4-coloration des graphes planaires et orientations

Le Théorème des 4 couleurs affirme que toute carte peut être coloriée avec 4 couleurs, de façon à ce que des régions voisines aient des couleurs différentes. Il a fallu plus d'un siècle pour montrer ce résultat et les seuls preuves connues font appel à un programme de vérification. Dis autrement, aucun être humain n'a vérifié *à la main* chaque étape de ces preuves.

D'autre part, le critère de Alon-Tarsi [2] (AT dans ce qui suit) donne un outil de certification si un graphe donné est k-coloriable. Pour une orientation $\overrightarrow{G}$ d'un graphe G, notons $EE(\overrightarrow{G})$ (resp. $EO(\overrightarrow{G})$) le nombre de sous-graphes dirigés Eulériens de $\overrightarrow{G}$ avec un nombre pair (resp. impair) d'arêtes. On dit que G vérifie le critère AT si $EE(\overrightarrow{G}) \neq EO(\overrightarrow{G})$.

Theorem 1 (Alon et Tarsi, [2]) *Soit G un graphe. Si G admet une orientation $\overrightarrow{G}$ telle que le degré maximum sortant est au plus k et telle que $EE(\overrightarrow{G}) \neq EO(\overrightarrow{G})$, alors G est $(k+1)$-colorable.*

En particulier, un graphe vérifie AT pour la 4-colorabilité s'il admet une orientation $\overrightarrow{G}$ telle que ses sommets ont au plus 3 arcs sortants, et telle que $EE(\overrightarrow{G}) \neq EO(\overrightarrow{G})$.

Il existe des graphes planaires 4-connexes qui ne satisfont pas AT. Le but de ce stage sera de tester une hypothèse mathématique en lien avec le Théorème des 4 couleurs :

Est-il vrai que tout graphe planaire 5-connexe vérifie le critère de Alon-Tarsi pour la 4-colorabilité ?

Si cette hypothèse est vraie, cela impliquerait le Théorème des 4 couleurs !

Le stage comprend une partie programmation (implémentation de fonctions pour générer des orientations, et pour compter leurs sous-graphes Eulériens) et une partie recherche où les étudiants chercheront à identifier les caractéristiques des orientations vérifiant le critère AT. Un autre moyen de vérifier si un graphe G satisfait le critère AT est d'utiliser des outils algébriques tels que le Combinatorial Nullstellensatz [1]. Il serait intéressant de déterminer quelle est la méthode la plus rapide pour décider si un graphe vérifie le critère AT.

L'étudiant pourra également explorer le critère de Matiyasevich [4], lui aussi en lien avec les orientations du graphe sous-jacent. Contrairement au critère AT, celui de Matiyasevich caractérise la k-colorabilité du graphe. Enfin, si le temps le permet, il serait intéressant d'explorer d'autres classes de graphes peu denses.

Il serait préférable que le rendu soit réalisé en utilisant le logiciel SageMath [5]. En effet, ce logiciel inclus une bibliothèque d'algorithmes de graphes, ainsi que des outils de calculs sur les polynômes. Un autre avantage réside dans le fait que le générateur de graphes planaires `plantri` y est déjà intégré. Néanmoins, le choix de langage de programmation est laissé libre.

Références

[1] N. Alon, Combinatorial Nullstellensatz, *Combinatorics, Probability and Computing* 8(1-2,7-29), 1999.

[2] N. Alon, M. Tarsi. Colorings and orientations of graphs. *Combinatorica*, 12(2) : 125–134, 1992.

[3] G. Brinkmann, B. McKay. `http://cs.anu.edu.au/~bdm/plantri/`

[4] Y. Matiyasevich. A Criterion for Vertex Colorability of a Graph Stated in Terms of Edge Orientations. `https://arxiv.org/abs/0712.1884`, 2007 (Traduction anglaise d'un article en russe datant de 1974).

[5] The Sage Development Team. *Sage Mathematics Software (Version 8.4)*, 2018. `http://www.sagemath.org`.

Encadrants : Daniel Gonçalves (`daniel.goncalves@lirmm.fr`)
Petru Valicov (`petru.valicov@lirmm.fr`)

Rémunération : l'indemnité standard des stages

N'hésitez pas à nous contacter pour des questions ou tout simplement pour plus de détails !