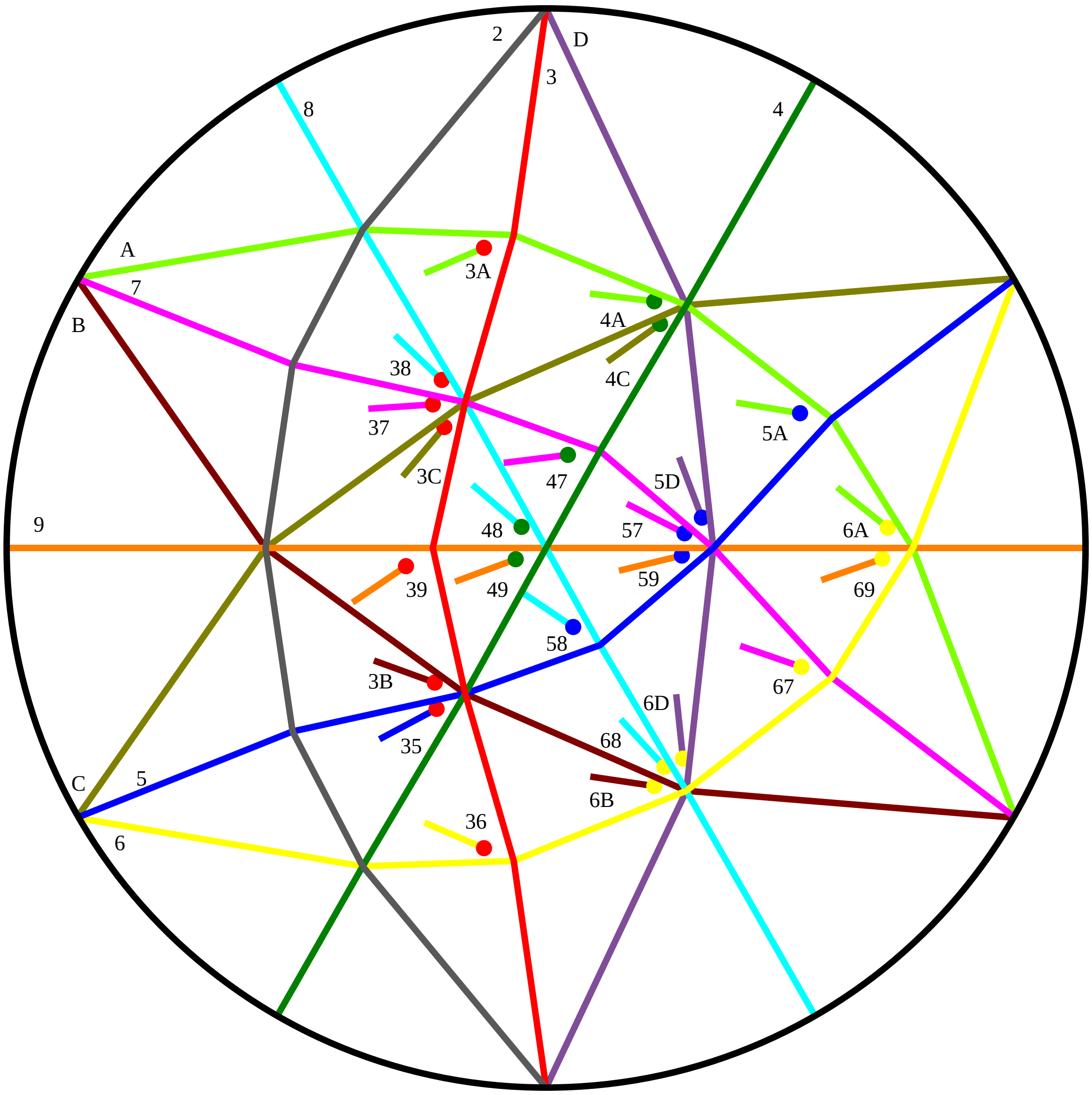
$$t(M;x,y) = \sum_{\substack{\emptyset=F^*_\varepsilon\subset\dots\subset F^*_0=F_c\\ F_c=F_0\subset\dots\subset F_\iota=E\\ \text{décomposante}}} \Big(\prod_{1\leq k\leq\iota}\beta(M(F_k)/F_{k-1})\Big) \Big(\prod_{1\leq k\leq\varepsilon}\beta(M(F^*_{k-1})/F^*_k)\Big)\, x^\iota y^\varepsilon$$

où $\beta(M) = b_{1,0}(M)$

Les deux décompositions (bases et réorientations) utilisent le même ensemble de *suites décomposantes*, et on en déduit un **théorème d'extension** : *une bijection pour les activités (1,0) s'étend naturellement en une* $1-2^{i+j}$ *correspondance active entre bases et réorientations.*

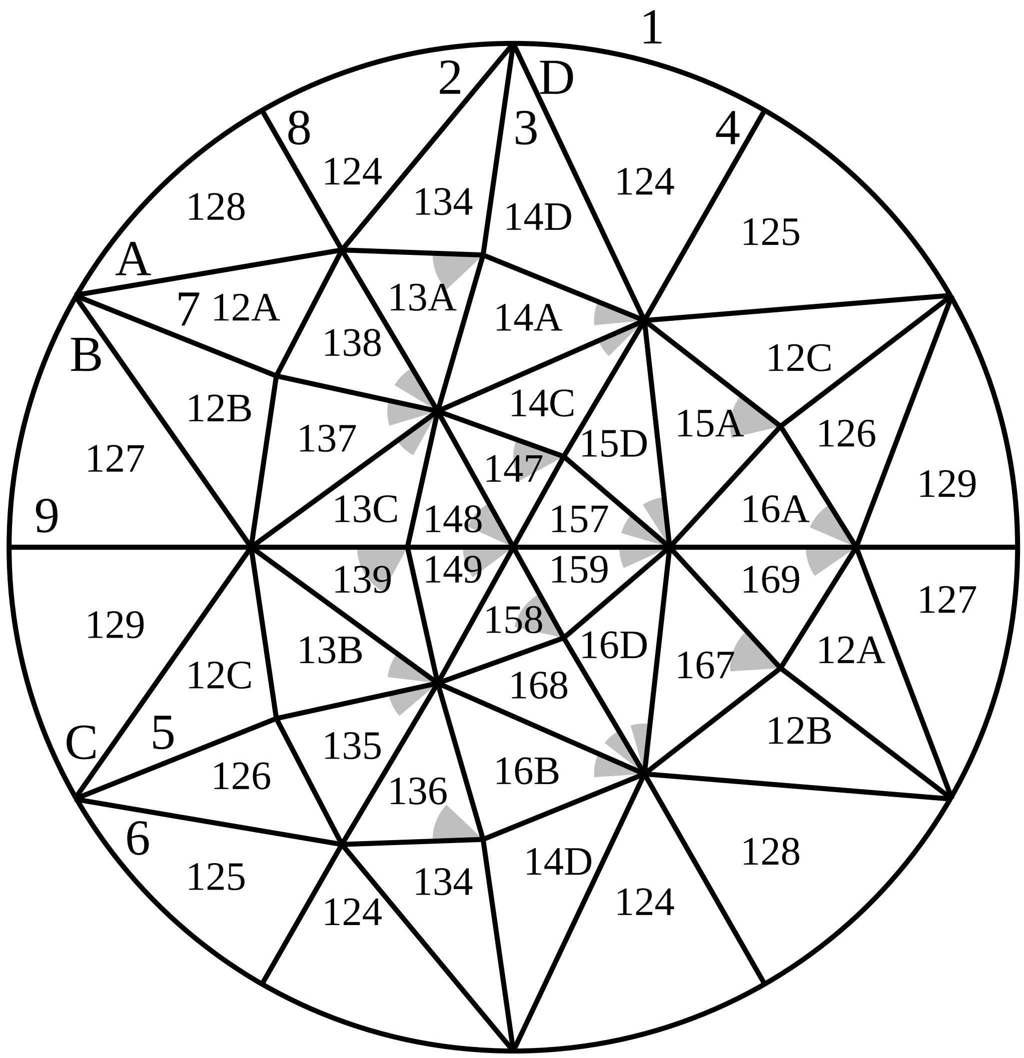


• Phénomène d'attraction dirigée par l'ordre total



Dans chaque région bornée est dessiné le drapeau optimal $p \cap q \subset q$ associé, correspondant à la (1,0)-base $1 < p < q$.

• Correspondance (attr)active canonique bases-réorientations



Elle est obtenue par extension à partir de la bijection précédente. Ici ne sont représentées que les réorientations acycliques (régions), elles sont associées aux bases d'activtié externe nulle (bases appartenant à $\mathcal{NBC}$).

La correspondance active ne dépend que de la classe de réorientations du matroïde orienté et de l'ordre total.

• Bijection naturelle $\mathcal{NBC} \longleftrightarrow$ régions

$$\mathcal{NBC} = \biguplus_{B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{NBC}} [B \setminus Int(B), B]$$

En choisissant une réorientation de référence (grisée), les 2^i régions associées à une même base B sont associées aux 2^i parties de l'intervalle $[B \setminus Int(B), B]$, où $\#Int(B) = i$ et $Int(B)$ est l'ensemble des éléments intérieurement actifs de B.